

常微分方程与动力系统

(奥) Gerald Teschl 著
金成桴 译



机械工业出版社

本书介绍常微分方程和动力系统. 先从几个简单的明显可求解的方程开始, 接着证明初值问题的基本结果: 解的存在唯一性, 可延拓性, 以及关于初始条件的依赖性. 进一步, 考虑线性方程, 费洛凯 (Floquet) 定理和自治线性流.

然后, 在复域中讨论线性方程的费罗贝尼乌斯 (Frobenius) 方法, 以及对包括振动理论的施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 型边值问题的研究.

接下来引入动力系统的概念, 并对连续系统和离散系统讨论稳定流形的稳定性以及哈特曼-格曼伯曼 (Hartman-Grobman) 定理等.

随后证明庞加莱-本迪克松 (Poincaré-Bendixson) 定理, 并研究几个来自经典力学, 生态学以及电路工程中的平面系统的例子. 此外, 还讨论了吸引子, 哈密顿 (Hamilton) 系统, KAM 定理和周期解.

最后, 介绍混沌. 以迭代区间映射为基础, 并以同宿轨道的斯梅尔-伯克霍夫 (Smale-Birkhoff) 定理和梅利尼科夫 (Melnikov) 方法结束.

本书的许多重要内容在一般的微分方程教科书中是不介绍的. 它可作为数学、物力、力学的大学生, 研究生和教师们的常微分方程和动力系统教科书或参考书. 也可供相关人员参考使用.

关键词 常微分方程 动力系统 施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 方程

图书在版编目 (CIP) 数据

常微分方程与动力系统 / (奥) 特切 (Teschl, G.) 著; 金成桴译.
—北京: 机械工业出版社, 2011.4
ISBN 978-7-111-33305-0

I. ①常… II. ①特…②金… III. ①常微分方程②
动力系统 (数学) IV. ①O1751.②019

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 017355 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰

版式设计: 霍永明 责任校对:

封面设计: 责任印制: 杨 曦

北京京丰印刷厂印刷

2011 年 月第 版 · 第 次印刷

184mm × 260mm · 印张 · 千字

0 001—册

标准书号: ISBN 978-7-111-33305-0

定价: .00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066

门户网: <http://www.cmpbook.com>

销售一部: (010) 68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售二部: (010) 88379649

读者服务部: (010) 68993821

封面无防伪标均为盗版

序

本书起源于我在维也纳大学 2000 年夏和 2000/01 年冬所讲授的“常微分方程”，“动力系统和混沌”课程的讲义。自那以后，针对几年的教学反馈，对它进行了几次重写和修改。

本书强调用动力系统观点对常微分方程领域给出“封闭”式介绍。但是，它也包括某些古典的课题，诸如复平面中的微分方程和边值施图姆-刘维尔 (Strum-Liouville) 问题。

本书对读者仅要求懂微积分，复变函数与线性代数的某些基本知识，这些应该包含在通常的教科书中。另外，我也尝试说明如何利用计算机系统，如 Mathematica，以帮助研究微分方程。当然任何类似的软件都可以应用。

手稿中发现的某些错误我已经改正。因此你可从

<http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/>

确认你有最新版本。你也可以从 Mathematica 说明书中找到我们这本书中的命令以及一些附加材料。

致谢

我要感谢我的学生，Ada Akerman, Kerstin Ammann, Jörg Arnberger, Paolo Capka, Anna Geyer, Ahmed Ghneim, Hannes Grimm-Strele, Klaus Kröncke, Alice Lakits, Johanna Michor, Andreas Németh, Simon Rößler, Robert Stadler, Florian Wisser, 以及我的同事 Edward Dunne, Klemens Fellner, Daniel Lenz 和 Jim Sochacki, 他们指出一些打印稿中的错误和提出了改进的建议。

最后，没有书可完全避免错误。所以，你如果发现错误，或者有什么意见和建议（不管多么小）请让我知道。

G. Teschl

奥地利，维也纳

译者序

本书作者 G. Teschl 是维也纳大学数学系教授. 他个人兴趣广泛 (应用泛函分析, 非线性动力学, 应用代数几何, 线性与非线性偏微分方程等). 这本《常微分方程与动力系统》是他针对高年级本科生和研究生用动力系统观点写的常微分方程教材. 其起点并不高但介绍的内容面较宽又有一定深度, 是与一般常微分方程不同的教科书. 大家知道, 常微分方程的发展历史大致经历了三个阶段: 早期的古典理论, 包括微分方程的初等积分法, 初值问题与边值问题, 线性方程等; 中期的稳定性与定性理论, 包括李雅谱诺夫 (Lyapunov) 稳定性理论以及庞家菜 (Poincaré) 与本迪克松 (Bendixson) 的极限环论和定性理论; 现代的动力系统与混沌理论. 当然三个时期的发展也互相有穿插, 尤其后两个阶段. 本书以严格的数学理论, 独特的处理方式在这本大学教科书中介绍了上面三个时期的主要内容. 许多在一般常微分方程教科书中没有介绍或者介绍不够详细的内容在本书都可以看到. 例如在古典理论中的二阶线性方程求级数解的费罗贝尼乌斯 (Frobenius) 方法和复域中的微分方程, 边值问题中的施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 理论, 动力系统上的庞加莱-本迪克松 (Poincaré-Bendixson) 理论, 稳定和不稳定流形的存在性定理以及哈特曼-格罗伯曼 (Hartman-Grobman) 定理, 梅利尼科夫 (Melnikov) 方法等以及它们的证明. 纵观全书读者可以看到在这本篇幅有限的教科书中还包含了如平面和空间的微分方程定性理论以及离散系统和连续系统中的混沌理论的重要部分.

本书另一个重要特点是对常微分方程在许多学科中的应用介绍得比较广泛, 除了通常在力学和电路工程等方面的典型应用以外, 还介绍了常微分方程在哈密顿 (Hamilton) 系统、量子力学、相对论力学等学科中的简单应用. 对在经典力学中的应用也比一般教科书中丰富许多. 另外, 本书也简单介绍了微分方程求解的计算机模拟.

由于作者力求用数学基础理论证明定理, 读者不难发现书中用了不少后续数学知识, 例如集合论, 实复分析和一般拓扑. 这无疑给初学者带来了一定的困难, 好在其中大部分都有介绍, 有的虽然在前面没有介绍但在后面有说明. 有些没有说明的估计读者还没有接触过的概念我以译者注的形式作了介绍. 书中的问题有些是正文中相对比较简单的内容, 有些则可能要求有一定的抽象思维能力. 书中有些内容

的叙述带有一定的启发性，有助于培养读者的独立思考能力。本书可作为大学数学、物理等高年级学生的教科书和教师的教学参考书，部分内容也可作为研究生教材。

尽管本书还没有正式出版，鉴于它有上面的明显特色，为促进数学专业方向的基础教育工作，并承蒙获得作者许可先出版本书的中文版。

最后，感谢本书出版过程中提供帮助的人们，也感谢我妻子何燕俐对我工作的理解支持和关心。

金成桴

目 录

序
译者序

第1部分 古典理论

第1章 引言

- 1.1 牛顿 (Newton) 方程
- 1.2 微分方程的分类
- 1.3 一阶自治方程
- 1.4 求明显解
- 1.5 一阶方程的定性分析
- 1.6 一阶周期方程的定性研究

第2章 初值问题

- 2.1 不动点定理
- 2.2 基本的存在唯一性结果
- 2.3 一些推广
- 2.4 关于初始条件的依赖性
- 2.5 解的可延拓性
- 2.6 欧拉 (Euler) 方法与佩亚诺 (Peano) 定理

第3章 线性方程

- 3.1 矩阵指数
- 3.2 一阶线性自治系统
- 3.3 n 阶线性自治方程

3.4 一般的一阶线性系统

3.5 线性周期系统

3.6 附录: 若尔当 (Jordan) 标准形

第4章 复域中的微分方程

- 4.1 基本的存在唯一性结果
- 4.2 二阶方程的费罗贝尼乌 (Frobenius) 方法
- 4.3 含有奇点的线性系统
- 4.4 费罗贝尼乌斯 (Frobenius) 方法

第5章 边值问题

- 5.1 引言
- 5.2 紧对称算子
- 5.3 正则施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题
- 5.4 振动理论
- 5.5 周期算子

第2部分 动力系统

第6章 动力系统

- 6.1 动力系统
- 6.2 自治方程的流
- 6.3 轨道与不变集
- 6.4 庞加莱 (Poincaré) 映射
- 6.5 不动点的稳定性
- 6.6 李雅普诺夫 (Liapunov) 方法
稳定性

6.7 一维牛板 (Newton) 方程

第7章 不动点附近的局部性态

- 7.1 线性系统的稳定性
- 7.2 稳定流形和不稳定流形
- 7.3 哈特曼-格罗伯曼 (Hartman-Grobman) 定理
- 7.4 附录: 积分方程

第8章 平面动力系统

8.1 庞加莱-本迪克板 (Poincaré-Bendixson) 定理	9.2 洛伦茨 (Lorenz) 方程
8.2 生态学中的例子	9.3 哈密顿 (Hamilton) 力学
8.3 电路工程中的例子	9.4 完全可积的哈密顿 (Hamilton) 系统
第 9 章 高维动力系统	9.5 Kepler 问题
9.1 吸引集	9.6 KLM 定理

第 3 部分 混 沌

第 10 章 离散动力系统	12.1 周期解的稳定性
10.1 逻辑斯蒂 (Logistic) 方程	12.2 庞加莱 (Poincaré) 映射
10.2 不动点与周期点	12.3 稳定流形与不稳定流形
10.3 线性差分方程	12.4 自治扰动的梅利尼科夫 (Melnikov) 方法
10.4 不动点附近的局部性态	12.5 非自治扰动的梅利尼科夫 (Melnikov) 方法
第 11 章 一维离散动力系统	第 13 章 高维系统中的混沌
11.1 倍周期	13.1 斯梅尔 Smale 马蹄
11.2 夏尔科夫斯基 (Sarkovskii) 定理	13.2 斯梅尔-伯克霍夫 Smale- Birkhoff 同宿定理
11.3 关于混沌的定义	13.3 同宿轨道的梅利尼科夫 (Melnikov) 方法
11.4 康托尔 (Cantor) 集和帐篷 映射	参考文献
11.5 符号动力学	记号术语表
11.6 奇怪吸引子/排斥子与 分形集	索引
11.7 作为混沌源的同宿轨道	
第 12 章 周期解	

12.1 周期解的稳定性
12.2 庞加莱 (Poincaré) 映射
12.3 稳定流形与不稳定流形
12.4 自治扰动的梅利尼科夫 (Melnikov) 方法
12.5 非自治扰动的梅利尼科夫 (Melnikov) 方法
第 13 章 高维系统中的混沌
13.1 斯梅尔 Smale 马蹄
13.2 斯梅尔-伯克霍夫 Smale- Birkhoff 同宿定理
13.3 同宿轨道的梅利尼科夫 (Melnikov) 方法
参考文献
记号术语表
索引

第 1 部分 古典理论

第 1 章 引言

1.1 牛顿 (Newton) 方程

我们从物理学中一个例子开始. 在经典力学中, 质点是由空间中的点刻画的, 它的位置由函数

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1-1)$$

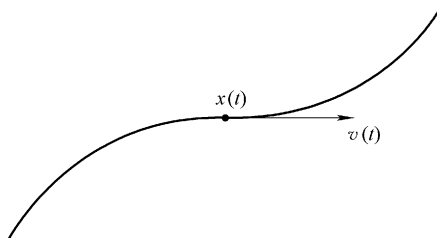


图 1-1

确定. 这个函数对时间的导数便是质点的速度

$$v = \dot{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1-2)$$

速度的导数是加速度

$$a = \dot{v}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1-3)$$

在这个模型中, 质点通常在外力

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1-4)$$

下运动, 力 $F(x)$ 作用在质点 x 上. 牛顿 (Newton) 第二定律说, 在空间每一点 x , 作用在质点上的力必须等于加速度乘质点的质量 m (正常数), 就是说

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)), \text{ 对所有的 } t \in \mathbb{R}^n. \quad (1-5)$$

函数 $x(t)$ 和它的导数之间这样的关系称为微分方程. 方程 (1-5) 是二阶的, 因为最高阶导数是二阶的. 更确切地说, 我们有一系列微分方程, 因为对每个坐标方向都有一个方程.

在此情形下, x 称为因变量, t 称为自变量. 我们也可以将 v 加入到因变量,

以增加因变量数目而考虑 $(x, v) \in \mathbb{R}^6$. 其好处是, 现在我们得到的是一阶系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{m}F(x(t)).\end{aligned}\quad (1-6)$$

这个形式通常更方便于理论研究.

对给定的力 F , 我们要寻求解, 它是满足方程 (1-5) 的函数 $x(t)$ (对应系统 (1-6)). 更特殊地, 考虑一块石块掉到地球上的运动, 地球表面附近作用在石块上的重力近似于常数且等于

$$F(x) = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1-7)$$

其中 g 是正常数, x_3 方向假设是地球表面的法线方向. 因此, 我们的微分方程系统成为

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_3 &= -mg.\end{aligned}\quad (1-8)$$

第一个方程对 t 可积分两次, 得 $x_1(t) = C_1 + C_2t$, 其中 C_1, C_2 为积分常数. 计算在 $t=0$ 的 x_1 和 \dot{x}_1 的值, 分别得 $C_1 = x_1(0)$, $C_2 = v_1(0)$. 对其他两个方程作类似处理, 最后, 我们得到

$$x(t) = x(0) + v(0)t - \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2. \quad (1-9)$$

因此, 我们的质点的整个“命运”(过去和将来)由指定的初始位置 $x(0)$ 和初始速度 $v(0)$ 唯一确定.

从这个例子你也许会得到一个印象, 就是, 微分方程的解总可以通过直接积分求得. 但是一般这做不到. 理由是之所以我们可直接积分, 是因为这里的力与 x 无关. 如果我们将我们的模型精确化, 考虑实际的万有引力

$$F(x) = -\gamma mM \frac{x}{|x|^3}, \quad \gamma, M > 0, \quad (1-10)$$

于是, 我们的微分方程变成

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= -\frac{\gamma mMx_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{\gamma mMx_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ m\ddot{x}_3 &= -\frac{\gamma mMx_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\quad (1-11)$$

这就不再是明显求解了. 此外, 我们现在甚至还不清楚这个方程的解是否存在! (在 9.5 节我们再回到这个问题).

问题 1.1 考虑石块从高 h 处落下, 以 r 表示石块到地面的距离. 初始条件为 $r(0) = h$, $\dot{r}(0) = 0$. 运动方程为

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma M}{(R+r)^2} \quad (\text{精确模型}),$$

相应地,

$$\ddot{r} = -g \quad (\text{近似模型}),$$

其中 $g = \gamma M/R^2$, R 和 M 分别是地球半径和质量.

(1) 将这两个方程化为一阶系统.

(2) 计算近似系统对应于给定初始条件的解. 计算石块落到地面的时间 ($r = 0$).

(3) 假设精确方程对应于给定的初始条件也有唯一解. 这时石块落到地面的时间与近似模型比较你能够说些什么? (提示: 你不用计算精确方程的解! 而要考虑力的最大值和最小值).

(4) 利用高中物理知识, 计算当 $h = 10\text{m}$ 时的这些数值.

问题 1.2 再考虑上一个问题的精确模型, 并将它写为

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma M \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon r)^2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{R}.$$

可以证明满足上面初始条件的解 $r(t) = r(t, \varepsilon)$ 是 C^∞ (关于 t 和 ε) 的. 求证

$$r(t) = h - g \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right) \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad g = \frac{\gamma M}{R^2}.$$

(提示: 将 $r(t, \varepsilon) = r_0(t) + r_1(t)\varepsilon + r_2(t)\varepsilon^2 + r_3(t)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$ 代入到微分方程且合并 ε 的各次项. 然后解对应于 $r_0(t), r_1(t), \dots$ 的微分方程, 并注意到初始条件 $r(0, \varepsilon) = h, \dot{r}(0, \varepsilon) = 0$).

1.2 微分方程的分类

设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}_0$, 以及 $C^k(U, V)$ 表示具有直到 k 阶连续导数的函数 $U \rightarrow V$ 的集合. 此外, 我们记 $C(U, V) = C^0(U, V)$ 和 $C^k(U) = C^k(U, \mathbb{R})$.

一个古典常微分方程 (ODE) 是未知函数 $x \in C^k(J)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ 的关系式

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = 0. \quad (1-12)$$

其中 $F \in C(U)$, U 是 \mathbb{R}^{k+2} 的开子集,

$$x^{(k)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1-13)$$

是 x 的“通常”导数. 我们经常称 t 为自变量, x 为因变量. 出现在 F 中最高阶导

数的阶数称为微分方程的阶. ODE (1-12) 的解是满足

$$F(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) = 0, \quad \text{对所有 } t \in I \quad (1-14)$$

的函数 $\phi \in C^k(I)$, 其中 $I \subseteq J$ 是区间. 这意味着, 对所有 $t \in I$, 有 $(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) \in U$.

遗憾的是, 关于上面形式的一般微分方程 (1-12) 我们知道的并不多. 因此, 假设可以从 F 中解出最高阶导数, 而得到下面形式的微分方程

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}). \quad (1-15)$$

如果在某个点 $(t, y) \in U$ 关于最高阶导数的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial y_k}(t, y) \neq 0$, 由隐函数存在定理我们至少可以局部地在这个点的邻域内这样做. 这是我们从现在起将考虑的微分方程类型.

从上一节我们已经看到, 仅考虑实数值函数情形还不够, 还要允许有情形 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. 这导致考虑常微分方程系统

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= f_1(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}), \\ &\vdots \\ x_n^{(k)} &= f_n(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}). \end{aligned} \quad (1-16)$$

一个系统称为**线性系统**, 如果它有形式

$$x_i^{(k)} = g_i(t) + \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} f_{i,j,l}(t) x_l^{(j)}. \quad (1-17)$$

若 $g_i(t) = 0$, 就称它为**齐次系统**.

此外, 任何一个系统总可以通过改变新因变量集合 $y = (x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$ 而化为一阶系统

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ &\vdots \\ \dot{y}_{k-1} &= y_k, \\ \dot{y}_k &= f(t, y). \end{aligned} \quad (1-18)$$

我们甚至可以将 t 加入到因变量 $z = (t, y)$ 中去, 使得系统右端与 t 无关:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 1, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_k &= z_{k+1}, \\ \dot{z}_{k+1} &= f(z). \end{aligned} \quad (1-19)$$

这样的系统, 即 f 不依赖于 t 的系统称为**自治系统**. 特别地, 我们将经常只需考虑一阶自治系统.

当然, 我们也可考虑情形 $t \in \mathbb{R}^m$, 即意味着要处理偏导数情形. 这样我们就进

入偏微分方程 (PDE) 领域. 这个情形更为复杂, 它不是本书的内容.

最后我们指出, 对因变量我们可以允许有复数值. 用实因变量或复因变量其结果没有什么区别. 不过, 我们叙述的大部分结果仅针对实数情形而将一些复因变量情况下明显的改变留给读者. 对于另一些结果, 自变量是复数情形就有明显的变化, 我们将在第4章讨论这个问题.

问题 1.3 对下面的方程进行分类. 它们是否为线性, 自治? 阶数是什么?

$$(1) y'(x) + y(x) = 0,$$

$$(2) \frac{d^2}{dt^2}u(t) = \sin(u(t)),$$

$$(3) y(t)^2 + 2y(t) = 0,$$

$$(4) \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) = 0,$$

$$(5) \dot{x} = -y, \dot{y} = x.$$

问题 1.4 下面的微分方程哪个是线性方程?

$$(1) y'(x) = \sin(x)y + \cos(y),$$

$$(2) y'(x) = \sin(y)x + \cos(x),$$

$$(3) y'(x) = \sin(x)y + \cos(x).$$

问题 1.5 寻找二阶线性微分方程的最一般形式.

问题 1.6 将下面的微分方程化为一阶系统.

$$(1) \ddot{x} + t\sin(\dot{x}) = x,$$

$$(2) \ddot{x} = -y, \dot{y} = x.$$

最后这个方程是线性方程. 对应的一阶系统也是线性的吗? 这种情况是不是永远成立?

问题 1.7 将下面的微分方程化为一阶自治系统.

$$(1) \ddot{x} + t\sin(\dot{x}) = x,$$

$$(2) \ddot{x} = -\cos(t)x.$$

最后一个方程是线性方程. 对应的自治系统也是线性的吗?

问题 1.8 设 $x^{(k)} = f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$ 是自治方程 (或者系统). 求证如果 $\phi(t)$ 是解, 则 $\phi(t - t_0)$ 也是解.

1.3 一阶自治方程

考虑一阶自治方程的最简单 (非平凡) 情形, 并试求在时间 $t = 0$ 通过某点 x_0 的解:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad f \in C(\mathbb{R}). \quad (1-20)$$

当然, 我们也可以求在时间 t_0 从 x_0 开始的解. 但是一旦我们有满足 $\phi(0) = x_0$ 的解

$\phi(t)$, 则满足 $\psi(t_0) = x_0$ 的解 $\psi(t)$ 可由简单的平移 $\psi(t) = \phi(t - t_0)$ 得到 (事实上, 对任何自治方程这个性质也成立, 比较问题 1.8).

这个方程可用小技巧求解. 如果 $f(x_0) \neq 0$, 两端除 $f(x)$ 并对 t 积分得

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s) ds}{f(x(s))} = t. \quad (1-21)$$

记 $F(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)}$, 我们看到方程 (1-20) 的每一个解 $x(t)$ 必须满足 $F(x(t)) = t$.

由于 $F(x)$ 在 x_0 附近严格单调, 故可求逆, 从而得到初值问题的唯一解

$$\phi(t) = F^{-1}(t), \quad \phi(0) = F^{-1}(0) = x_0, \quad (1-22)$$

其中 $F^{-1}(t)$ 是 $F(t)$ 的逆映射.

现在我们来考虑解的最大存在性区间. 如果 $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$ 情形类似), 由连续性 f 在围绕 x_0 的某个区间 (x_1, x_2) 内保持为正. 定义

$$T_+ = \lim_{x \rightarrow x_2^-} F(x) \in (0, \infty], \quad \text{相应地} \quad T_- = \lim_{x \rightarrow x_1^+} F(x) \in [-\infty, 0), \quad (1-23)$$

于是 $\phi \in C^1(T_-, T_+)$ 且

$$\lim_{t \rightarrow T_+^-} \phi(t) = x_2, \quad \text{相应地} \quad \lim_{t \rightarrow T_-^+} \phi(t) = x_1. \quad (1-24)$$

特别地, ϕ 对一切 $t > 0$ 存在 (相应的 $t < 0$), 当且仅当

$$T_+ = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{f(y)} = +\infty, \quad (1-25)$$

即 $1/f(x)$ 在 x_2 附近不可积. 类似地, 当且仅当 $1/f(x)$ 在 x_1 附近不可积时 ϕ 对一切 $t < 0$ 存在.

现在我们来看几个例子.

例 1-1 如果 $f(x) = x$, $x_0 > 0$, 则有 $(x_1, x_2) = (0, \infty)$ 以及

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right). \quad (1-26)$$

因此, $T_{\pm} = \pm \infty$ 以及

$$\phi(t) = x_0 e^t. \quad (1-27)$$

从而, 解对所有的 $t \in \mathbb{R}$ “大范围”有定义. 注意, 事实上这是对所有 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的解.

例 1-2 设 $f(x) = x^2$, $x_0 > 0$. 我们有 $(x_1, x_2) = (0, \infty)$, 且

$$F(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}. \quad (1-28)$$

因此 $T_+ = 1/x_0$, $T_- = -\infty$ 且

$$\phi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}. \quad (1-29)$$

特别地, 解不再对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 都有定

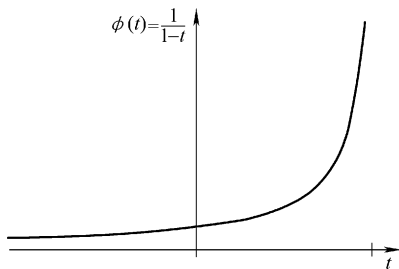


图 1-2

义. 此外, 由于 $\lim_{t \rightarrow 1/x_0^-} \phi(t) = \infty$, 我们决不可能将这个解延拓到 $t \geq T_+$.

现在看 $f(x)$ 的零点有什么特点? 显然, 如果 $f(x_0) = 0$, 则存在满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的平凡解

$$\phi(t) = x_0. \quad (1-30)$$

但是不是就这一个解呢? 如果我们有

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \right| < \infty, \quad (1-31)$$

则存在另外满足 $\varphi(0) = x_0$ 的解

$$\varphi(t) = F^{-1}(t), \quad F(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)}, \quad (1-32)$$

它是不同于 $\phi(t)$ 的!

例 1-3 考虑 $f(x) = \sqrt{|x|}$, 则 $(x_1, x_2) = (0, \infty)$,

$$F(x) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}). \quad (1-33)$$

以及

$$\varphi(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2} \right)^2, \quad -2\sqrt{x_0} < t < \infty. \quad (1-34)$$

所以, 对 $x_0 = 0$ 存在几个解, 它们可由加入平凡解 $\phi(t) = 0$ 以及上面的解得到:

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} -\frac{(t-t_0)^2}{4}, & t \leq t_0, \\ 0, & t_0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{(t-t_1)^2}{4}, & t_1 \geq t. \end{cases} \quad (1-35)$$

对 $t_0 = 0$ 和 $t_1 = 1$ 的解 $\tilde{\phi}$ 的图像如下:

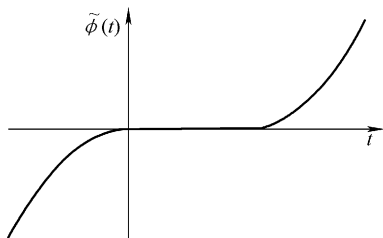


图 1-3

作为上面例子的结论, 我们有:

- 即使对性质很好的 f , 解可能仅局部存在.
- 解可以不唯一. 不过要注意, $f(x) = \sqrt{|x|}$ 在点 $x_0 = 0$ 不可微是问题的原因.

注意用相同的方法可求解所谓变量分离方程

$$\dot{x} = f(x)g(t). \quad (1-36)$$

(见问题 1-11) .

问题 1.9 求解下面微分方程:

$$(1) \dot{x} = x^3,$$

$$(2) \dot{x} = x(1-x),$$

$$(3) \dot{x} = x(1-x) - c.$$

问题 1.10 如果 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 证明 (1-20) 的解唯一.

问题 1.11 (变量分离方程). 求证如果 $f(x_0) \neq 0$, 则方程 ($f, g \in C^1$)

$$\dot{x} = f(x)g(t), \quad x(t_0) = x_0$$

局部地有唯一解. 给出隐式解.

问题 1.12 求解下列微分方程

$$(1) \dot{x} = \sin(t)x,$$

$$(2) \dot{x} = g(t)\tan(x),$$

$$(3) \dot{x} = \sin(t)e^x.$$

画出解. 什么初始条件 (如果有) 的解有界?

问题 1.13 研究微分方程

$$\dot{x} = \begin{cases} -t \sqrt{|x|}, & x \geq 0, \\ t \sqrt{|x|}, & x \leq 0 \end{cases}$$

解的唯一性. 证明对任何初始条件 $x(t_0) = x_0$ 存在局部唯一解. 证明每个解可延拓为大范围解. 但是, 证明大范围解不唯一! (提示: 注意, 如果 $x(t)$ 是解则 $-x(t)$ 也是解, 因此只需考虑 $x_0 \geq 0$. 此外, $t_0 = 0$ 的解覆盖整个 (t, x) 平面, 因此只需考虑 $t_0 = 0$.)

问题 1.14 (线性齐次方程). 求证方程 $\dot{x} = a(t)x$ 的解为

$$\phi(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right),$$

其中 $a \in C(\mathbb{R})$.

问题 1-15 电容器的充电过程由微分方程

$$R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0$$

描述, 其中 $Q(t)$ 是电容器的电荷, C 是它的电容, V_0 是电池电压, R 是导线的电阻.

假设在 $t=0$ 电容没有充电, 计算 $Q(t)$. 当 $t \rightarrow \infty$ 时你得到什么充电结果?

问题 1.16 (细菌的增长). 某个细菌种群按照规律

$$\dot{N}(t) = \kappa N(t), \quad N(0) = N_0$$

增长, 其中 $N(t)$ 是细菌在时刻 t 时的数量, $\kappa > 0$ 是增长率, N_0 是初始数量. 如果

对有限空间最多存在 N_{\max} 细菌，则细菌增长必须按照

$$\dot{N}(t) = \kappa \left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}} \right) N(t), \quad N(0) = N_0$$

进行修改.

假设 $0 < N_0 < N_{\max}$ ，求解这两个方程并讨论这些解. 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $N(t)$ 有什么样的性态?

问题 1.17 (最佳收获) 取与上面相同的问题. 但现在假设你以某个收获率 $H > 0$ 获取细菌. 于是这个情况由

$$\dot{N}(t) = \kappa \left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}} \right) N(t) - H, \quad N(0) = N_0$$

模拟.

用

$$x(\tau) = \frac{N(t)}{N_{\max}}, \quad \tau = \kappa t$$

尺度化, 证明方程变为 $\dot{x}(\tau) = (1 - x(\tau))x(\tau) - h$, $h = \frac{H}{\kappa N_{\max}}$.

直观上, 函数 $f(x, h) = (1 - x)x - h$ 在区域 $(x, h) \in U = (0, 1) \times (0, \infty)$ 内既有正值也有负值. 对给定的 $(x_0, h) \in U$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时解分别有什么样的性态? 它们与上面的区域是如何联系的? 你估计的最大获取量是什么?

问题 1.18 (伞兵跳伞) 考虑有空气阻力的自由落体, 它由

$$\ddot{x} = -\eta \dot{x} - g, \quad \eta > 0$$

模拟. 求解这个方程 (提示: 引入速度 $v = \dot{x}$ 作为新因变量). 是否存在并能够达到极限速度? 如果是, 求此极限速度. 考虑伞兵跳伞情形. 假设降落伞在某个时刻 $t_0 > 0$ 打开. 通过假设对 $0 < t < t_0$, 有 $\eta = \eta_1$, 对 $t > t_0$ 有 $\eta = \eta_2 > \eta_1$, 模拟这个情况并与在 t_0 的解匹配. 这个解看上去像什么?

1.4 求明显解

从上一节我们已经看到, 有些微分方程可以明显地求解. 但是, 不存在求解给定微分方程的一般方法. 另外, 除非方程是特殊形式, 一般寻找明显解是不可能的. 这一节将告诉你某些可以明显求解的一阶微分方程.

其一般思想是寻找适当的变量变换, 将所给方程化为可解的形式. 因此首先回忆这个变换的概念. 给定以 (t, x) 为坐标的点, 我们可用

$$s = \sigma(t, x), \quad y = \eta(t, x) \tag{1-37}$$

变换成新坐标. 由于我们不希望在变换过程中丢失信息, 因此要求变换可逆.

对给定函数 $\phi(t)$, 由

$$s = \sigma(t, \phi(t)), \quad \psi = \eta(t, \phi(t)) \tag{1-38}$$

消去 t 变换为函数 $\psi(s)$. 遗憾的是这并不是永远可能的 (例如, 如果我们在 \mathbb{R}^2 中旋转函数的图像, 所得的结果可能不是原来函数的图像). 为了避免出现这个问题, 我们把注意力局限于**保纤变换**的特殊情形

$$s = \sigma(t), \quad y = \eta(t, x) \quad (1-39)$$

(它映纤维 $t = \text{常数}$. 为纤维 $s = \text{常数}$). 记逆变换为

$$t = \tau(s), \quad x = \xi(s, y), \quad (1-40)$$

直接应用链式法则得知 $\phi(t)$ 满足

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1-41)$$

当且仅当 $\psi(s) = \eta(\tau(s), \phi(\tau(s)))$ 满足

$$\dot{y} = \dot{\tau} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}(\tau, \xi) + \frac{\partial \eta}{\partial x}(\tau, \xi) f(\tau, \xi) \right), \quad (1-42)$$

其中 $\tau = \tau(s)$ 和 $\xi = \xi(s, y)$. 类似地, 可以对高阶方程求得公式. 但是, 这些公式对实际计算的帮助很小, 比较好的是用较简单 (但不明确) 的记号

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy(t(s), x(t(s)))}{ds} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}. \quad (1-43)$$

现在让我们看看如何用变换来求解微分方程.

齐次方程

一个 (非线性) 微分方程称为是**齐次方程**, 如果它有形式

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right). \quad (1-44)$$

这个特殊形式建议作变量变换 $y = \frac{x}{t}$ ($t \neq 0$), 用它 (和式 (1-43)) 就可将我们的方程化为

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x} = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t} \dot{x} = \frac{f(y) - y}{t}. \quad (1-45)$$

这是个变量可分离的方程.

更一般地, 考虑微分方程

$$\dot{x} = f\left(\frac{ax + bt + c}{\alpha x + \beta t + \gamma}\right). \quad (1-46)$$

出现两个情形. 如果 $a\beta - \alpha b = 0$, 我们的微分方程有形式

$$\ddot{x} = \check{f}(ax + bt), \quad (1-47)$$

如果我们令 $y = ax + bt$, 它将变为

$$\dot{y} = a\check{f}(y) + b. \quad (1-48)$$

另外, 如果 $a\beta - \alpha b \neq 0$, 我们可以用 $y = x - x_0$ 和 $s = t - t_0$ 将式 (1-46) 化为齐次方程

$$\dot{y} = f\left(\frac{ay + bs}{\alpha y + \beta s}\right), \quad (1-49)$$

其中 (x_0, t_0) 是线性方程 $ax + bt + c = 0$, $\alpha x + \beta t + \gamma = 0$ 的唯一解.

伯努利 (Bernoulli) 方程

形如

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n, \quad n \neq 1 \quad (1-50)$$

的方程称为伯努利 (Bernoulli) 方程. 变换

$$y = x^{1-n} \quad (1-51)$$

将原来方程化为线性方程

$$\dot{y} = (1-n)f(t)y + (1-n)g(t). \quad (1-52)$$

我们将在 3.4 节 (或者见问题 1.22) 说明如何求解这个方程.

里卡蒂 (Riccati) 方程

形如

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^2 + h(t) \quad (1-53)$$

的方程称为里卡蒂 (Riccati) 方程. 只有在知道它的一个特解 $x_p(t)$ 时, 这个方程才能求解. 这时变换

$$y = \frac{1}{x - x_p(t)} \quad (1-54)$$

将原方程化为线性方程

$$\dot{y} = -(f(t) + 2x_p(t)g(t))y - g(t). \quad (1-55)$$

这些仅仅是少量能够用某些适当的变换明显求解的最重要方程. 事实上, 像 Kamke [18] 这样的参考书, 在那里你可以查到对给定的方程是否可求得明显解. 对一阶方程, 它可能是首选的办法, 看看是否存在机会求明显解. 但是对二阶方程, 能够明显求解的就很少了.

另外一个方法是, 我们也可以用计算机程序, 像 Mathematica 为我们求解微分方程. 例如解方程

$$\dot{x} = \sin(t)x. \quad (1-56)$$

我们可以用命令

```
In [1] = DSolve[x'[t] == x[t] Sin[t], x[t], t]
```

```
Out [1] = {{x[t] -> e^{-Cos[t]} C[1]}}
```

这里的常数 C [1] 由 Mathematica 引入, 它可取任意值 (例如满足初始条件). 也可以用下面的命令解对应的初值问题

```
In[2] := DSolve[{x'[t] == Sin[t] x[t], x[0] == 1}, x[t], t]
```

```
Out [2] = {{x[t] -> e^{1-Cos[t]}}}
```

和用

```
In [3] := Plot[x[t] /. %, {t, 0, 2\pi}]
```

画图

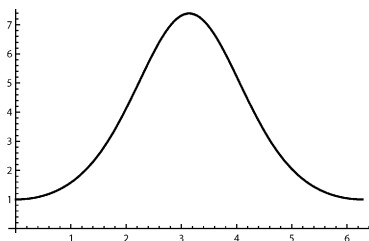


图 1-4

`Out [3] =`

在某些情况下利用方向场的直观化也是有帮助的。就是说，对每一点 (t, x) 我们附上一个向量 $(1, f(t, x))$ 。于是在每一点解曲线与这个向量场相切：

`In [4] := Needs["VectorFieldPlots"];`

`In [5] := VectFieldPlot[{1, Sin[t] x}, {t, 0, 2π}, {x, 0, 6},`

`Frame→True, PlotPoints→10]`

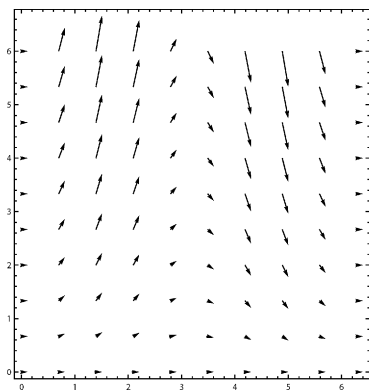


图 1-5

`Out [5] :=`

看上去似乎 Mathematica 几乎可以为我们做一切，而我们所要做的仅是打上方程按一下输入再等解。但是问题通常并不那么容易。因为正如早先指出的，只有非常稀少的方程可明显求解，`Dsolve` 的命令仅仅在很少的情形下对我们有帮助。其他情形它不能够明显求解，那将是留给本书的任务！

让我用下面的告诫结束本节。用 Mathematica 求解我们前面的一个例子

`In [6] := Dsolve[{x'[t] == Sqrt[x[t]}, x[0] == 0}, x[t], t]`

`Out [6] = {{x[t] → $\frac{t^2}{4}$ }}`

但是，上一节研究显示这个问题不是只有一个解！Mathematica 希望你还存在

另外的解, 并如何得到它们.

不过, 如果你尝试解一般初值问题甚至会得到错误的结论:

In[7]: = Dsolve[{x'[t] == = sqrt[x[t]], x[0] == = x0], x[t], t] // Simplify

Out[7] = { {x[t] -> 1/4 (t - 2 sqrt[x0])^2, {x[t] -> 1/4 (t + 2 sqrt[x0])^2 } }

第一个“解”根本不是我们初值问题的解! 它满足 $\dot{x} = -\sqrt{x}$.

问题 1.19 尝试求下面微分方程的解:

$$(1) \dot{x} = \frac{3x - 2t}{t},$$

$$(2) \dot{x} = \frac{x - t + 2}{2x + t + 1} + 5,$$

$$(3) y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2},$$

$$(4) y' = \frac{y}{x} - \tan\left(\frac{y}{x}\right).$$

问题 1.20 (Euler 方程) 将微分方程

$$t^2 \ddot{x} + 3t \dot{x} + x = \frac{2}{t}$$

化为新坐标 $y = x$, $s = \ln(t)$ 下的方程. (提示: 不要你求解它).

问题 1.21 从前面几个问题找一些微分方程, 用你认为适当的计算代数系统求解它们. 画出解曲线.

问题 1.22 (线性非齐次方程) 验证方程 $\dot{x} = a(t)x + g(t)$ 的解是

$$\phi(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right) g(s) ds.$$

其中 $a, g \in C(1\mathbb{R})$.

问题 1.23 (恰当方程) 考虑方程

$$F(x, y) = 0,$$

其中 $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. 假设 $y(x)$ 是这个方程的解. 求证 $y(x)$ 满足

$$p(x, y)y' + q(x, y) = 0,$$

其中

$$p(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \quad \text{和} \quad q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}.$$

证明我们有

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial y}.$$

反之, 满足最后这个条件的上面的一阶微分方程 (具有任意系数 $p(x, y)$ 和 $q(x, y)$) 称为恰当方程. 求证, 如果方程是恰当的, 则存在如上的对应函数 F . 借助于 p

和 q 求 F 的明显表达式. F 的表达式是不是由 p 和 q 唯一确定呢?

求证

$$(4bxy + 3x + 5)y' + 3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y = 0$$

是恰当方程. 求 F 并求解.

问题 1.24 (积分因子) 考虑方程

$$p(x, y)y' + q(x, y) = 0,$$

函数 $\mu(x, y)$ 称为积分因子, 如果

$$\mu(x, y)p(x, y)y' + \mu(x, y)q(x, y) = 0$$

是恰当方程.

求积分因子一般与求解原来方程一样困难. 但是在一些情形下可以猜测 μ 的形状.

考虑

$$xy' + 2x - 2y = 0,$$

求仅依赖于 x 的积分因子 $\mu(x)$. 并求解这方程.

问题 1.25 (波的聚焦) 假设你有沿着 y 轴入射一个电磁波需要聚焦到原点 $(0, 0)$ 的接收器. 问镜子的最佳形状是什么?

(提示: 入射线与镜子上的 (x, y) 相遇, 其方程为

$$R_{\text{in}}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in (-\infty, 0].$$

在 (x, y) 沿着

$$R_{\text{ref}}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (1 - t), \quad t \in [0, 1]$$

反射. 物理定律要求入射线与镜子切线之间的交角等于反射线与镜子切线之间的交角. 考虑向量与切向量的数量积得

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}, \quad u = \frac{y}{x}.$$

它是 $y = y(x)$ 的微分方程, 你得求解这方程).

问题 1.27 (非线性边值问题) 求证非线性边值问题

$$y''(x) + y(x)^2 = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

有唯一非平凡解. 假设初值问题 $y(x_0) = x_0, y'(x_0) = y_1$ 有唯一解.

● 求证这个边值问题的非平凡解必须满足 $y'(0) = p_0 > 0$.

● 如果解满足 $y'(x_0) = 0$, 那么这个解关于点 x_0 对称: $y(x) = y(x_0 - x)$. (提示: 由唯一性).

● 求解如下初值问题 $y(0) = 0, y'(0) = p_0 > 0$: 令 $y' = p(y)$ 并对 $p(y)$ 推导一阶方程.

对 $p(y)$ 求解这个方程, 然后解方程 $y' = p(y)$. (注意这个工作对任何型如 $y'' = f(y)$ 的方程都可进行).

- 从上面题目找到的解是否在 x_0 能够达到 $y'(x_0) = 0$? 什么样的 x_0 值能够解我们的 $y(x)$ 的边值问题?
- 借助于特殊的函数你能不能找到 p_0 的值?

1.5 一阶方程的定性分析

我们在上一节已经注意到, 只有非常少的常微分方程可以明显求解. 幸运的是, 在许多情况下我们并不需要解, 而仅对解的某些定性特征感兴趣. 例如, 解是否停留在某个区域内, 以及解在长时间 t 有什么性质, 等等.

此外, 即使在确切解可以得到的情况下, 解的定性分析比解的公式可以给出更好的概貌. 例如, 考虑逻辑斯谛 (logistic) 增长模型 (问题 1-16)

$$\dot{x}(t) = (1 - x(t))x(t) - h, \quad (1-57)$$

它可分离变量求解. 为了得到解的概貌, 我们画出对应于右端函数的曲线 $f(x) = (1 - x)x - h$:

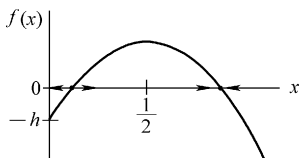


图 1-6

由于 $f(x)$ 的符号能够告诉我们解沿什么方向运动, 因此, 我们所有要做的就是讨论 $f(x)$ 的符号! 对 $0 < h < \frac{1}{4}$, 存在两个零点 $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4h})$. 如果我们从这两个零点之一开始, 对所有 t 解都将停留在那里. 如果我们从 x_1 的下方开始, 解将减少并收敛于 $-\infty$. 如果我们从 x_1 的上方开始, 解将增加并收敛于 x_2 . 如果我们从 x_2 的上方开始, 解将减少并再次收敛于 x_2 .

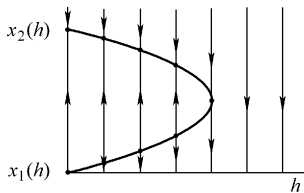


图 1-7

所以我们只不过讨论了 $f(x)$ 的符号, 就得到了解的完整图像! 更一般地, 我们有一阶自治初值问题 (问题 1-28)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1-58)$$

的下面结果，其中 f 使得解唯一（例如 $f \in C^1$ ）。

(1) 如果 $f(x_0) = 0$ ，则对一切 t 有 $x(t) = x_0$ 。

(2) 如果 $f(x_0) \neq 0$ ，则当 $f(x_0) < 0$ 时 $x(t)$ 收敛于 x_0 左边的第一个零点，当 $f(x_0) > 0$ 时 $x(t)$ 收敛于 x_0 右边的第一个零点。如果这样的零点不存在，则解分别收敛于 $-\infty$ 和 ∞ 。

如果微分方程不是自治的，则情况变得比较复杂。作为典型的例子，考虑微分方程

$$\ddot{x} = x^2 - t^2. \quad (1-59)$$

按照上一节的说明，这是里卡蒂（Riccati）方程，它不可求解，除非可找到特殊解。但是看不出有可容易地猜测出的解。（后面在问题 4-10，我们将借助于特殊函数证明它可明显求解）。

因此，我们尝试不知道解的情况下分析这个方程。当然，首先要确认它的解的存在性！由于我们要在下一章才能一般地完全攻克这个问题，在这里仅说明，如果 $f(t, x) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ，则对每一点 $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ ，存在定义在 t_0 的邻域内的初值问题

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1-60)$$

的唯一解（定理 2.2）。在 1.3 节我们已经知道，即使微分方程对所有 $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ 都有定义，解并不是对所有 t 都有定义。但是，我们将证明，如果解不是对所有的 t 都存在，则解必须收敛于 $\pm\infty$ （推论 2-15）。

为了得到我们期盼的一些直觉，一个较好的出发点是数值研究。利用命令

```
In[8] := NDSolve[ { x' [t] == x[t]^2 - t^2, x[0] == 1 }, x[t], {t, -2, 2} ]
```

```
NDSolve::npsz: At t == 1.037468967709798', step size is effectively zero; singularity Suspected.
```

```
Out[8] = {{x[t] -> InterpolatingFunction[{{ -2., 1.03747}}, < >][t]}}
```

我们可以计算这个方程在区间 $(-2, 2)$ 上的数值解。数值求解常微分方程意味着计算点列 (t_j, x_j) ，它们有希望接近于真实解的图像（在 2.6 节我们将简短地讨论数值方法）。Mathematica 通过一个内插函数代替这一系列点，从名字你或许已经猜测到，其实就是在这些点之间做内插，因此这个办法可用于其他任何函数。

注意，在我们这个特殊例子中，Mathematica 抱怨步长（即差 $t_j - t_{j-1}$ ）太小，并在 $t = 1.037\dots$ 停止了。因此，即使我们要求在 $(-2, 2)$ 上的解，此结果也仅定义在区间 $(-2, 1.03747)$ 上。这表明解仅在有限时间存在。

结合不同初值条件的解我们得到下面的图像：

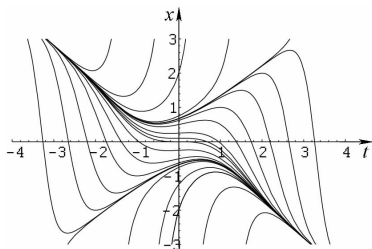


图 1-8

首先注意, 图像关于变换 $(t, x) \rightarrow (-t, -x)$ 对称. 因此只需考虑 $t \geq 0$. 此外, 由唯一性得知不同解永不相交.

按照我们的图像, 看上去有两个情况. 要么解在有限时间跑向 $+\infty$, 要么收敛于直线 $x = -t$. 但是真实的情况是不是这样呢? 也许可能是某种数值误差的凝聚. 也可能存在收敛于直线 $x = t$ 的解 (在我们的图像中我们失去了对应的初始条件). 另外, 还可能由于我们限制在区间 $t \in (-2, 2)$ 内而失去了一些重要的东西! 因此, 我们要试图证明, 我们的图像事实上是正确的, 没有失去什么东西.

按照 $f(t, x) = x^2 - t^2$ 的符号将平面分成几个区域. 由于只需考虑 $t \geq 0$, 只存在三个区域: I: $x > t$, II: $-t < x < t$, 以及 III: $x < -t$. 在区域 I 和 III 解将增加, 在区域 II 解将减少.

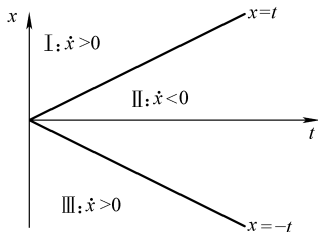


图 1-9

进一步, 在直线 $x = t$ 上的每一个解有水平切线, 因此, 解只能从区域 I 到 II, 没有其他方式.

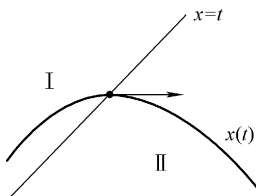


图 1-10

类似地, 解只可能从区域 III 到 II 不可能从区域 II 到 III. 这是已经得到的解的重要结论:

· 从区域 I 中出发的解存在两个情形：或者对所有时间解都停留在区域 I 内，因此必须收敛于 $+\infty$ （可能在有限时间），或者它进入区域 II。

· 从区域 II 开始的解（或者进入 II 的解）对所有时间都停留在那里，因此必须收敛于 $-\infty$ （为什么不能保持有界？）因为它必须停留在 $x = -t$ 的上面，这在有限时间是不可能发生的。

· 从区域 III 开始的解将最终与 $x = -t$ 相遇而进入区域 II。

因此存在两个遗留问题：区域 I 中收敛于 $+\infty$ 的解是否在有限时间到达 $+\infty$ ，或者是否也存在沿着例如直线 $x = t$ 收敛于 $+\infty$ 的解？如我们数值解所显示的，有没有其他解收敛于直线 $x = -t$ ？

为了回答这些问题，我们需要推广上面关于解只能从上方穿过直线 $x = t$ ，以及只能从下方穿过直线 $x = -t$ 的概念。

称满足

$$\dot{x}_+(t) > f(t, x_+(t)), \quad t \in [t_0, T] \quad (1-61)$$

的可微函数 $x_+(t)$ 为我们方程的上解。类似地，称满足

$$\dot{x}_-(t) < f(t, x_-(t)), \quad t \in [t_0, T] \quad (1-62)$$

的可微函数 $x_-(t)$ 为方程的下解。

例如， $x_+(t) = t$ ，和 $x_-(t) = -t$ 是我们方程 $t \geq 0$ 时的上、下解。

引理 1.1 设 $x_+(t)$ ， $x_-(t)$ 分别是微分方程 $\dot{x} = f(t, x)$ 在 $[t_0, T]$ 上的上、下解。则对每一个解 $x(t)$ ，我们分别地有

$$x(t) < x_+(t), \quad t \in (t_0, T), \quad \text{当 } x(t_0) \leq x_+(t_0), \quad (1-63)$$

和

$$x_-(t) < x(t), \quad t \in (t_0, T), \quad \text{当 } x(t_0) \geq x_-(t_0). \quad (1-64)$$

证明 事实上，考虑 $\Delta = x_+(t) - x(t)$ 。则当 $\Delta(t) = 0$ 时有 $\Delta(t_0) \geq 0$ 和 $\dot{\Delta}(t) > 0$ 。因此 $\Delta(t)$ 只能从下面穿过 0。由于 $\Delta(t_0) \geq 0$ ，故对充分接近于 t_0 的 $t > t_0$ 有 $\Delta(t) > 0$ 。事实上，如果 $\Delta(t_0) > 0$ ，结论由连续性得证，否则，如果 $\Delta(t_0) = 0$ ，结论由 $\dot{\Delta}(t_0) > 0$ 得证。现在设 $t_1 > t_0$ 是满足 $\Delta(t_1) = 0$ 的第一个值。则对 $t \in (t_0, t_1)$ 有 $\Delta(t) > 0$ ，这与 $\dot{\Delta}(t_1) > 0$ 矛盾。

类似的结果对 $t < t_0$ 成立。详细留给读者（问题 1-28）。

现在我们已经能够回答我们的遗留问题了。由于我们已经成功地考虑了由 $f(t, x) = 0$ 给出的曲线，现在让我们考虑等倾线 $f(x, t) = \text{常数}$ 。

考虑 $x^2 - t^2 = -2$ ，对应的曲线是

$$y_+(t) = -\sqrt{t^2 - 2}, \quad t > \sqrt{2}. \quad (1-65)$$

容易看到，当 $t > 2\sqrt{2/3}$ 时，它是

$$\dot{y}_+(t) = -\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2}} > -2 = f(t, y_+(t)) \quad (1-66)$$

的上解. 因此只要解进入 $y_+(t)$ 和 $x_-(t)$ 之间, 它就必须停留在那里, 因此它收敛于直线 $x = -t$, 因为 $y_+(t)$ 收敛于它.

但是在区域 II 中的每一个解最终是否还在 $y_+(t)$ 和 $x_-(t)$ 之间? 回答是肯定的: 因为 $x(t)$ 在区域 II 中减少, 每一个解将最终在 $-y_+(t)$ 的下方. 此外, 从在 $-y_+(t)$ 下方和在 $y_+(t)$ 的上方的点 (t_0, x_0) 开始的解 $x(t)$, 只要它停留在 $-y_+(t)$ 和 $y_+(t)$ 之间就得满足 $\dot{x}(t) < -2$. 这个不等式积分得 $x(t) - x_0 < -2(t - t_0)$, 我们看到, 只要 $x(t)$ 停留在 $-y_+(t)$ 和 $y_+(t)$ 之间, 它就位于直线 $x_0 - 2(t - t_0)$ 的下方. 因此每一个位于区域 II 中的解在某个时间将收敛于直线 $x = -t$.

最后, 注意到关于 -2 没有什么特殊情况, 任何小于 -1 的值都没问题.

现在让我们转到另一个问题. 这时我们取等倾线 $x^2 - t^2 = 2$, 得到对应的下解

$$y_-(t) = \sqrt{2 + t^2}, \quad t > 0. \quad (1-67)$$

首先, 这看上去对我们没有多少帮助, 因为下解 $y_-(t)$ 在上解 $x_+(t)$ 的“上方”. 因此, 解能够离开 $y_-(t)$ 和 $x_+(t)$ 之间的区域但不能够再回来. 然而, 让我们考虑至少对某个有限时间 $t \in [0, T]$ 位于其内部的解. 下面我们将看到, 以 $(T, x_+(T))$ 和 $(T, y_-(T))$ 为初始条件的解在某点 $a(T)$ 和 $b(T)$ 分别与直线 $t=0$ 相交. 下面的图像显示这两个解在 $t=0.5$ 进入 $x_+(t)$ 和 $y_-(t)$ 之间的暗褐色区域:

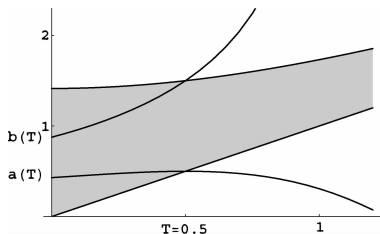


图 1-11

由于不同的解永不相交, (至少) 对 $t \in [0, T]$, 位于其中的两个解正是在 $t=0$ 开始的位于区间 $[a(T), b(T)]$ 上的解! 此外, 由此也得知当 T 增加时区间 $[a(T), b(T)]$ 将减小. 取 $T \rightarrow \infty$, 我们看到所有在 $t=0$ 时, 从区间 $[a(\infty), b(\infty)]$ (可能就一点) 内出发的解对所有 $t > 0$ 都位于其中. 进一步, 由于 $f(t, \cdot)$ 在区域 I 内递增, 由此可知两个解之间的距离

$$x_1(t) - x_0(t) = x_1(t_0) - x_0(t_0) + \int_{t_0}^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))) ds \quad (1-68)$$

必须增加. 如果存在两个这样的解, 那么它们之间的距离就要增加. 但这是不可能的, 因为 $x_+(t)$ 和 $y_-(t)$ 之间的距离减少. 故至多存在一个解 $x_0(t)$ 对所有 $t > 0$ (即 $a(\infty) = b(\infty)$) 它停留在 $x_+(t)$ 和 $y_-(t)$ 之间. 所有在 $x_0(t)$ 下方的解最终进入区域 II, 并沿着 $x = -t$ 收敛于 $-\infty$. 所有在 $x_0(t)$ 上方的解最终在 $y_-(t)$ 的上方并收敛于 $+\infty$. 剩下要证明这发生在有限时间内.

这并不奇怪, 因为 $x(t)^2$ 项应该控制住 $-t^2$ 项, 而我们已经知道 $\dot{x}(t)$ 的解发

散. 让我们尝试对它做得确切些: 首先对 $y_-(t)$ 上方的每一个解, 由

$$\ddot{x}(t) = x(t)^2 - t^2 > 2 \quad (1-69)$$

得知 $x(t) > x_0 + 2(t - t_0)$. 因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$x(t) > \frac{t}{\sqrt{1 - \varepsilon}}. \quad (1-70)$$

由此得知

$$\ddot{x}(t) = x(t)^2 - t^2 > x(t)^2 - (1 - \varepsilon)x(t)^2 = \varepsilon x(t)^2, \quad (1-71)$$

以及每一个解 $x(t)$ 是

$$\ddot{x}(t) = \varepsilon x(t)^2 \quad (1-72)$$

的对应解的上解. 但是已经知道最后一个方程的解在有限时间跑向 $+\infty$, 因此对我们的方程该结论同样也必须成立.

综上所述, 我们证明了

- 存在收敛于直线 $x = t$ 的唯一解 $x_0(t)$.
- 在 $x_0(t)$ 上方的所有解在有限时间内最终都收敛于 $+\infty$.
- 所有在 $x_0(t)$ 下方的解都收敛于直线 $x = -t$.

显然, 类似的考虑可应用于任何一阶方程 $\dot{x} = f(t, x)$, 通常我们可以得到解的十分完整的图像. 但是, 指出这一点是很重要的, 即我们所以成功的理由是我们的方程位于二维 $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ 内. 如果我们考虑高阶方程或者方程组, 我们需要更高的维数. 乍一看, 似乎我们不再能够画出其他什么东西, 但是存在另外更大的区别: 在 \mathbb{R}^2 上曲线将我们的空间分为两个区域: 一个在曲线的上方, 一个在曲线的下方. 从一个区域到另一个区域只有穿过曲线的一个方式. 在高于二维的空间这不再成立, 因此允许解有更加复杂得多的性态. 事实上, 在三维 (或者更高维) 方程中通常具有混沌性态, 这使得对解作简单的描述是不可能的!

问题 1.27 设 x 是方程 (1-58) 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1$ 的解. 求证 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}(t) = 0$ 和 $f(x_1) = 0$.

问题 1.28 证明初值问题 (1-58) 的论述.

问题 1.29 推广上、下解的概念到区间 (T, t_0) , 其中 $T < t_0$.

问题 1.30 讨论方程 $\dot{x} = x^2 - \frac{t^2}{1 + t^2}$.

- 作数值分析.
- 求证存在渐近趋于直线 $x = 1$ 的唯一解.
- 求证在这个解的下方的所有解趋于直线 $x = -1$.
- 求证在这个解的上方的所有解在有限时间跑向 ∞ .

问题 1.31 讨论方程 $\dot{x} = x^2 - t$.

1.6 一阶周期方程的定性分析

有些有兴趣的例子是周期情形, 其中 $f(t+1, x) = f(t, x)$ (不失一般性我们可考虑周期为 1). 因此, 我们可以考虑依赖于时间收获项的逻辑斯谛 (logistic) 增长模型

$$\dot{x}(t) = (1 - x(t))x(t) - h \cdot (1 - \sin(2\pi t)), \quad (1-73)$$

其中 $h \geq 0$ 是某个正常数. 事实上我们可以用任何非负周期函数 $g(t)$ 代替 $1 - \sin(2\pi t)$ 且下面的分析仍成立.

对应某个初始条件 $h = 0.2$ 的解如下.



图 1-12

看上去所有在某个值 x_1 上方开始的解收敛于从另外值 $x_2 > x_1$ 开始的周期解, 而在 x_1 下方开始的解发散到 $-\infty$.

基本思想是看任意初始值 x 经过周期 1 以后的命运. 更确切地说, 假设我们用 $\phi(t, x)$ 表示在时间 $t=0$ 从点 x 开始的解. 于是我们可以通过

$$P(x) = \phi(1, x) \quad (1-74)$$

引入庞加莱 (Poincaré) 映射. 由构造, 初始条件 x_0 对应于周期解, 当且仅当 x_0 是庞加莱 (Poincaré) 映射的不动点, 即 $P(x_0) = x_0$. 事实上, 由初值问题解的唯一性得知, 如果 $f(t+1, x) = f(t, x)$, 则 $\phi(t+1, x)$ 也满足 $\dot{x} = f(t, x)$. 故 $\phi(t+1, x_0) = \phi(t, x_0)$ 当且仅当等号在初始时间 $t=0$ 成立, 即 $\phi(1, x_0) = \phi(0, x_0) = x_0$.

我们现在开始尝试计算 $P(x)$ 的导数. 令

$$\theta(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x), \quad (1-75)$$

同时关于 x 求这个方程的微分 (我们将在定理 2.10 验证这一步)

$$\dot{\phi}(t, x) = (1 - \phi(t, x))\phi(t, x) - h \cdot (1 - \sin(2\pi t)). \quad (1-76)$$

于是我们得到

$$\dot{\theta}(t, x) = (1 - 2\phi(t, x))\theta(t, x). \quad (1-77)$$

假设 $\phi(t, x)$ 是已知的, 于是我们可以用问题 1.14 将解写为

$$\theta(t, x) = \exp\left(\int_0^t (1 - 2\phi(s, x)) ds\right). \quad (1-78)$$

令 $t=1$ 我们得到

$$P'(x) = \exp\left(1 - 2 \int_0^1 \phi(s, x) ds\right). \quad (1-79)$$

看上去这个公式对我们的帮助很小, 因为我们并不知道 $\phi(t, x)$, 但至少它告诉我们 $P'(x) > 0$, 这就是说 $P(x)$ 递增. 注意后面的事实也可由唯一性在 (t, x) 平面上的不同解不相交得到 (证明这个结论!).

此外, 再次微分最后这个表达式, 我们得到

$$P''(x) = -2 \left(\int_0^1 \theta(s, x) ds \right) P'(x) < 0. \quad (1-80)$$

因此, $P(x)$ 是凸的且与直线 x 至多有两个交点. 换句话说, 至多存在两个周期轨道. 注意, 到此为止我们不需要收获项的任何信息.

为看到所有情形都可能发生, 现在考虑关于参数 h 的依赖性. 对 h 的不同值数值计算庞加莱 (Poincaré) 映射的图像如下.

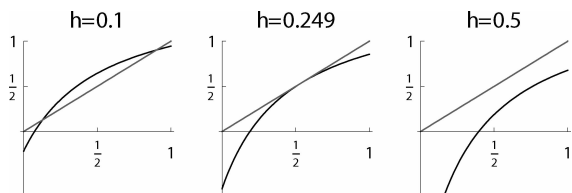


图 1-13

图像显示 $P(x)$ 是 h 的递增函数. 为了证明这一点, 如前令

$$\psi(t, x) = \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial h}, \quad (1-81)$$

并对 h 微分这个微分方程 (这一步再次由定理 2.10 验证) 得到

$$\dot{\psi}(t, x) = (1 - 2\phi(t, x))\psi(t, x) + (1 - \sin(2\pi t)). \quad (1-82)$$

由于 $\frac{\partial \phi}{\partial h}(0, x) = \frac{\partial x}{\partial h} = 0$, 因此由问题 1.21 得知

$$\psi(t, x) = - \int_0^t \exp\left(\int_0^r (1 - 2\phi(r, x)) dr\right) (1 - \sin(2\pi s)) ds < 0. \quad (1-83)$$

令 $t=1$ 得

$$\frac{\partial}{\partial h} P_h(x) < 0. \quad (1-84)$$

这里我们加入下标 h 是为了强调对 h 的依赖性. 此外, 对 $h=0$ 我们有

$$P_0(x) = \frac{ex}{1 + (e-1)x}, \quad (1-85)$$

并存在两个不动点 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 1$. 当 h 增加时这两个点彼此靠近并重合在某个临界值 h_c . 在这个值的上方没有周期轨道, 所有轨道都趋于 $-\infty$, 因为对所有 $x \in \mathbb{R}$

有 $P(x) < x$ (证明这个结论) .

为了完成我们的分析, 假设 $h < h_c$ 并用 $x_1 < x_2$ 记 $P(x)$ 的两个不动点. 用 $P^0(x) = x$ 和 $P(P^{n-1}(x))$ 定义 $P(x)$ 的迭代. 我们期望

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = \begin{cases} x_2, & x > x_1, \\ x_1, & x = x_1, \\ -\infty, & x < x_1. \end{cases} \quad (1-86)$$

例如, 设 $x \in (x_1, x_2)$. 由于 $P(x)$ 是凸的, 有 $x < P(x) < x_1$, 这说明 $P^n(x)$ 是严格单调递增序列. 设 $x_0 \in (x, x_1]$ 是它的极限. 则 $P(x_0) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1}(x) = x_0$, 这证明 x_0 是不动点, 即 $x_0 = x_1$. 另一个情形的证明类似 (问题 1.32) .

故对 $x < x_1$ 解发散到 $-\infty$, 而对 $x > x_1$ 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(n, x) - x_2| = 0, \quad (1-87)$$

由此得知 (证明它)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, x) - \phi(t, x_2)| = 0, \quad (1-88)$$

问题 1.31 假设 $P(x)$ 是有两个不动点 $x_1 < x_2$ 的连续凸函数, 证明 (1-86) .

第2章 初值问题

这一节我们的主要任务是证明常微分方程基本的存在唯一性结果. 证明的关键因素是压缩原理巴拿赫 (Banach) 不动点定理, 我们首先介绍它.

2.1 不动点定理

设 X 是一个实向量空间. X 上的范数是满足下面要求的映射 $\| \cdot \| : X \rightarrow [0, \infty)$:

- (1) $\|0\| = 0, \|x\| > 0$, 对 $x \in X \setminus \{0\}$.
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, 对 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $x \in X$.
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 对 $x, y \in X$ (三角不等式).

偶 $(X, \| \cdot \|)$ 称为赋范向量空间. 给定赋范向量空间 X , 在这个空间中我们就有收敛性和柯西 (Cauchy) 序列概念. 如果赋范向量空间中的每一个柯西 (Cauchy) 序列收敛, 则称它为是完备的. 完备的赋范向量空间称为巴拿赫 (Banach) 空间.

显然, \mathbb{R}^n (或 \mathbb{C}^n) 是具欧几里得 (Euclid) 范数

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \quad (2-1)$$

的巴拿赫 (Banach) 空间.

我们的主要兴趣将是下面的例子: 设 I 是紧区间, 考虑在这个区间上的连续函数 $C(I)$. 如果所有的运算是逐点定义, 它们就组成了向量空间. 此外, 如果我们定义

$$\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|, \quad (2-2)$$

$C(I)$ 就变成赋范空间. 我们将验证它满足上面的三个要求留给读者作为练习. 现在, 在这个空间中的收敛性是什么收敛? 函数序列 $x_n(t)$ 收敛于 x , 当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |x_n(t) - x(t)| = 0. \quad (2-3)$$

就是说, 用实分析的语言, x_n 一致收敛于 x . 现在我们仅考虑 x_n 是柯西 (Cauchy) 序列的情形. 于是对任何固定的 $t \in I$, $x_n(t)$ 显然是实数柯西 (Cauchy) 序列. 特别地, 由 \mathbb{R} 的完备性, 对每个 t 存在极限 $x(t)$. 因此得极限函数 $x(t)$. 此外, 在

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m > N_\varepsilon, \quad t \in I \quad (2-4)$$

中令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N_\varepsilon, \quad t \in I, \quad (2-5)$$

即 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$. 但是, 到现在为止我们并不知道 $x(t)$ 是否在向量空间 $C(I)$ 内, 即它是否连续. 幸运的是, 实分析中存在熟知的结果, 它告诉我们, 连续函数一致收敛的极限仍连续: 固定 $t \in I$ 和 $\varepsilon > 0$. 为了证明 x 连续, 我们需要找 δ , 使得当 $|t-s| < \delta$ 时有 $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$. 取 n 使得 $\|x_n - x\| < \varepsilon/3$ 以及 δ , 使得由 $|t-s| < \delta$ 得 $|x_n(t) - x_n(s)| < \varepsilon/3$. 于是由 $|t-s| < \delta$ 得

$$|x(t) - x(s)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(s)| + |x_n(s) - x(s)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

这是我们所要求的. 因此, $x(t) \in C(I)$, 从而每一个柯西 (Cauchy) 序列在 $C(I)$ 中收敛. 换句话说, $C(I)$ 是一个巴拿赫 (Banach) 空间.

你当然会问, 所有这些考虑对我们研究微分方程有什么帮助? 是的, 你将在下一节看到, 它允许我们以下面结果为基础, 对微分方程的基本存在唯一性定理给出一个容易且清晰的证明.

映射 $K: C \subseteq X \rightarrow C$ 的不动点是满足 $K(x) = x$ 的元素 $x \in C$. 此外, 如果存在压缩常数 $\theta \in [0, 1)$, 使得

$$\|K(x) - K(y)\| \leq \theta \|x - y\|, \quad x, y \in C, \quad (2-6)$$

则称 K 为压缩映射.

回忆一下, 记号 $K^n(x) = K(K^{n-1}(x))$, $K^0(x) = x$.

定理 2.1 (压缩原理) 设 C 是巴拿赫 (Banach) 空间的 (非空) 闭子集, $K: C \rightarrow C$ 是压缩映射, 则 K 有唯一不动点 $\bar{x} \in C$, 满足

$$\|K^n(x) - \bar{x}\| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} \|K(x) - x\|, \quad x \in C. \quad (2-7)$$

证明 如果 $x = K(x)$ 和 $\tilde{x} = K(\tilde{x})$, 则 $\|x - \tilde{x}\| = \|K(x) - K(\tilde{x})\| \leq \theta \|x - \tilde{x}\|$, 这显示至少可存在一个不动点.

考虑存在性, 固定 $x_0 \in C$ 并考虑序列 $x_n = K^n(x_0)$. 我们有

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad (2-8)$$

由三角不等式 (对 $n > m$) 得

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \sum_{j=m+1}^n \|x_j - x_{j-1}\| \leq \theta^m \sum_{j=0}^{n-m-1} \theta^j \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \quad (2-9)$$

因此, x_n 是巴拿赫 (Cauchy) 序列, 并趋于极限 \bar{x} . 此外,

$$\|K(\bar{x}) - \bar{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0, \quad (2-10)$$

这证明 \bar{x} 是不动点, 在式 (2-9) 中令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得到估计式 (2-7). \square

问题: 为什么 C 的闭性很重要?

问题 2.1 求证如果 I 是紧区间则空间 $C(I, \mathbb{R}^n)$ 与上确界范数 (2-2) 一起形

成一个巴拿赫 (Banach) 空间. 求证对 $I = [0, \infty)$ 和 $I = \mathbb{R}$ 结论也同样成立.

问题 2.2 由压缩原理推导求函数 $f(x)$ 零点的牛顿 (Newton) 法,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

利用

$$x_{n+1} = x_n - \theta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \theta > 0$$

代替它有什么优点和缺点?

2.2 基本的存在唯一性结果

现在我们利用上一节的准备来证明下面初值问题 (IVP)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2-11)$$

解的存在唯一性定理. 假设 $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, 其中 U 是 \mathbb{R}^{n+1} 的开子集, 以及 $(t_0, x_0) \in U$.

首先注意, 两端对 t 积分得知 (2-11) 等价于下面的积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2-12)$$

初看这似乎对我们没有多大帮助. 但是, 注意到至少对小的 t , $x_0(t) = x_0$ 是一个近似解. 将 $x_0(t)$ 代入我们的积分方程, 得到另一个近似解

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds. \quad (2-13)$$

迭代这个过程, 我们得到一个近似解序列

$$x_n(t) = K^n(x_0)(t), \quad K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2-14)$$

由此观察, 我们希望应用上一节的压缩原理到不动点方程 $x = K(x)$, 而这正是我们的积分方程 (2-12).

为记号简单起见, 我们令 $t_0 = 0$, 并仅考虑情形 $t \geq 0$, 以避免在下面的估计中出现过多的绝对值.

首先我们需要一个巴拿赫 (Banach) 空间. 一个明显的选择是取 $X = C(I, \mathbb{R}^n)$, 其中 $I = [0, T]$ 是某个包含 $t_0 = 0$ 的适当区间. 进一步, 需要闭子集 $C \subset X$ 使得 $K: C \rightarrow C$. 我们尝试用围绕 x_0 半径为 δ 的闭球, 其中 $\delta > 0$ 必须被确定.

选择 $V = [0, T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$, 其中 $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq \delta\}$. 只要 x 的图像位于 V 内, 即 $\{(t, x(t)) \mid t \in [0, T]\} \subset V$, 则

$$|K(x)(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(s, x(s))| ds \leq t \max_{(t,x) \in V} |f(t, x)| \quad (2-15)$$

(由 f 的连续性和 V 的紧性, 这里的最大值存在). 因此, 对 $t \leq T_0$, 其中

$$T_0 = \min\left(T, \frac{\delta}{M}\right), \quad M = \max_{(t,x) \in V} |f(t,x)|, \quad (2-16)$$

我们有 $T_0 M \leq \delta$, 从而 $K(x)$ 的图像仍在 V 内.

于是, 如果我们选取 $X = C([0, T_0], \mathbb{R}^n)$ 作为巴拿赫 (Banach) 空间, 其中范数 $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq T_0} |x(t)|$, 以及 $C = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq \delta\}$ 为我们的闭集, 那么 $K: C \rightarrow C$,

接下来只要证明 K 是压缩的.

为了证明这个, 我们需要估计

$$|K(x)(t) - K(y)(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds. \quad (2-17)$$

显然, 由于 f 连续, 我们知道, 只要 $|x(s) - y(s)|$ 很小, $|f(s, x(s)) - f(s, y(s))|$ 就很小. 但是这还不够对上面的积分进行估计. 为此, 我们需要下面更强的条件. 假设 f 对第二个变量是局部 Lipschitz 连续的, 对第一个变量一致, 即对每个紧集 $V \subset U$ 下面的数

$$L = \sup_{(t,x) \neq (t,y) \in V} \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x - y|} \quad (2-18)$$

(依赖于 V) 有限. 则只要 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的图像位于 V 内就有

$$\begin{aligned} \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds &\leq L \int_0^t |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq Lt \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)|. \end{aligned} \quad (2-19)$$

换句话说,

$$\|K(x) - K(y)\| \leq Lt_0 \|x - y\|, \quad x \in C. \quad (2-20)$$

此外, 选取 $T_0 < L^{-1}$, 我们看到 K 是压缩的, 于是解的存在唯一性由压缩原理得知:

定理 2.2 皮卡-林德勒夫 (Picard-Lindelof) 假设 $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, 其中 U 是 \mathbb{R}^{n+1} 的开子集, 以及 $(t_0, x_0) \in U$. 如果 f 对第二个变量是局部利普希茨 Lipschitz 连续的, 对第一个变量一致连续, 则存在 IVP (2-11) 的唯一局部解 $\bar{x}(t)$.

求解的过程称为皮卡 (Picard) 迭代. 遗憾的是, 在实际求解时这并不合适, 因为在每一步迭代时, 计算积分一般不大可能. 即使数值计算这个积分通常也要花太多时间. 但是如果 $f(t, x)$ 解析, n 次迭代 $x_n(t)$ 配上解 $\bar{x}(t)$ 在 t_0 附近直到 n 阶的泰勒 (Taylor) 展开就可用数值计算 (参看问题 4-4). 无论如何, 一个重要事实是: 初值问题存在唯一解.

在许多情况下, f 甚至是可微的. 特别地, 回忆由 $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ 得知 f 是局部 Lipschitz 连续的 (见下面的问题)

引理 2.3 假设 $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, 其中 U 是 \mathbb{R}^{n+1} 的开子集, 以及 $(t_0, x_0) \in U$. 则 IVP (2-11) 的局部解 \bar{x} 是 C^{k+1} 的.

证明 设 $k=1$. 则由上面的定理得 $\bar{x}(t) \in C^1$. 此外, 利用 $\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t)) \in$

C^1 我们得到 $\bar{x}(t) \in C^2$. 余下的由归纳法可证. □

问题 2.3 求证 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 是局部利普希茨 (Lipschitz) 连续的. 事实上, 只需证明

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{\varepsilon \in [0,1]} |f'(x + \varepsilon(y-x))| \|x - y\|.$$

将这个结果推广到 $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

问题 2.4 下面的函数在 0 附近是否是利普希茨 (Lipschitz) 连续的? 如果是, 请对某个包含 0 的区间求利普希茨 (Lipschitz) 常数.

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$(2) f(x) = |x|^{1/2}.$$

$$(3) f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

问题 2.5 应用皮卡 (Picard) 迭代求解一阶线性方程

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1.$$

问题 2.6 应用皮卡 (Picard) 迭代到一阶方程

$$\dot{x} = 2t - 2\sqrt{\max(0, x)}, \quad x(0) = 0.$$

迭代得到的序列收敛吗?

2.3 一些推广

在这一节我们推导皮卡-林德勒夫 (Picard-Lindelof) 定理的一些进一步的推广. 它们具有更多的技巧性, 第一次阅读时可以跳过它.

作为准备工作我们需要对压缩原理作稍微推广. 事实上, 看它的证明, 注意到我们可用任何另外的可和序列 θ_n 代替 θ^n (问题 2-9).

定理 2.4 (Weissinger) 设 C 是巴拿赫 (Banach) 空间 X 的一个 (非空) 闭子集. 假设 $K: C \rightarrow C$ 满足

$$\|K^n(x) - K^n(y)\| \leq \theta_n \|x - y\|, \quad x, y \in C, \quad (2-21)$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$. 则 K 有满足

$$\|K^n(x) - \bar{x}\| \leq \left(\sum_{j=n}^{\infty} \theta_j \right) \|K(x) - x\|, \quad x \in C \quad (2-22)$$

的唯一不动点 \bar{x} .

我们第一个目的是对存在性时间 T_0 给出几个具体数值. 利用 Weissinger 定理代替压缩原理, 我们可以避免 $T_0 < L^{-1}$ 这个限制:

定理 2.5 皮卡-林德勒夫 (Picard-Lindelof) 假设 $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, 其中 U 是 \mathbb{R}^{n+1} 的开子集, f 对第二个变量利普希茨 (Lipschitz) 连续. 选取 $(t_0, x_0) \in U$ 和 δ

> 0 , $T > t_0$, 使得 $[t_0, T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$. 令

$$M(t) = \int_{t_0}^t \sup_{x \in \overline{B_\delta(x_0)}} |f(s, x)| ds, \quad (2-23)$$

$$L(t) = \sup_{x \neq y \in \overline{B_\delta(x_0)}} \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|}. \quad (2-24)$$

注意, $M(t)$ 不减, 定义 T_0 为

$$T_0 = \sup\{T > t_0 \mid M(T) = \delta\}. \quad (2-25)$$

则 IVP (2-11) 的唯一局部解 $\bar{x}(t)$ 为

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x_0) \in C^1([t_0, T_0], \overline{B_\delta(x_0)}), \quad (2-26)$$

其中 $K^n(x_0)$ 由式 (2-14) 定义, 且满足估计

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T_0} |\bar{x}(t) - K^n(x_0)(t)| \leq \frac{\left(\int_{t_0}^{T_0} L(s) ds\right)^n}{n!} e^{\int_{t_0}^{T_0} L(s) ds} \int_{t_0}^{T_0} |f(s, x_0)| ds. \quad (2-27)$$

类似的结果对 $t < t_0$ 成立.

证明 为记号简单起见, 再次选取 $t_0 = 0$. 我们的任务是对选择的 $X = C([0, T_0])$ 和 $C = \overline{B_\delta(x_0)} \subset X$ 验证定理 2.4 的假设.

首先, 如果对 $t \in [0, T_0]$, 有 $x(t) \in C$, 则

$$|K(x)(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(s, x(s))| ds \leq M(t) \leq M(T_0) = \delta, \quad (2-28)$$

就是说, 对 $t \in [0, T_0]$ 有 $K(x)(t) \in C$. 特别地, 这解释了我们选择 T_0 的选择.

接下来我们希望

$$|K^n(x)(t) - K^n(y)(t)| \leq \frac{L_1(t)^n}{n!} \sup_{s \leq t} |x(s) - y(s)|, \quad (2-29)$$

其中 $L_1(t) = \int_0^t L(s) ds$. 这可由归纳法得到:

$$\begin{aligned} |K^{n+1}(x)(t) - K^{n+1}(y)(t)| &\leq \int_0^t |f(s, K^n(x)(s)) - f(s, K^n(y)(s))| ds \\ &\leq \int_0^t L(s) |K^n(x)(s) - K^n(y)(s)| ds \\ &\leq \int_0^t L(s) \frac{L_1(s)^n}{n!} \sup_{r \leq s} |x(r) - y(r)| ds \\ &\leq \sup_{r \leq t} |x(r) - y(r)| \int_0^t L_1'(s) \frac{L_1(s)^n}{n!} ds \\ &= \frac{L_1(s)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|r| \leq t} |x(r) - y(r)|. \end{aligned} \quad (2-30)$$

因此, K 满足定理 2.4 的假设, 最后我们得到

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} |\bar{x}(t) - K^n(x_0)(t)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{L_1(T_0)^j}{j!} \right) \int_0^{T_0} |f(s, x_0)| ds. \quad (2-31)$$

□

如果 $f(t, x)$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有定义, 我们就可以求得大范围利普希茨 (Lip-schitz) 常数, 于是关于解的存在区间可以有更多的结论:

推论 2.6 假设 $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \subset U$, 以及

$$\int_{t_0}^T L(t) dt < \infty, \quad L(t) = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|}, \quad (2-32)$$

则 \bar{x} 对所有 $t \in [t_0, T]$ 有定义.

特别地, 如果 $U = \mathbb{R}^{n+1}$, 且对一切 $T > 0$ 有 $\int_{-T}^T L(t) dt < \infty$, 则 \bar{x} 对一切 $t \in \mathbb{R}$ 有定义.

证明 在这种情形下, 我们可简单地选取闭集 C 为整个巴拿赫 (Banach) 空间 $X = C([0, T])$ (即 $\delta = \infty$), 证明如同上一个定理, 其中 $T_0 = T$. □

注意, 这个推论可以应用到别的场合, 例如 $f(t, x) = A(t)x + b(t)$, 其中 $A(t)$ 是矩阵, $b(t)$ 是向量, 它们有连续元素.

最后, 得提醒大家, 定理 2.2 中 f 连续的要求事实上已经多于它证明的需要. 事实上, 我们所有需要的要求是 f 可测, 使得 $M(t)$ 有限且 $L(t)$ 局部可积 (即对任何紧区间 I 有 $\int_I L(t) dt < \infty$).

但是, 这时积分方程的解仅为绝对连续, 并且可能不是连续可微. 特别地, 当从积分方程回到微分方程时, 微分必须理解在广义意义下. 我们不想在这里进一步讨论, 只给出一个例子. 考虑

$$\dot{x} = \operatorname{sgn}(t)x, \quad x(0) = 1. \quad (2-33)$$

则 $x(t) = \exp(|t|)$ 可考虑认为是解, 即使它在 $t=0$ 不可微.

问题 2.7 考虑初值问题 $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. 分别按照定理 2.2 和定理 2.5, 作为 x_0 的函数 T_0 的最大值是什么? 跟你得到的明显解, 这个最大值是什么? (提示: 计算作为 δ 函数的 T_0 , 并找最佳的 δ).

问题 2.8 证明定理 2.4. 此外, 假设 $K: C \rightarrow C$, 以及 K^n 是压缩. 求证 K^n 的不动点也是 K 的不动点 (提示: 应用唯一性). 因此定理 2.4 (除了估计) 也可考虑为定理 2.1 的特殊情形, 因为由定理的假设得知对充分大的 n , K^n 是压缩的.

2.4 关于初始条件的依赖性

通常, 在应用中有些数据仅仅近似地知道. 如果问题是适定的, 我们期望数据的微小改变使得解也微小改变. 这将在我们的下一个定理中证明. 作为准备我们需

要格朗活尔 (Gronwall) 不等式.

引理 2.7 (广义格朗活尔 (Gronwall) 不等式) 假设 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad (2-34)$$

其中 $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ 且 $\beta(t) \geq 0$. 则

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_0^s \beta(r)dr\right)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2-35)$$

此外, 如果, 另外对 $s \leq t$ 有 $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, 则

$$\psi(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_0^t \beta(s)ds\right), \quad t \in [0, T]. \quad (2-36)$$

证明 记 $\phi(t) = \exp\left(-\int_0^t \beta(s)ds\right)$. 于是, 由我们的假设 (2-34), 计算得

$$\frac{d}{dt}\phi(t) \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds = \beta(t)\phi(t) \left(\psi(t) - \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds\right) \leq \alpha(t)\beta(t)\phi(t). \quad (2-37)$$

关于 t 积分这个不等式, 并将所得结果除以 $\phi(t)$ 得

$$\int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \leq \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \frac{\phi(s)}{\phi(t)}ds. \quad (2-38)$$

两端加 $\alpha(t)$ 并再次用 (2-34), 就完成第一个结论的证明. 第二个留作练习 (问题 2-9). \square

我们也将应用下面的简单结论 (问题 2.11). 如果对给定的常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ 以及 $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) \leq \alpha + \int_0^t (\beta\psi(s) + \gamma)ds, \quad t \in [0, T], \quad (2-39)$$

则

$$\psi(t) \leq \alpha \exp(\beta t) + \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1), \quad t \in [0, T]. \quad (2-40)$$

现在我们可以证明我们的 IVP 是适定的.

定理 2.8 假设 $f, g \in C(U, \mathbb{R}^n)$, 以及 f 是利普希茨 (Lipschitz) 连续的, 利普希茨 (Lipschitz) 常数为 L . 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是 IVP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

和

$$\dot{y} = g(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2-41)$$

的解, 则

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1), \quad (2-42)$$

其中

$$M = \sup_{(t,x) \in U} |f(t,x) - g(t,x)|. \quad (2-43)$$

证明 不妨设 $t_0 = 0$. 于是我们有

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_0^t |f(s,x(s)) - g(s,x(s))| ds. \quad (2-44)$$

为了估计积分, 我们有

$$\begin{aligned} & |f(s,x(s)) - g(s,x(s))| \\ & \leq |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| + |f(s,y(s)) - g(s,y(s))| \\ & \leq L|x(s) - y(s)| + M. \end{aligned} \quad (2-45)$$

由此, 从式 (2-40) 得我们的论断. \square

特别地, 为了强调解关于初始条件的依赖性, 我们用

$$\phi(t, x_0) \quad (2-46)$$

记 IVP (2-11) 的解. 于是, 在特殊情形 $f = g$, 由我们的定理得

$$|\phi(t, x_0) - \phi(t, x_1)| \leq |x_0 - x_1| e^{L|t-t_0|}, \quad (2-47)$$

这显示 ϕ 连续依赖于初始条件. 当然这个上界随 t 指数增大, 但是, 对一维线性方程 $\dot{x} = x$, 这显示一般不可能再有更好的估计.

此外, 我们甚至有

定理 2.9 假设 $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ 对第二个变量是局部利普希茨 (Lipschitz) 连续的. 围绕每一点 $(t_0, x_0) \in U$, 我们可以求得紧集 $I \times B \subset U$, 使得 $\phi(t, x) \in C(I \times B, \mathbb{R}^n)$. 此外, $\phi(\cdot, x)$ 是利普希茨 (Lipschitz) 连续的,

$$|\phi(t, x) - \phi(t, y)| \leq |x - y| e^{L|t-t_0|} + |s - t| M, \quad (2-48)$$

其中

$$L = \sup_{(t,x) \neq (t,y) \in I \times B} \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x - y|}, \quad M = \max_{(t,x) \in I \times B} |f(t,x)|. \quad (2-49)$$

证明 利用与定理 2.2 证明中相同的记号, 令 $x_1 \in B = \overline{B_{\delta/2}(x_0)}$ 并令 $\delta_1 = \delta/2$, $V_1 = [0, T] \times \overline{B_{\delta_1}(x_1)} \subset V$. 则对 $0 \leq t \leq T_1 = T_0/2$, $\phi(t, x_1)$ 存在. 对 $t \leq 0$ 重复这个步骤显示, 存在闭集 $I \times B$, 使得对一切 $(t, x) \in I \times B$, $\phi(t, x)$ 存在. 为了得到定理的估计, 注意

$$\begin{aligned} |\phi(t, x) - \phi(s, y)| & \leq |\phi(t, x) - \phi(t, y)| + |\phi(t, y) - \phi(s, y)| \\ & \leq |x - y| e^{L|t-t_0|} + \left| \int_s^t f(r, \phi(r, y)) dr \right|, \end{aligned} \quad (2-50)$$

其中对第一项我们已经用了 (2-47). \square

但是, 在许多情形下这还不够, 我们还需要初始条件可微.

首先, 假设 $\phi(t, x)$ 关于 x 可微. 于是微分 (2-11), 它的导数

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) \quad (2-51)$$

必须满足第一变分方程

$$\dot{y} = A(t, x)y, \quad A(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t, x)), \quad (2-52)$$

它是一个线性方程. 对应的积分方程是

$$y(t) = I + \int_{t_0}^t A(s, x)y(s) ds, \quad (2-53)$$

这里我们用了 $\phi(t_0, x) = x$, 故 $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t_0, x) = I$. 如前, 利用类似的不动点技巧, 可以证明第一变分方程有解, 事实上它是 $\phi(t, x)$ 关于 x 的导数.

定理 2.10 假设 $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. 围绕每一点 $(t_0, x_0) \in U$ 可找到开集 $I \times B \subseteq U$, 使得 $\phi(t, x) \in C^k(I \times B, \mathbb{R}^n)$.

证明 使得 $\phi(t, x)$ 连续的集合 $I \times B \subseteq U$ 的存在性由上一节的定理已经得到.

将 t 加入到因变量, 因此不妨设我们的方程是自治系统, 且 $t_0 = 0$. 我们从 $k = 1$ 开始证明. 只需证明 $\phi(t, x)$ 在某点 $x_1 \in B$ 可微, 为记号方便, 设 $x_1 = 0$. 取 $I = (-T, T)$, 以及围绕 x_0 的某开球 B , 使得 $I \times B$ 的闭包仍位于 U 内.

记 $\phi(t) = \phi(t, x_1)$, $A(t) = A(t, x_1)$, 并以 $\psi(t)$ 记第一变分方程 $\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t)$ 对应于初始条件 $\psi(t_0) = I$ 的解. 令

$$\theta(t, x) = \frac{\phi(t, x) - \phi(t) - \psi(t)x}{|x|}, \quad (2-54)$$

于是如果我们能够证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(t, x) = 0$, 则 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 在 $x_1 = 0$ 存在 (且等于 ψ).

由我们假设 $f \in C^1$, 得

$$f(y) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x)(y - x) + \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + t(y - x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right) dt \right) (y - x), \quad (2-55)$$

因此

$$f(y) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)(y - x) + |y - x|R(y, x), \quad (2-56)$$

其中

$$|R(y, x)| \leq \max_{t \in [0, 1]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x + t(y - x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right\|. \quad (2-57)$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的范数 (参考 3.1 节). 由偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $x_1 = 0$ 的邻域内的一致连续性得知, 在 0 的某邻域内, $\lim_{y \rightarrow x} |R(y, x)| = 0$ 关于 x 一致成立.

利用 (2-56), 我们看到

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t, x) &= \frac{1}{|x|} (f(t, \phi(t, x)) - f(t, \phi(t)) - A(t)\psi(t)x) \\ &= A(t)\theta(t, x) + \frac{|\phi(t, x) - \phi(t)|}{|x|} R(\phi(t, x), \phi(t)). \end{aligned} \quad (2-58)$$

现在积分并取绝对值（回忆 (2-47)）得到

$$|\theta(t, x)| \leq \tilde{R}(x) + \int_0^t \|A(s)\| \theta(s, x) ds, \quad (2-59)$$

其中

$$\tilde{R}(x) = e^{LT} \int_0^T |R(\phi(s, x), \phi(s))| ds. \quad (2-60)$$

于是由格朗沃尔（Gronwall）不等式得知， $|\theta(t, x)| \leq \tilde{R}(x) \exp\left(\int_0^t \|A(s)\| ds\right)$ 。由于在 0 的某邻域内关于 x 一致地有 $\lim_{y \rightarrow x} |R(y, x)| = 0$ ，因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(t, x) = 0$ 。此外，作为第一变分方程的解， $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)$ 是 C^0 的。这是 $k=1$ 的情形，因为所有的（包括关于 t 的）偏导数都连续。

对 $k \geq 1$ 的一般情形我们用归纳法：假设结论对 k 成立，并令 $f \in C^{k+1}$ 。则 $\phi(t, x) \in C^1$ 且偏导数 $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)$ 是第一变分方程的解。但是 $A(t, x) \in C^k$ ，因此 $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) \in C^k$ ，与引理 2.3 一起可知 $\phi(t, x) \in C^{k+1}$ 。□

事实上，我们也可以处理关于参数的依赖性。假设 f 依赖于某些参数 $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^p$ ，并考虑 IVP

$$\dot{x}(t) = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2-61)$$

它的对应解为

$$\phi(t, x, \lambda). \quad (2-62)$$

定理 2.11 假设 $f \in C^k(U \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ ， $x_0 \in C^k(\Lambda, V)$ ， $k \geq 1$ 。围绕每一点 $(t_0, x_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda$ ，我们可以求得开子集 $I_0 \times V_0 \times \Lambda_0 \subseteq U \times \Lambda$ ，使得 $\phi(t, x, \lambda) \in C^k(I_0 \times V_0 \times \Lambda_0, \mathbb{R}^n)$ 。

证明 这可将参数 λ 按 $\dot{\lambda} = 0$ 加入到因变量，再由上面的结果得到。详情留给读者。□

问题 2.9 求证 (2-36)。

问题 2.10 求证 (2-40)。（提示：引入变换 $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) + \frac{\gamma}{\beta}$ 。）

问题 2.11 求使得 (2-42) 中的不等式变成等式的函数 $f(t, x) = f(x)$ 和 $g(t, x) = g(x)$ 。

问题 2.12 假设 $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ 满足 $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t) |x - y|$ 。如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是方程 (2-11) 的解，则

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{\int_{t_0}^t L(s) ds}.$$

问题 2.13 求证在一维情形，我们有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) = \exp\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \phi(s, x)) ds\right).$$

2.5 解的可延拓性

我们已经看到, 即使微分方程对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义, 解还可能对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 并不存在. 这就产生使得 IVP (2-11) 的解有定义的最大区间问题.

假设 IVP (2-11) 的解局部存在且唯一 (例如 f 是利普希茨 (Lipschitz) 的). 设 ϕ_1, ϕ_2 分别是 IVP (2-11) 定义在开区间 I_1, I_2 内的两个解. 令 $I = I_1 \cap I_2 = (T_-, T_+)$, 以及设 (t_-, t_+) 是使得在其上两个解重合的最大开区间. 我们希望 $(t_-, t_+) = (T_-, T_+)$. 事实上, 如果 $t_+ < T_+$, 由连续性两个解在 t_+ 重合. 接下来, 考虑具有初始条件 $x(t_+) = \phi_1(t_+) = \phi_2(t_+)$ 的 IVP, 由定理 2.2, 在 t_+ 的邻域内这两个解重合. 这与 t_+ 的最大性矛盾, 因此 $t_+ = T_+$. 类似地, $t_- = T_-$.

此外, 我们得到定义在 $I_1 \cup I_2$ 上的解

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t), & t \in I_1, \\ \phi_2(t), & t \in I_2. \end{cases} \quad (2-63)$$

事实上, 这甚至可以推广到任意多个解. 按照这个方法我们得到定义在某个最大区间上的 (唯一) 解.

定理 2.12 假设 IVP (2-11) 有唯一局部解 (例如定理 2.5 的条件满足). 则存在定义在某个最大区间 $I_{(t_0, x_0)} = (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0))$ 上的唯一最大解.

注意: 如果我们去掉 f 是利普希茨 (Lipschitz) 的要求, 我们仍有解的存在性 (见下面定理 2.18), 但是我们已经知道这将失去唯一性. 即使没有唯一性, IVP (2-11) 的两个给定解仍可以在 t_0 粘合在一起 (如果有必要) 而得到定义在 $I_1 \cup I_2$ 上的解. 进一步, 佐恩 (Zorn) 引理[⊙] 保证在这一情形下最大解的存在性.

现在我们考虑, 从给定解如何能够告诉我们它的延拓是否存在.

引理 2.13 设 $\phi(t)$ 是方程 (2-11) 定义在区间 (t_-, t_+) 上的解. 则对某个 $\varepsilon > 0$ 存在延拓区间 $(t_-, t_+ + \varepsilon)$, 当且仅当存在序列 $t_n \in (t_+, y) \in U$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, \phi(t_n)) = (t_+, y) \in U. \quad (2-64)$$

对 t_- 类似.

证明 显然, 如果存在延拓, 则极限 (2-64) 对任何序列 $t_n \rightarrow t_+$ 成立. 反之, 存在满足 (2-64) 的序列. 在这个情形我们首先证明

$$\lim_{t \rightarrow t_+^-} \phi(t) = y. \quad (2-65)$$

直观上这是显然的, 因为否则当 t 趋于 t_+ 时解要越来越快振动. 因此它的导数得增长, 但这是不可能的, 因为 $f(t, x)$ 在 y 附近有界. 更确切地说, 由于 U 是开的, 故

⊙ Zorn 引理: 在任何一个非空偏序集中, 若每个链 (即全序的子集) 都有上界, 则此偏序集至少有一个最大元素. 佐恩 (Zorn) 引理与良序定理以及选择公理彼此等价. 译者注.

存在某个 $\delta > 0$ 使得 $V = [t_+ - \delta, t_+] \times \overline{B_\delta(y)} \subset U$ 以及 $M = \max_{(t,x) \in V} |f(t,x)| < \infty$. 此外, 在取子序列以后我们可以假设 $t_n \in (t_+ - \delta, t_+)$ 和 $t_n < t_{n+1}$. 如果式 (2-65) 不成立, 我们可求得序列 $\tau_n \rightarrow t_+$ 使得 $|\phi(\tau_n) - y| \geq \gamma > 0$. 不失一般性可选取 $\gamma < \delta$ 和 $\tau_n \geq t_n$. 此外, 由中值定理我们甚至可以要求对 $t \in [t_n, \tau_n]$ 有 $|\phi(\tau_n) - y| = \gamma$ 以及 $|\phi(t) - y| < \delta$. 但是, 这样一来, 我们有

$$\begin{aligned} 0 < \gamma &= |\phi(\tau_n) - y| \leq |\phi(\tau_n) - \phi(t_n)| + |\phi(t_n) - y| \\ &\leq \int_{t_n}^{\tau_n} |f(s, \phi(s))| ds + |\phi(t_n) - y| \leq M|\tau_n - t_n| + \end{aligned}$$

$|\phi(t_n) - y|$,

当 $n \rightarrow \infty$ 时上式右端收敛于 0. 矛盾, 故式 (2-65) 成立.

现在取定义在区间 $(t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon)$ 上的 IVP 满足 $x(t_+) = y$ 的解 $\tilde{\phi}(t)$. 如前, 我们可以将 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 在 t_+ 粘合而得到在 $(t_-, t_+ + \varepsilon)$ 上的函数. 由构造可知这个函数连续, 且它的左右导数都等于 $f(t_+, y)$. 因此它在 $t = t_+$ 可微, 从而解定义在 $(t_-, t_+ + \varepsilon)$ 内. \square

我们最后一个任务是证明当 $f(t,x)$ 至多关于 x 线性地增长时, 解对所有 $t \in \mathbb{R}$ 存在. 但是首先我们需要一个不需要知道解的全部知识的更好准则.

引理 2.14 设 $\phi(t)$ 是方程 (2-11) 定义在 (t_-, t_+) 上的解. 假设存在使得对一切 $t \in [t_0, t_+)$ 有 $\phi(t) \in C$ 的紧集 $[t_0, t_+] \times C \subset U$, 则对某个 $\varepsilon > 0$ 存在延拓区间 $(t_-, t_+ + \varepsilon)$.

特别地, 如果对每一个 $t_+ > t_0$ 存在这样的紧集 (C 可能依赖于 t_+), 则解对一切 $t > t_0$ 存在.

对 t_- 类似.

证明 设 $t_n \rightarrow t_+$. 由紧性 $\phi(t_n)$ 有收敛子序列, 从而由前面的引理可得论断. \square

这个结果的逻辑否定也是有趣的.

推论 2.15 设 $I_{(t_0, x_0)} = (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0))$ 是从 $x(t_0) = x_0$ 开始的解的最大存在区间. 如果 $T_+ = T_+(t_0, x_0) < \infty$, 则当 t 趋于 T_+ 时解必须最终离开使得 $[t_0, T_+] \times C \subset U$ 的每一个紧集 C . 特别地, 如果 $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, 则当 t 趋于 T_+ 时解必须趋于无穷.

现在我们证明我们预期的结果.

定理 2.16 假设 $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, 且对每一个 $T > 0$, 存在常数 $M(T), L(T)$ 使得

$$|f(t,x)| \leq M(T) + L(T)|x|, \quad (t,x) \in [-T, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (2-66)$$

则 IVP (2-11) 的所有解对一切 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义.

证明 利用上面 f 的估计, 我们有 (不失一般性设 $t_0 = 0$)

$$|\phi(t)| \leq |x_0| + \int_0^t (M + L|\phi(s)|) ds, \quad t \in [0, T] \cap I. \quad (2-67)$$

令 $\psi(t) = \frac{M}{L} + |\phi(t)|$ 并应用格朗沃尔 (Gronwall) 不等式 (引理 2.7) 得

$$|\phi(t)| \leq |x_0| e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1). \quad (2-68)$$

因此 ϕ 位于紧球内, 由上面的引理得知定理结论成立. \square

再次注意, 只需假设

$$|f(t, x)| \leq M(t) + L(t)|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2-69)$$

其中 $M(t), L(t)$ 局部可积.

问题 2.14 求证如果定理 2.16 中的估计用

$$|f(t, x)| \leq M(T) + L(T)|x|^\alpha, \quad \text{其中 } \alpha > 1$$

代替, 则定理 2.16 (一般) 不成立.

问题 2.15 考虑 \mathbb{R}^n 中的一阶自治系统, 其中 $f(x)$ 是利普希茨 (Lipschitz) 的. 求证 $x(t)$ 是解, 当且仅当 $x(t - t_0)$ 是解. 利用这个性质和解的唯一性, 证明两个最大解 $x_j(t) (j=1, 2)$ 的像 $\gamma_j = \{x_j(t) | t \in I_j\} \subset \mathbb{R}^n$ 或者重合或者不相交.

问题 2.16 考虑 \mathbb{R}^1 中的一阶自治方程, 其中 $f(x)$ 是利普希茨 (Lipschitz) 的. 假设 $f(0) = f(1) = 0$. 求证从 $[0, 1]$ 中出发的解不能离开这个区间. 问对从 $[0, 1]$ 中开始的解定义 (T_-, T_+) 的最大区间是什么?

当 $t \rightarrow T_\pm$ 时这样的解有极限吗?

问题 2.17 考虑 \mathbb{R}^1 中的一阶方程, 其中 $f(t, x)$ 定义在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上. 假设对 $|x| > R$ 有 $xf(t, x) < 0$. 求证对一切 $t > 0$ 所有解都存在.

2.6 欧拉 (Euler) 方法和佩亚诺 (Peano) 定理

在这一节我们要证明 $f(t, x)$ 的连续性对保证初值问题 (2-11) 至少一个解的存在性来说已经足够了.

如果 $\phi(t)$ 是解, 则由泰勒 (Taylor) 定理我们有

$$\phi(t_0 + h) = x_0 + \dot{\phi}(t_0)h + o(h) = x_0 + f(t_0, x_0)h + o(h). \quad (2-70)$$

这建议我们去掉误差项, 再利用迭代定义近似解. 就是说, 令

$$x_h(t_{n+1}) = x_h(t_n) + f(t_n, x_h(t_n))h, \quad t_n = t_0 + nh, \quad (2-71)$$

并在中间利用内插. 这个过程就是熟知的欧拉 (Euler) 方法.

当 $h \rightarrow 0^+$ 时我们希望 $x_h(t)$ 收敛于解. 但应该如何证明它呢? 好, 关键由于 f 连续, 它在每一个紧区间上有界, 上界为常数. 因此 $x_h(t)$ 的导数有界, 上界为相同常数. 由于这个常数与 h 无关, 函数 $x_h(t)$ 构成等度连续函数族, 由 Arzela-Ascoli 定理这个函数族可通过子序列一致收敛.

定理 2.17 (Arzela-Ascoli) 假设函数序列 $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ 在紧区间上是 (一致) 等度连续, 即对每一个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ (与 n 无关) 使得

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon \quad \text{若 } |x - y| < \delta. \quad (2-72)$$

如果序列 f_n 有界, 则存在一致收敛的子序列.

证明 设 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是我们区间的稠密集 (例如这个集合中的所有有理数). 由于 $f_n(x_1)$ 有界, 可以选取子序列 $f_n^{(1)}(x)$ 使得 $f_n^{(1)}(x_1)$ 收敛布尔查诺—魏尔斯特拉斯 (Bolzano-Weierstrass 定理). 类似地, 我们可从 $f_n^{(1)}(x)$ 选取 $f_n^{(2)}(x)$, 它在 x_2 收敛 (因此也在 x_1 收敛, 因为它是 $f_n^{(1)}(x)$ 的子序列). 由归纳法我们得到在 x_1, \dots, x_j 收敛的序列 $f_n^{(j)}(x)$. 因此对所有 $x = x_j$ 对角线序列 $\check{f}_n = f_n^{(n)}(x)$ 收敛 (为什么?). 我们将证明它对一切 x 一致收敛.

固定 $\varepsilon > 0$ 选择 δ 使得对 $|x - y| < \delta$ 有 $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\delta}{3}$. 球 $B_\delta(x_j)$ 覆盖了我们的区间, 并且由于紧性甚至是有限覆盖, 例如 $1 \leq j \leq p$ 就足够了. 进一步, 选取 N_ε 使得对 $n, m \geq N_\varepsilon$ 和 $1 \leq j \leq p$ 有 $|\check{f}_m(x_j) - \check{f}_n(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

现在选定 x 并对某个 j , 注意到 $x \in B_\delta(x_j)$. 于是对 $n, m \geq N_\varepsilon$ 有

$$|\check{f}_m(x) - \check{f}_n(x)| \leq |\check{f}_m(x) - \check{f}_m(x_j)| + |\check{f}_m(x_j) - \check{f}_n(x_j)| + |\check{f}_n(x_j) - \check{f}_n(x)| \leq \varepsilon, \quad (2-73)$$

这证明 \check{f}_n 是关于最大值范数的柯西 (Cauchy) 序列. □

更确切地说, 选取 $\delta, T > 0$ 使得 $V = [t_0, t_0 + T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$, 并令

$$M = \max_{(t,x) \in V} |f(t,x)|. \quad (2-74)$$

于是对 $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ 有 $x_h(t) \in B_\delta(x_0)$, 其中 $T_0 = \min\left\{T, \frac{\delta}{M}\right\}$, 并且

$$|x_h(t) - x_h(s)| \leq M|t - s|. \quad (2-75)$$

因此, 族 $x_h(t)$ 的任何子序列等度连续, 并存在一致收敛的子序列 $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$. 下面我们证明极限 $\phi(t)$ 是初值问题 (2-11) 的解. 我们将用验证对应的积分方程 (2-12) 成立来证明它. 由于 f 在 V 上一致连续, 可以求得 $h \rightarrow 0$ 时的序列 $\Delta(h) \rightarrow 0$, 使得

$$|f(s,y) - f(t,x)| \leq \Delta(h) \quad \text{对 } |y - x| \leq Mh, \quad |s - t| \leq h. \quad (2-76)$$

为了能够对 $x_h(t)$ 进行对 (2-12) 左右两端之间的差作估计, 我们选择 n 使得 $t \leq t_n$, 并写

$$x_h(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi(s) f(t_j, x_h(t_j)) ds, \quad (2-77)$$

其中对 $s \in [t_0, t]$, 有 $\chi(s) = 1$, 对其他 s , 有 $\chi(s) = 0$. 于是

$$\begin{aligned}
& \left| x_h(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_h(s)) ds \right| \\
& \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi(s) |f(t_j, x_h(t_j)) - f(s, x_h(s))| ds \\
& \leq \delta(h) \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi(s) ds = |t - t_0| \Delta(h),
\end{aligned} \tag{2-78}$$

由此得知, ϕ 事实上是解:

$$\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \phi_n(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds, \tag{2-79}$$

这是因为由一致收敛性, 极限与积分的次序可以交换.

由此, 我们证明了佩亚诺 (Peano) 定理.

定理 2.18 (佩亚诺 (Peano)) 假设 f 在 $V = [t_0, t_0 + T] \times B_\delta(x_0)$ 上连续, 并以 M 为它的最大值. 则初值问题 (2-11) 对 $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ 至少存在一个解, 其中

$T_0 = \min \left\{ T, \frac{\delta}{M} \right\}$. 类似的结果对区间 $[t_0 - T, t_0]$ 成立.

最后, 我们注意欧拉 (Euler) 算法对近似解的数值计算是合适的, 因为它只要求在某些点计算 f . 另一方面, 如何求收敛的子序列是不明显的, 为此, 我们要证明, 如果 f 是利普希茨 (Lipschitz) 的, 则 $x_h(t)$ 一致收敛. 由式 (2-29), 其中 $x(t) = x_h(t)$ 和 $y(t) = K(x_h)(t)$, 利用与定理 2.2 证明中相同的记号得

$$\begin{aligned}
\|x_h - K^n(x_h)\| & \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|K^j(x_h) - K^{j+1}(x_h)\| \\
& \leq \|x_h - K(x_h)\| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(LT_0)^j}{j!}.
\end{aligned} \tag{2-80}$$

取 $n \rightarrow \infty$, 最后我们得到

$$\|x_h - \phi\| \leq T_0 e^{LT_0} \Delta(h), \quad t \in [t_0, t_0 + T_0], \tag{2-81}$$

因为对 $t = t_0 + T_0$, 由上面的估计 (2-78) 得

$$\|x_h - K(x_h)\| \leq T_0 \Delta(h). \tag{2-82}$$

注意, 如果我们能够求得相同的利普希茨 (Lipschitz) 常数 L_0 使得 $|f(t, x) - f(s, x)| \leq L_0 |t - s|$, 则我们可以选取 $\Delta(h) = (L_0 + LM)h$.

因此, 对计算的解加上误差估计, 我们有简单的数值方法. 但是, 在实际计算中通常用某些启发式的误差估计, 例如, 用两个步距 h 和 $\frac{h}{2}$ 对每一步进行估计. 如果两个结果之间相差太大, 步距就要减小, 最后一步重复.

当然, 欧拉 (Euler) 算法现在看来不是最有效的方法. 通常在泰勒 (Taylor) 展开中取更多的项并用它们的差商近似所有的微分. 所得算法收敛将会快一点, 但在每一步也将包含更多的计算. 通常一个好的折衷方案是将 $\phi(t_0 + h)$ 近似到 h 的

四阶. 令 $t_n = t_0 + hn$ 和 $x_n = x_h(t_n)$ 得算法

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{8}(k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}), \quad (2-83)$$

其中

$$\begin{aligned} k_{1,n} &= f(t_n, x_n), & k_{2,n} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,n}}{2}\right), \\ k_{3,n} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,n}}{2}\right), & k_{4,n} &= f(t_{n+1}, x_n + k_{3,n}), \end{aligned} \quad (2-84)$$

称此为**龙格-库塔 (Runge-Kutta) 算法**. 想了解更好的方法可参阅常微分方程数值方法的文献.

问题 2.18 Heun 方法 (或改进的欧拉法) 这个方法是

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, y_n)), \quad y_n = x_n + f(t_n, x_n)h.$$

求证利用这个方法, 经过一步的误差是 $O(h^3)$ (只要 $f \in C^2$):

$$\phi(t_0 + h) = x_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, x_0) + f(t_1, y_0)) + O(h^3).$$

注意这不是具有这个阶的误差的唯一的方案, 因为

$$\phi(t_0 + h) = x_0 + \frac{h}{2}(f(t_1, x_0) + f(t_0, y_0)) + O(h^3)$$

也是.

问题 2.19 计算初值问题 $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$ 的解, 利用欧拉 (Euler) 算法和龙格-库塔 (Runge-Kutta) 算法, 步距 $h = 10^{-1}$, 将所得的结果与精确解进行比较.

第3章 线性方程

3.1 矩阵指数

现在我们开始研究一阶线性自治系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3-1)$$

其中 \mathbf{A} 是 $n \times n$ 矩阵. 如果我们执行皮卡 (Picard) 迭代, 则得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0(s) ds = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \int_0^t ds = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{A}\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_1(s) ds = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \int_0^t ds + \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 \int_0^t s ds \\ &= \mathbf{x}_0 + t\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

因此, 由归纳法得

$$\mathbf{x}_m(t) = \sum_{j=0}^m \frac{t^j}{j!} \mathbf{A}^j \mathbf{x}_0. \quad (3-2)$$

$m \rightarrow \infty$ 时其极限为

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mathbf{A}^j \mathbf{x}_0. \quad (3-3)$$

在一维情形 ($n=1$), 这个级数正是通常的指数, 因此记

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0, \quad (3-4)$$

这里我们用

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathbf{A}^j \quad (3-5)$$

定义**矩阵指数**. 因此为了理解我们原来的问题, 我们必须了解矩阵指数的意义! 对每一个向量 \mathbf{x}_0 , 皮卡 (Picard) 迭代保证 $\exp(\mathbf{A})\mathbf{x}_0$ 的收敛性, 并且在选择 \mathbb{R}^n 的

标准基向量后, 我们看到, 所有的矩阵元素都收敛. 但是, 对后者我们要对矩阵引入适当的范数, 并在这个范数下直接证明上面级数的收敛性.

我们宁可用 \mathbb{C}^n 作为基本的向量空间以代替 \mathbb{R}^n , 因为 \mathbb{C} 是代数闭的 (这对我们后面借助若尔当 (Jordan) 标准形计算矩阵指数很重要). 故设 A 是作用在 \mathbb{C}^n 上的复矩阵, 并引入矩阵范数

$$\|A\| = \sup_{x: |x|=1} |Ax|. \quad (3-6)$$

不难看出, 按照这个范数, $n \times n$ 矩阵的向量空间 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 变成一个巴拿赫 (Banach) 空间 (问题 3.1). 此外, 利用 (问题 3.3)

$$\|A^j\| \leq \|A\|^j, \quad (3-7)$$

由 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j}{j!} = \exp(\|A\|)$ 的收敛性得知级数 (3-5) 的收敛性.

但是, 要注意, 一般 $\exp(A+B) \neq \exp(A) + \exp(B)$, 除非 A 和 B 可交换. 即除非换位子

$$[A, B] = AB - BA \quad (3-8)$$

为零. 这时你可模仿一维情形的证明而得到下面的

引理 3.1 假设 A 和 B 可交换, 则

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B), \quad [A, B] = 0. \quad (3-9)$$

如果我们作线性坐标变换

$$y = U^{-1}x, \quad (3-10)$$

则在新坐标下矩阵指数为

$$U^{-1}\exp(A)U = \exp(U^{-1}AU). \quad (3-11)$$

这可利用 $U^{-1}A^jU = (U^{-1}AU)^j$ 和矩阵积的连续性 (问题 3.4) 由式 (3-5) 得知. 因此为了计算 $\exp(A)$, 我们需要考虑坐标变换将 A 化为尽可能简单的形式.

定理 3.2 (若尔当 (Jordan) 标准形) 设 A 是 $n \times n$ 矩阵. 则存在坐标的线性变换 U , 使得 A 变成分块矩阵

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}, \quad (3-12)$$

每一块的形式为

$$\mathbf{J} = \alpha\mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

这里的 \mathbf{N} 是矩阵，它的主对角线上方第一个对角线元素均为 1，其余元素均为零。

数 α 是 \mathbf{A} 的特征值，新基向量 \mathbf{u}_j (\mathbf{U} 的列) 由 \mathbf{A} 的广义特征向量组成。求若尔当 (Jordan) 标准形的一般过程是十分麻烦的，为此我们将进一步的详细讨论推迟到 3.6 节。特别地，因为大部分计算机代数系统可容易地为我们承担这个任务！

例 设

$$\text{In}[1]: = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -11 & -35 & -24 \\ -1 & -1 & -2 \\ 8 & 22 & 17 \end{pmatrix};$$

于是命令

$$\text{In}[2]: = \{\mathbf{U}, \mathbf{J}\} = \text{JordanDecomposition}[\mathbf{A}]$$

给出我们的变换矩阵 \mathbf{U} 和 Jordan 标准形 $\mathbf{J} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ 。

$$\text{In}[3]: = \mathbf{J} // \text{MatrixForm}$$

$$\text{Out}[3]: // \text{MatrixForm} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

如果你不相信我 (或者不相信 Mathematica)，也可以对它进行验证：

$$\text{In}[4]: = \mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{J} \cdot \text{Inverse}[\mathbf{U}]$$

$$\text{Out}[4]: = \text{True}$$

为了计算矩阵指数，我们看到

$$\exp(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\mathbf{J}_m) \end{pmatrix}, \quad (3-14)$$

因此，剩下来是计算 (3-13) 中的单个若尔当 (Jordan) 块 $\mathbf{J} = \alpha\mathbf{I} + \mathbf{N}$ 的指数。由于 $\alpha\mathbf{I}$ 与 \mathbf{N} 可交换，由引理 3.1 推得

$$\exp(\mathbf{J}) = \exp(\alpha\mathbf{I})\exp(\mathbf{N}) = e^{\alpha} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \mathbf{N}^j. \quad (3-15)$$

$\exp(\mathbf{N})$ 的级数在第 k 项以后终止，其中 k 是 \mathbf{N} 的阶数。事实上，不难看到， \mathbf{N}^j 是主对角线上方第 j 个对角线元素是 1 的矩阵，当 j 到达 \mathbf{J} 的阶数时它就为零矩阵。

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

以及 $N^4 = 0$. 总之, $\exp(\mathbf{J})$ 显然化为

$$\exp(\mathbf{J}) = e^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

注意, 如果 \mathbf{A} 是若尔当 (Jordan) 标准形, 则不难看到

$$\det(\exp(\mathbf{A})) = \exp(\operatorname{tr}(\mathbf{A})). \quad (3-17)$$

由于行列式与迹在线性变换下不变, 这个公式对任意矩阵都成立. 事实上, 我们甚至有 (问题 3.6):

引理 3.3 向量 \mathbf{u} 是矩阵 \mathbf{A} 对应于特征值 α 的特征向量, 当且仅当 \mathbf{u} 是 $\exp(\mathbf{A})$ 对应于特征值 e^{α} 的特征向量.

此外, \mathbf{A} 和 $\exp(\mathbf{A})$ 的若尔当 (Jordan) 结构是相同的. 特别, α 和 e^{α} 的几何重次和代数重次[⊖]相同.

显然, Mathematica 也可为我们计算指数:

```
In[5] := MatrixExp[J]//MatrixForm
```

```
Out[5]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

为结束这一节我们要强调, 即使矩阵 \mathbf{A} 是实的, 其特征值和广义特征向量仍可以是复的. 但是在许多应用中我们只对实解有兴趣. 这时我们也有实若尔当 (Jordan) 标准形, 在这里简单地说明一下.

如果 α 不是实数, 则必有对应的共轭复块 $\mathbf{J}^* = \alpha^* \mathbf{I} + \mathbf{N}$, 对应的广义特征向量可假设为我们原来的复共轭. 因此, 在我们的基下可以用 $\operatorname{Re}(\mathbf{u}_j)$ 和 $\operatorname{Im}(\mathbf{u}_j)$ 代替 $\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j^*$. 在新基下块 $\mathbf{J} \oplus \mathbf{J}^*$ 由

⊖ 特征值的代数重次是特征值的次数, 特征值的几何重次是对应这个特征值的线性无关的特征向量的个数. 译者注.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{R} & \mathbf{I} & & \\ & & \mathbf{R} & \ddots & \\ & & & \ddots & \mathbf{I} \\ & & & & \mathbf{R} \end{pmatrix}, \quad (3-18)$$

代替, 其中

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha) & \operatorname{Im}(\alpha) \\ -\operatorname{Im}(\alpha) & \operatorname{Re}(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3-19)$$

由于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-20)$$

可交换, 指数为

$$\begin{pmatrix} \exp(\mathbf{R}) & \exp(\mathbf{R}) & \exp(\mathbf{R}) \frac{1}{2!} & \cdots & \exp(\mathbf{R}) \frac{1}{(n-1)!} \\ & \exp(\mathbf{R}) & \exp(\mathbf{R}) & \ddots & \vdots \\ & & \exp(\mathbf{R}) & \ddots & \exp(\mathbf{R}) \frac{1}{2!} \\ & & & \ddots & \exp(\mathbf{R}) \\ & & & & \exp(\mathbf{R}) \end{pmatrix}, \quad (3-21)$$

其中

$$\exp(\mathbf{R}) = e^{\operatorname{Re}(\alpha)} \begin{pmatrix} \cos(\operatorname{Im}(\alpha)) & \sin(\operatorname{Im}(\alpha)) \\ -\sin(\operatorname{Im}(\alpha)) & \cos(\operatorname{Im}(\alpha)) \end{pmatrix}. \quad (3-22)$$

问题 3.1 求证 $n \times n$ 矩阵空间 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 与矩阵范数一起构成一个巴拿赫 (Banach) 空间. 特别地, 证明矩阵序列收敛, 当且仅当所有的矩阵元素收敛. (提示: 求证 \mathbf{A} 的矩阵元素 a_{jk} 满足 $\max_{j,k} |a_{jk}| \leq \|\mathbf{A}\|$ 和 $\|\mathbf{A}\| \leq n \max_{j,k} |a_{jk}|$.)

问题 3.2 设 \mathbf{A}_j 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 中的序列. 求证当 $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_j\|$ 收敛时

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}_j$$

收敛.

问题 3.3 求证矩阵范数满足

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

(这甚至证明了 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 是一个巴拿赫 (Banach) 代数[⊖]) 由此得知, $\|A^j\| \leq \|A\|^j$.

问题 3.4 求证矩阵积关于矩阵范数是连续的. 即如果 $A_j \rightarrow A$ 和 $B_j \rightarrow B$, 则有 $A_j B_j \rightarrow AB$. (提示: 利用问题 3.3)

问题 3.5 (1) 对

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c & a-d \end{pmatrix}$$

计算 $\exp(A)$.

(2) 是否存在实矩阵 A , 使得

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta > 0?$$

问题 3.6 求证引理 3.3 (提示: 只需考虑一个若尔当 (Jordan) 块).

3.2 一阶线性自治系统

在上一节, 我们已经看到一阶线性自治系统 (3-1) 的解是

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0. \quad (3-23)$$

特别地, 映射 $\exp(t\mathbf{A})$ 给出所有初始条件和所有的解之间的同构[⊕]. 因此所有解的集合是一个与 \mathbb{R}^n 同构的向量空间 (分别地, 如果允许复初始值则与 \mathbb{C}^n 同构).

为了理解系统 (3-1) 的动力学, 需要了解函数 $\exp(t\mathbf{A})$ 的性质. 我们从二维情形开始, 它涵盖了所有典型情形. 此外, 将假设 \mathbf{A} 和 \mathbf{x}_0 都是实的.

在这情形下存在两个特征值 α_1 和 α_2 , 它们或者都是实数, 否则为彼此共轭的复数. 我们从 \mathbf{A} 可对角化情形开始, 这时存在两个线性无关的特征向量 \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 , 它们构成 U 的列. 特别地

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

以及解 (3-23) 是

⊖ 巴拿赫 (Banach) 代数 \mathbb{B} 是域 F 上赋予范数 $\|\cdot\|$ 的代数 (满足通常代数规则的乘法向量空间), 使得在此范数下 \mathbb{B} 是一个 (Banach) 空间, 且对一切 $x, y \in \mathbb{B}$ 有 $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$. 译者注.

⊕ 如果两个集合 A 和 B 之间存在双射 f 使得 f 和其逆 f^{-1} 都是同胚, 则称 A 和 B 同构, 相应的映射 f 称为同构 (映射), 即保结构映射. 译者注.

$$\mathbf{x}(t) = U \exp(tU^{-1}AU) U^{-1} \mathbf{x}_0 = U \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} U^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (3-25)$$

记 $\mathbf{y}_0 = U^{-1} \mathbf{x}_0 = (\mathbf{y}_{0,1}, \mathbf{y}_{0,2})$, 我们得到

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_{0,1} e^{\alpha_1 t} \mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_{0,2} e^{\alpha_2 t} \mathbf{u}_2. \quad (3-26)$$

在两个特征值都是实数的情形下, 式 (3-26) 中的所有量是实的. 反之, 我们有 $\alpha_2 = \alpha_1^*$, 不失一般性, 可以假设 $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^*$. 记 $\alpha_1 \equiv \alpha = \lambda + i\omega$ 和 $\alpha_2 \equiv \alpha^* = \lambda - i\omega$. 于是由欧拉 (Euler) 公式

$$e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \sin(\omega) \quad (3-27)$$

得知

$$e^{\alpha t} = e^{\lambda t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)), \quad \alpha = \lambda + i\omega \quad (3-28)$$

此外, 由 $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}_0$ 得 $\mathbf{y}_{0,1} \mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_{0,2} \mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_{0,1}^* \mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_{0,2}^* \mathbf{u}_1$, 这证明 $\mathbf{y}_{0,1}^* = \mathbf{y}_{0,2}$. 故式 (3-26) 中两项彼此复共轭, 由此得知

$$\mathbf{x}(t) = 2\operatorname{Re}(\mathbf{y}_{0,1} e^{\alpha t} \mathbf{u}_1) = 2\cos(\omega t) e^{\lambda t} \operatorname{Re}(\mathbf{y}_{0,1} \mathbf{u}_1) - 2\sin(\omega t) e^{\lambda t} \operatorname{Im}(\mathbf{y}_{0,1} \mathbf{u}_1). \quad (3-29)$$

这完成了 \mathbf{A} 可对角化的情形的证明.

若 \mathbf{A} 不可对角化, 则两个特征值必须相等 $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$. 矩阵 U 的列 \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 分别是 \mathbf{A} 的特征向量和广义特征向量. 因此

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (3-30)$$

类似于前面的计算, 解为

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{y}_{0,1} + \mathbf{y}_{0,2}t) e^{\alpha t} \mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_{0,2} e^{\alpha t} \mathbf{u}_2. \quad (3-31)$$

这就完成了对 \mathbf{A} 不可对角化的情形的证明.

接下来, 我们尝试了解解在长时间 t 的定性状态. 为此, 需要了解函数 $\exp(\alpha t)$ 的性质. 由式 (3-28) 我们可以得知, 如果 $\lambda = \operatorname{Re}(\alpha) < 0$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\exp(\alpha t)$ 收敛于 0, 如果 $\lambda = \operatorname{Re}(\alpha) > 0$ 则它指数式增长. 下面分别按照 $\operatorname{Re}(\alpha_1)$ 和 $\operatorname{Re}(\alpha_2)$ 的符号讨论各种情形.

首先, 假设两个特征值都具有正实部, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时所有解都指数式增长, $t \rightarrow -\infty$ 时都指数式衰减. 在这种情形下原点称为源. 类似地, 如果两个特征值都具有负实部, 这个情形可用变换 $t \rightarrow -t$ 化为上一情形. 相图相同但解曲线方向相反. 原点在这情形下称为汇. 复特征值情形的典型相图如图 3-1 所示, 实特征值情形如图 3-2 所示. 注意, 在实特征值情形, 两条直线分别对应于系数矩阵的两个特征向量 (为什么在复特征值情形没有看得见的特征向量呢?). 在复情形, 虚部 ω 为引起解旋转的分量, 原点分别称为螺旋源和螺旋汇.

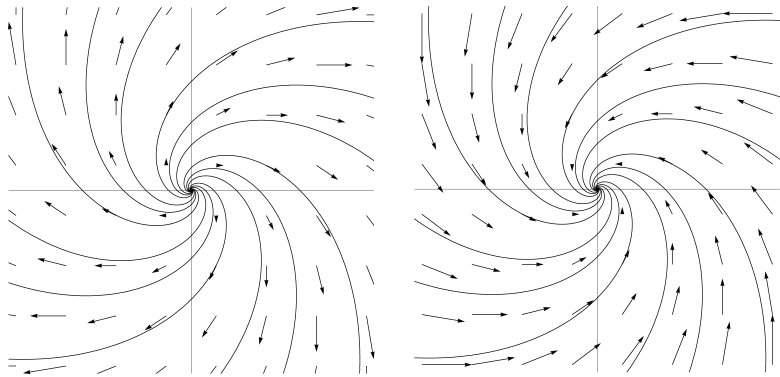


图 3-1 两个特征值分别都具有正实部和都具有负实部的平面系统的相图

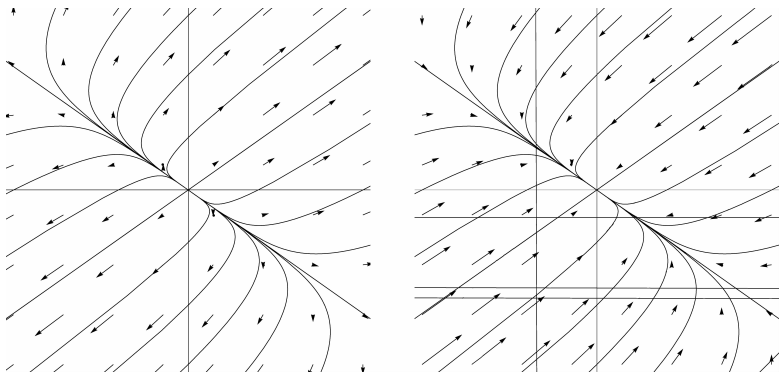


图 3-2 两个特征值分别都是正的和都是负的平面系统的相图

如果一个特征值有正实部，另一个有负实部，相图如图 3-3 所示，原点称为鞍点。两条直线又一次对应于系数矩阵的两个特征向量。现在长时间性态依赖于初始条件 x_0 ，如果 x_0 位于对应的具有负实部特征值的特征空间上，则当 $t \rightarrow \infty$ 时解指数式衰减，当 $t \rightarrow -\infty$ 时解指数式增长。如果 x_0 位于对应其他特征值的特征空间上，则解将以其他方式绕行。如果 x_0 有分量在两个特征空间上，则当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时解将指数式增长。

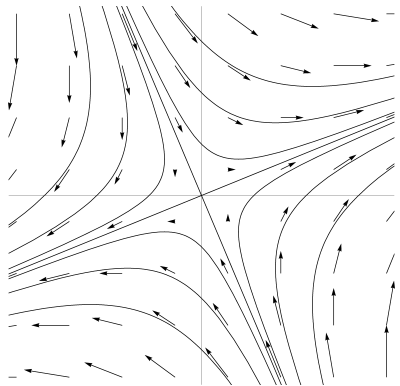


图 3-3 具有相反符号的实特征值的平面系统的相图

如果两个特征值都是纯虚数，则解是围绕原点的周期解。相图看上去如图 3-4 所示，原点称为中心。在这情形下所有的解显然有界。

在矩阵不可对角化情形，相图看上去像图

3-5. 如前, 直线对应于特征向量. 如果 $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$, 则所有解将收敛于 0, 若 $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时所有解都指数式增长. 多项式项 t 不起作用, 因为它被指数项 $\exp(\alpha t)$ 控制, 除非 $\alpha = 0$. 如果 $\alpha = 0$, 又若解从特征向量 (即 (3-31) 中的 $y_{0,2} = 0$) 张成的子空间开始, 则解是常数, 否则 (即 $y_{0,2} \neq 0$) 它像 t 一样增长.

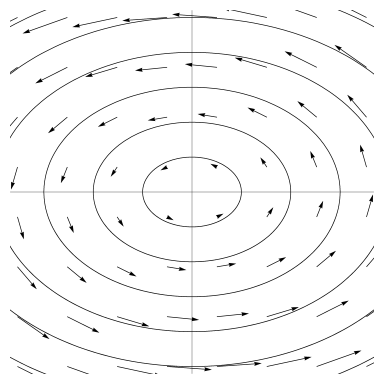


图 3-4 具有纯虚特征值的平面系统的相图

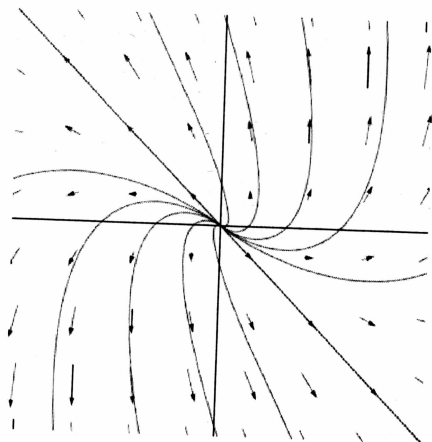


图 3-5 具有相同实特征值 (不可对角化) 的平面系统的相图

现在我们来讨论一般情形. 如前, 由上一节考虑显示, 只需考虑一个若尔当 (Jordan) 块的情形

$$\exp(t\mathbf{J}) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

特别地, 每一个解是 $t^j \exp(\alpha t)$ 类型项的线性组合. 由于 $\exp(\alpha t)$ 衰减快于任何多项式, 因此, 如果 $\lambda = \operatorname{Re}(\alpha) < 0$, 我们的若尔当 (Jordan) 块的元素收敛于零. 如果 $\lambda = 0$, $\exp(\alpha t) = \exp(i\omega t)$ 将至少保持有界, 但多项式项将发散. 不过, 如果我们从特征向量 $(1, 0, \dots, 0)$ 的方向开始, 我们就看不到多项式项. 总之, 我们得到:

定理 3.4 如果初始条件 x_0 位于由对应具有负实部的特征值的广义特征向量所张成的子空间内, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时线性系统 (3-1) 的解收敛于 0.

如果 x_0 位于由对应具有负实部的特征值的广义特征空间, 以及对应具有零实部的特征值的特征空间内, 则线性系统 (3-1) 的解将保持有界.

注意, 要得到 $t \rightarrow -\infty$ 时解的性态, 只需把“正”的更改为“负”的就行.

线性系统 (不必要自治的) 称为是稳定的, 如果它所有的解 $t \rightarrow \infty$ 时保持有界, 称为是渐近稳定的, 如果它所有解 $t \rightarrow \infty$ 时收敛于 0.

推论 3.5 线性系统 (3-1) 是稳定的, 如果 A 的所有特征值满足 $\operatorname{Re}(\alpha) \leq 0$, 且所有满足 $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$ 的特征值的代数重次和几何重次相等.

线性系统 (3-1) 是渐近稳定的, 如果 A 的所有特征值 α 满足 $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$.

最后, 直接计算得知, 非齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3-33)$$

的解是

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp((t-s)\mathbf{A})\mathbf{g}(s)ds \quad (3-34)$$

(但是, 事实上我们将在下面的定理 3.10 中证明更为一般的结果). 注意, 对线性方程, 它的通解永远是由对应齐次方程 (系统) 的通解加上非齐次方程 (系统) 的一个特解组成.

问题 3.7 求解下列方程:

$$(1) \dot{x} = 3x;$$

$$(2) \dot{x} = \frac{\gamma}{t}x, \quad \gamma \in \mathbb{R};$$

$$(3) \dot{x} = x + \sin(t).$$

问题 3.8 求解对应于下面矩阵的系统:

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

问题 3.9 求解

$$\dot{x} = -y - t, \quad \dot{y} = x + t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

问题 3.10 求 2×2 矩阵, 使得 $x(t) = (\sinh(t), e^t)$ 是其解.

问题 3.11 下面哪个函数可成为一阶自治齐次系统的解?

$$(1) x(t) = (3e^t + e^{-t}, e^{2t});$$

$$(2) x(t) = (3e^t + e^{-t}, e^t);$$

$$(3) x(t) = (3e^t + e^{-t}, te^t);$$

$$(4) x(t) = (3e^t, t^2e^t);$$

$$(5) x(t) = (e^t + 2e^{-t}, e^t + 2e^{-t}).$$

问题 3.12 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, β 是常数. 考虑一个特殊的非齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}(t)e^{\beta t},$$

其中 $\mathbf{p}(t)$ 是所有分量都是多项式的向量. 令 $\deg(\mathbf{p}(t)) = \max_{1 \leq j \leq n} \deg(p_j(t))$. 求证当

β 不是 A 的特征值时, 这个方程有形如

$$\mathbf{q}(t)e^{\beta t}$$

的特解, 其中 $\mathbf{q}(t)$ 是满足 $\deg(\mathbf{q}(t)) = \deg(\mathbf{p}(t))$ 的多项式向量, 以及, 如果 β 是 A 的特征值, 代数重次为 a , 则 $\deg(\mathbf{q}(t)) = \deg(\mathbf{p}(t)) + a$.

(提示: 利用下面事实研究 (3-33): $\int \mathbf{p}(t)e^{\beta t} dt = \mathbf{q}(t)e^{\beta t}$, 其中, 如果 $\beta \neq 0$, $\mathbf{q}(t)$ 是次数为 $\deg(q) = \deg(p)$ 的多项式, 以及若 $\beta = 0$, 则 $\deg(q) = \deg(p) + 1$).

问题 3.13 设 A 是实 2×2 矩阵, 则它的特征值可用它的行列式 $D = \det(A)$ 和迹 $T = \text{tr}(A)$ 表达. 特别地, 如果 A 遍及 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中所有可能的矩阵, 则 (T, D) 可取 \mathbb{R}^2 中的所有可能的值. 将 (T, D) 平面划分成几个区域, 在每个区域内讨论本节出现的各个情形.

问题 3.14 (拉普拉斯 (Laplace) 变换) 对某个常数 $M \geq 0$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 设 $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ 满足 $|x(t)| \leq Me^{at}$. 则拉普拉斯 (Laplace) 变换

$$\mathcal{L}(x)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

存在且对 $\text{Re}(s) > a$ 解析. 求证对满足 $|x(t)| + |\dot{x}(t)| \leq Me^{at}$ 的 $x \in C^1([0, \infty))$, 我们有

$$\mathcal{L}(\dot{x})(s) = s\mathcal{L}(x)(s) - x(0).$$

此外, 求证拉普拉斯 (Laplace) 变换将初值问题

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0$$

变成线性方程组.

3.3 n 阶线性自治方程

在这一节, 我们简短地考虑经常出现在应用中的 n 阶方程

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{x} + c_0x = 0. \quad (3-35)$$

其中 c_0, \dots, c_{n-1} 是某些实 (或复) 常数. 由于它的解由初始条件

$$x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \quad (3-36)$$

唯一确定, 故其解也组成 n 维向量空间.

对应系统的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3-37)$$

因此, 我们所考虑的一切都可应用: 特征多项式可对最后一行进行 Laplace 展开来

计算, 并由

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0 \quad (3-38)$$

给出. 可以证明每一个特征值的几何重次为 1 (问题 3.23).

定理 3.6 设 α_j , $1 \leq j \leq m$ 是方程 (3-35) 相应的特征多项式

$$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0 = \prod_{j=1}^m (z - \alpha_j)^{a_j} \quad (3-39)$$

的零点, 其中 a_j 是对应的重次. 则函数

$$x_{j,k}(t) = t^k \exp(\alpha_j t), \quad 0 \leq k < a_j, \quad 1 \leq j \leq m \quad (3-40)$$

是方程 (3-35) 的 n 个线性无关解.

特别地, 任何其他解可以写为这些解的线性组合.

证明 考虑对应一阶系统的解. 由构造, 系统每一个解的第一个分量将是我们 n 阶方程的解. 由每一个若当 (Jordan) 块 (3-32) 所收集的函数, 其第一个分量必须是函数 $x_{j,k}(t)$ 的线性组合. 故方程 (3-35) 的解空间是由这些函数所张成. 由于这个空间是 n 维的, 所有函数必须出现. 特别地, 这些函数必须线性无关. \square

注意, 如果系数 c_j 是实数, 以及如果我们的兴趣是实数解, 那我们所要做的
一切就是取实部和虚部. 即对 $\alpha_j = \lambda_j + i\omega_j$, 取

$$t^k e^{\lambda_j t} \cos(\omega_j t), \quad t^k e^{\lambda_j t} \sin(\omega_j t) \quad (3-41)$$

由式 (3-34), 非齐次方程

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1 \dot{x} + c_0 x = g(t) \quad (3-42)$$

的解是

$$x(t) = x_h(t) + \int_0^t u(t-s)g(s)ds \quad (3-43)$$

其中 $x_h(t)$ 是齐次方程的任意解, $u(t)$ 是齐次方程对应于初始条件 $u(0) = \dot{u}(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0$ 和 $u^{(n-1)}(0) = 1$ 的解 (问题 3.19).

因此, 求解 n 阶常系数线性方程的算法如下: 从齐次方程开始, 计算特征方程的零点并写出特解 (3-40) 的线性组合的通解. 求非齐次方程的特解, 并从初始条件确定齐次方程的未知常数. 非齐次方程的特解可从计算式 (3-43) 中的积分得到. 但是, 在许多情况下, 可用更有效的方法对解进行适当的猜测. 例如, 如果 $g(t)$ 是 $p(t) e^{\beta t}$ 型, 其中 $p(t)$ 是多项式, 则存在 $q(t) e^{\beta t}$ 形式的解, 其中当 $\beta \neq \alpha_j$ 时 $q(t)$ 是次数与 $p(t)$ 的相同的多项式 (反之, 如果 $\beta = \alpha_j$, 则次数必须由 α_j 的代数重次来增加 (也见问题 3.20)). 注意, 如果允许复值, 在取实部和虚部以后, 这也包括 $g(t) = p(t) \cos(\omega t)$ 或者 $g(t) = p(t) \sin(\omega t)$ 的情形. 最后, 在这些项的线性组合情形则由线性性可自由得出.

二阶情形特别重要, 它出现在大量的应用中. 例如当模拟电路时就会出现二阶方程.

一个电路是由电子元件，以及连接每个元件的导线（输入和输出）所组成，其中一个元件的每根导线连接一个或多个其他元件的导线。数学上我们称之为定向图。

在每一时刻 t ，有电流 $I(t)$ 通过每个元件，在两根导线之间存在电压差 $V(t)$ 。哪根导线叫输入哪个导线叫输出并不重要。但是，电流如果从输入到输出以正计算，那么对电压差也类似。系统的状态空间由电路中所有元件偶 (I, V) 给出。这些偶必须满足两个要求。由基尔霍夫 (Kirchhoff) 第一定律，在顶点的所有电流之和必须为零（电荷守恒），由基尔霍夫 (Kirchhoff) 第二定律，一个闭路中所有的电压差必须为零（电压对应于势）。

在简单的电路中我们有三个不同类型的元件，感应器，电容器和电阻器。对感应器我们有

$$L \dot{I}_L = V_L, \quad (3-44)$$

其中 $L > 0$ 是感应系数， $I_L(t)$ 是通过感应器的电流， $V_L(t)$ 是导线之间的电压差。对电容器我们有

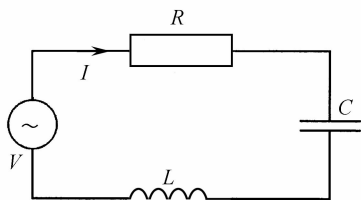
$$C \dot{V}_C = I_C \quad (3-45)$$

其中 $C > 0$ 是电容， $I_C(t)$ 是通过电容器的电流， $V_C(t)$ 是电压差。对电阻器我们有（欧姆定律）

$$V_R = RI_R, \quad (3-46)$$

其中 $R > 0$ 是电阻， $I_R(t)$ 是通过电阻器的电流， $V_R(t)$ 是电压差。

我们来看一个感应器 L ，一个电容器 C 和一个电阻器 R 的情形，它们与一个外部电源 V 一起组成一个回路（经典的 RLC 电路）。



基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律告诉我们 $I_R = I_L = I_C$ 以及 $V_R + V_L + V_C = V$ 。利用这三个元件的性质，我们得到对电流 I 的二阶线性微分方程

$$L \ddot{I}(t) + R \dot{I}(t) + \frac{1}{C} I(t) = \dot{V}(t). \quad (3-47)$$

对外接正弦型电压

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t). \quad (3-48)$$

我们来求解这个方程。

为方便起见，利用复电压 $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$ ，得

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = i \frac{\omega V_0}{L} e^{i\omega t} \quad (3-49)$$

对 $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ 和 $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, 分别取复数解的实部和虚部来求得解.

特征值是

$$\alpha_{1,2} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} \quad (3-50)$$

其中, 为了方便起见我们引入记号

$$\eta = \frac{R}{2L} \text{ 和 } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-51)$$

如果 $\eta > \omega_0$ (过(度)阻尼), 两个特征值是负的, 齐次方程的解是

$$I_h(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \quad (3-52)$$

如果 $\eta = \omega_0$ (临界阻尼), 两个特征值相等, 齐次方程的解是

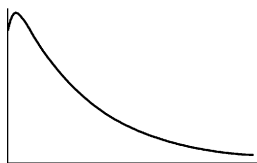
$$I_h(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\eta t} \quad (3-53)$$

最后, 对 $\eta < \omega_0$ (低阻尼), 我们有复共轭特征值, 齐次方程的解为

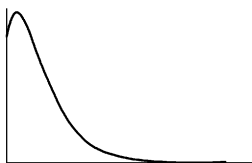
$$I_h(t) = k_1 e^{-\eta t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\eta t} \sin(\beta t), \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} > 0. \quad (3-54)$$

在两个特征值的实部都是负的每一个情形, 当 $t \rightarrow \infty$ 时齐次方程的解都衰减:

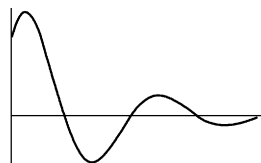
过(度)阻尼



临界阻尼



低阻尼



注意到, 对固定的 $\eta > 0$, 选择 $\omega_0 = \eta$, 给出没有振动分量的最快衰减.

对非齐次方程我们取猜测解为

$$I_i(t) = k e^{i\omega t}, \quad (3-55)$$

其中 k 为未知常数. 由此得

$$k = \frac{V_0}{R + i\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (3-56)$$

由于齐次解指数式衰减, 经短时间后我们有

$$I(t) = I_h(t) + I_i(t) \approx I_i(t) = \frac{V_0}{Z} e^{i\omega t} = \frac{1}{Z} V(t), \quad (3-57)$$

其中

$$Z = R + Z_L + Z_C, \quad Z_L = iL\omega, \quad Z_C = -i \frac{1}{\omega C} \quad (3-58)$$

是复阻抗. 当

$$|Z|^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad (3-59)$$

时达到最小, 即如果 $L\omega - \frac{1}{\omega C} = 0$, 则

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-60)$$

时电流 $I(t) = \frac{1}{Z}V(t)$ 到达极大. 称频率 $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 为电路中的共振频率.

改变其中一个参数, 例如 C , 就可以调节电流到特殊的共振频率. 例如利用这个思想到收音机, 你可以从许多其他可用的电台调到你喜欢的电台. 这时外接电源对应于你天线接收到的信号, 且仅在你的电台携带的频率与它的共振频率重合时 RLC 回路才开始振动.

此外, 我们的例子不仅限于电路. 许多其他系统, 至少对小振幅 $x(t)$, 它们都可以用微分方程

$$x''(t) + 2\eta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \eta, \omega_0 > 0 \quad (3-61)$$

描述. 其中, $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 是系统的共振频率, η 是阻尼因子. 如果 $\eta = 0$, 对应自由 (无阻尼) 振动的解是 $x(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t)$.

问题 3.15 求解下列微分方程:

$$(1) \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = \sinh(t);$$

$$(2) \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \exp(t);$$

$$(3) \ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^2.$$

问题 3.16 求解方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t), \quad \omega_0, \omega > 0,$$

讨论当 $t \rightarrow \infty$ 时解的性态. $\omega = \omega_0$ 的情形是什么?

问题 3.17 (欧拉 (Euler) 方程) 求解方程

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{t}\dot{x} + \frac{c_0}{t^2}x = 0, \quad t > 0$$

能否用引入新自变量 $\tau = \ln(t)$ 求解. 对 $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ 讨论可能的解.

问题 3.18 考虑二阶方程

$$\ddot{x} + c_1 \dot{x} + c_0 x = 0.$$

求两个解的朗斯基 (Wronsky) 行列式 $W(x, y) = x\dot{y} - \dot{x}y$ 的公式.

问题 3.19 求证式 (3-43) (或者把它化为式 (3-34), 或者直接验证, 建议两者都做).

问题 3.20 考虑二阶方程

$$\ddot{x} + c_1 \dot{x} + c_0 x = g,$$

令 α_1, α_2 为对应的特征值 (不必相异). 求证方程可分解因式为

$$\ddot{x} + c_1 \dot{x} + c_0 x = \left(\frac{d}{dt} - \alpha_2 \right) \left(\frac{d}{dt} - \alpha_1 \right) x.$$

因此该方程可以化为求解两个一阶方程

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha_2 \right) y = g, \quad \left(\frac{d}{dt} - \alpha_1 \right) x = y.$$

利用这个证明 $n=2$ 情形的定理 3.6. 如果 $g(t) = p(t)e^{\beta t}$, 其中 $p(t)$ 是多项式, 对这个解的结构你有什么结论? 你能不能对一般情形 $n \in \mathbb{N}$ 也得出类似结论? (提示: 对一阶情形, 解由式 (3-34) 给出. 此外, $\int p(t)e^{\beta t} dt = q(t)e^{\beta t}$, 其中 $q(t)$ 是多项式, 若 $\beta \neq 0$, 其次数 $\deg(q) = \deg(p)$, 若 $\beta = 0$ 则 $\deg(q) = \deg(p) + 1$. 对一般情形则用归纳法).

问题 3.21 验证二阶方程

$$\ddot{x} + (1 - t^2)x = 0$$

可分解因式为

$$\left(\frac{d}{dt} - t \right) \left(\frac{d}{dt} + t \right) x = 0$$

(注意这个阶数是重要的). 利用这个结论求解上面的方程 (提示: 比较上一个问题).

问题 3.22 对 $x \in C^{n+1}$ 从式 (3-43) 推导带余项的泰勒 (Taylor) 公式

$$x(t) = \sum_{j=0}^n \frac{x^{(j)}(t_0)}{j!} (t - t_0)^j + \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t x^{(n+1)}(s) (t - s)^n ds.$$

问题 3.23 求证式 (3-37) 中矩阵 A 的每一个特征值的几何重次都是 1. (提示: 你能不能找循环向量? 为什么这对你有帮助?)

3.4 一般的一阶线性系统

这一节我们考虑的线性系统, 其系数矩阵可依赖于 t . 作为准备, 我们注意, 矩阵 $A(t)$ 称为关于 t 可微, 如果它所有的元素都可微. 在这情形下我们记矩阵 $\frac{d}{dt} A(t) \equiv \dot{A}(t)$, 它的元素是 $A(t)$ 的元素的导数. 只要考虑到矩阵的不可交换性, 通常的微分规则成立. 例如我们有乘法规则

$$\frac{d}{dt} A(t) B(t) = \dot{A}(t) B(t) + A(t) \dot{B}(t), \quad (3-62)$$

以及, 如果 $\det(A(t)) \neq 0$, 则

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t)^{-1} = -\mathbf{A}(t)^{-1} \dot{\mathbf{A}}(t) \mathbf{A}(t)^{-1} \quad (3-63)$$

(问题 3.24). 注意, 这个阶数是重要的!

现在我们回到一般的一阶线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad (3-64)$$

其中 $\mathbf{A} \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. 显然 2.2 节的理论可应用:

定理 3.7 一阶线性系统 (3-64) 有满足初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的唯一解. 此外, 对一切 $t \in I$ 这个解都有定义.

证明 这由定理 2.16 直接得证 (或者由推论 .6), 因为对每个 $T \in I$ 我们可以选取 $L(T) = \max_{[0, T]} \|\mathbf{A}(t)\|$ □

这看起来很诱惑, 猜想解是由公式 $x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}(s) ds\right) x_0$ 给出. 但是当你尝试去验证这个猜想时, 矩阵的不可交换性给你带来麻烦了. 事实上, 这个公式仅对一切 $t, s \in \mathbb{R}$ 有 $[\mathbf{A}(t), \mathbf{A}(s)] = 0$ 时才可求解我们的初值问题. 因此很少用. 故仍需要找 $\exp((t-t_0)\mathbf{A})$ 的直接推广.

我们从解的线性组合仍是解开始. 因而所有解的集合构成一个向量空间. 通常称此结论为**叠加原理**. 特别地, 对应初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解可以写为

$$\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\phi}(t, t_0, \boldsymbol{\delta}_j) x_{0,j}, \quad (3-65)$$

其中 $\boldsymbol{\delta}_j$ 是标准基向量, (即若 $j=k$ 则 $\delta_{j,k} = 1$, 以及若 $j \neq k$ 则 $\delta_{j,k} = 0$), $x_{0,j}$ 是 \mathbf{x}_0 的分量 (即 $\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\delta}_j x_{0,j}$). 利用解 $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \boldsymbol{\delta}_j)$ 作为矩阵

$$\mathbf{\Pi}(t, t_0) = (\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \boldsymbol{\delta}_1), \dots, \boldsymbol{\phi}(t, t_0, \boldsymbol{\delta}_n)) \quad (3-66)$$

的列, 我们看到, 存在由

$$\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{\Pi}(t, t_0) \mathbf{x}_0 \quad (3-67)$$

给出的线性映射 $\mathbf{x}_0 \mapsto \boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$.

矩阵 $\mathbf{\Pi}(t, t_0)$ 称为 (在 t_0 处的) **主解矩阵**, 它是矩阵方程初值问题

$$\dot{\mathbf{\Pi}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Pi}(t, t_0), \quad \mathbf{\Pi}(t, t_0) = \mathbf{I} \quad (3-68)$$

的解. 这里可以再次看到我们应用过的基本存在唯一性结果. 事实上, 容易验证, 矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 满足方程 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$, 当且仅当它的每一列满足式 (3-64). 特别地, 这时对每一个常数向量 \mathbf{c} , $\mathbf{X}(t)\mathbf{c}$ 是式 (3-64) 的解. 概括地说, 我们有

定理 3.8 系统 (3-64) 的解组成一个 n 维向量空间. 此外, 存在解矩阵 $\mathbf{\Pi}(t, t_0)$, 使得满足初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解是 $\mathbf{\Pi}(t, t_0) \mathbf{x}_0$.

例 考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (3-69)$$

由此明显地得知

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = 2\mathbf{x}_2. \quad (3-70)$$

我们需要分别求对应于初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\delta}_1 = (1, 0)$ 和 $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\delta}_2 = (0, 1)$ 的解, 在第一个情形, $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\delta}_1$, 第二个方程给出 $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{0}$, 将它代入第一个方程得 $\mathbf{x}_1(t) = e^{t-t_0}$, 就是说 $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \boldsymbol{\delta}_1) = (e^{t-t_0}, 0)$. 类似地, 在第二个情形, $\mathbf{x}(t_0) = (0, 1)$, 第二个方程是 $\mathbf{x}_2(t) = e^{2(t-t_0)}$, 将它代入第一个方程得 $\mathbf{x}_1(t) = e^{2(t-t_0)}(t-1) - e^{t-t_0}(t_0-1)$, 即

$$\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \boldsymbol{\delta}_2) = (e^{2(t-t_0)}(t-1) - e^{t-t_0}(t_0-1), e^{2(t-t_0)}).$$

将所得的放在一起, 我们得到

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & e^{2(t-t_0)}(t-1) - e^{t-t_0}(t_0-1) \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}. \quad (3-71)$$

此外, $\mathbf{H}(t, t_0)$ 满足

$$\mathbf{H}(t, t_1)\mathbf{H}(t_1, t_0) = \mathbf{H}(t, t_0). \quad (3-72)$$

这是因为它的两边都是 $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{H}$ 的解, 且在 $t = t_1$ 相等. 特别地, 选取 $t = t_0$, 我们看到, $\mathbf{H}(t, t_0)$ 与它的逆 $\mathbf{H}(t, t_0)^{-1} = \mathbf{H}(t_0, t)$ 同构.

更一般地, 取 n 个解 ϕ_1, \dots, ϕ_n , 得解矩阵 $\mathbf{U}(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$. $\mathbf{U}(t)$ 的行列式叫朗斯基 (Wronsky) 行列式

$$W(t) = \det(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)). \quad (3-73)$$

如果 $\det \mathbf{U}(t) \neq 0$, 解矩阵 $\mathbf{U}(t)$ 称为基本解矩阵. 此外, 如果 $\mathbf{U}(t)$ 是解矩阵, 则 $\mathbf{U}(t)\mathbf{C}$ 也是解矩阵, 其中 \mathbf{C} 是常数矩阵. 因此, 给定两个基本解矩阵 $\mathbf{U}(t)$ 和 $\mathbf{V}(t)$, 我们总有 $\mathbf{V}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}(t_0)^{-1}\mathbf{V}(t_0)$, 因为解矩阵由初始条件唯一确定. 特别地, 主解矩阵可以由基本解矩阵通过 $\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}(t_0)^{-1}$ 得到.

下面的引理显示, 只要验证对一个 $t \in \mathbb{R}$ 有 $\det \mathbf{U}(t) \neq 0$ 就够了.

引理 3.9 n 个解的朗斯基 (Wronsky) 行列式满足

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(\mathbf{A}(s)) ds\right). \quad (3-74)$$

这就是熟知的阿贝尔 (Abel) 恒等式, 或刘维尔 (Liouville) 公式.

证明 由式 (3-68) 我们有

$$\mathbf{H}(t+\varepsilon, t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t)\varepsilon + o(\varepsilon). \quad (3-75)$$

再利用 $\mathbf{U}(t+\varepsilon) = \mathbf{U}(t+\varepsilon, t)\mathbf{U}(t)$, 我们得到 (问题 3.25)

$$W(t+\varepsilon) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{A}(t)\varepsilon + o(\varepsilon))W(t) = (1 + \operatorname{tr}(\mathbf{A}(t))\varepsilon + o(\varepsilon))W(t), \quad (3-76)$$

由此得到

$$\frac{d}{dt}W(t) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}(t))W(t). \quad (3-77)$$

这个方程可分离变量, 其解给出式 (3-74). □

现在我们回到非齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3-78)$$

其中 $\mathbf{A} \in C(I, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{g} \in C(I, \mathbb{R}^n)$. 由于非齐次系统 (3-78) 的两个解之差满足对应的齐次系统 (3-64), 故只需求一个特解. 这可用下面假设进行

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(t, t_0)\mathbf{c}(t), \quad \mathbf{c}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3-79)$$

这就是熟知的常数变易法 (或参数变易法).

微分这个假设, 可得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(t, t_0)\dot{\mathbf{c}}(t), \quad (3-80)$$

与方程 (3-78) 比较得

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{H}(t_0, t)\mathbf{g}(t). \quad (3-81)$$

积分这个方程得

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t_0, s)\mathbf{g}(s) ds, \quad (3-82)$$

从而得到 (利用式 (3-72)):

定理 3.10 非齐次系统对应于初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解是

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t, s)\mathbf{g}(s) ds, \quad (3-83)$$

其中 $\mathbf{H}(t, t_0)$ 是对应齐次系统的主解矩阵.

为结束这一节, 我们强调不存在求解线性系统的一般方法, 除了平凡情形 $n = 1$ (问题 1.22). 但是, 如果知道了一个解则可将阶数降低 1 (问题 3.28).

问题 3.24 (矩阵的微分运算) 假设 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$ 可微. 求证式 (3-62) 和式 (3-63). (提示: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$).

问题 3.25 求证对任何 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{A} , 我们有

$$\det(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{A} + o(\varepsilon)) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + o(\varepsilon).$$

(提示: 例如若尔当 (Jordan) 标准形).

问题 3.26 对系统

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

计算 $\mathbf{H}(t, t_0)$.

问题 3.27 考虑方程 $\ddot{x} = q(t)x + g(t)$.

(1) 求证齐次方程的两个解 u, v 的朗斯基 (Wronsky) 行列式

$$W(u, v) = u(t)\dot{v}(t) - \dot{u}(t)v(t)$$

与 t 无关.

(2) 求证对应系统的基本解矩阵是

$$\mathbf{H}(t, s) = \frac{1}{W(u, v)} \begin{pmatrix} u(t)\dot{v}(s) - v(t)\dot{u}(s) & v(t)u(s) - v(s)u(t) \\ \dot{v}(s)\dot{u}(t) - \dot{v}(t)\dot{u}(s) & u(s)\dot{v}(t) - v(s)\dot{u}(t) \end{pmatrix},$$

并利用常数变易公式证明

$$x(t) = \frac{u(t)}{W(u,v)} \int v(s)g(s)ds - \frac{v(t)}{W(u,v)} \int u(s)g(s)ds$$

是非齐次方程的解.

(3) 给定齐次方程的一个解 $u(t)$, 作常数变易猜测 $v(t) = c(t)u(t)$, 求证第二个解由

$$v(t) = u(t) \int \frac{1}{u(s)^2} ds$$

给出. 在使得 u 为零的点这个公式就不成立, 但在这种点可用 Rofe-Beketov 公式代替:

$$v(t) = u(t) \int \frac{(q(s) + 1)(u(s)^2 - u'(s)^2)}{(u(s)^2 + u'(s)^2)^2} ds - \frac{u'(t)}{u(t)^2 + u'(t)^2}.$$

(4) 求证如果 $u(t)$ 是齐次方程的解, 则 $\phi = u'/u$ 满足里卡蒂 (Riccati) 方程

$$\dot{\phi} + \phi^2 = q(t).$$

问题 3.28 (达朗贝尔 (d' Alembert) 降阶) 假设 2×2 系统 $\dot{x} = A(t)x$ 已知有一个解 $x_0(t)$, 作坐标变换

$$x(t) = X(t)y(t), \text{ 其中 } X(t) = \begin{pmatrix} x_{0,1}(t) & 0 \\ x_{0,2}(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

求证, 若 $x_{0,1}(t) \neq 0$, 对新坐标 $y(t)$ 的微分方程为

$$\dot{y} = X(t)^{-1}A(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

特别地, 右端不包含 y_1 . 因此, 对这个系统可用先解第二个分量 (它仅包含 y_2), 然后积分第一个分量来求解.

推广这个结果到 $n \times n$ 系统.

问题 3.29 对系统

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix},$$

计算 $\mathbf{II}(t, t_0)$ (提示: $x_0(t) = (1, t^2)$ 是一个解).

问题 3.30 (达朗贝尔 (d' Alembert) 降阶) 考虑 n 阶方程

$$x^{(n)} + q_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + q_1(t)\dot{x} + q_0(t)x = 0.$$

求证如果知道它的一个解 $x_1(t)$, 常数变易猜测 $x(t) = c(t)x_1(t)$ 给出 \dot{c} 的 $(n-1)$ 阶方程. 因此可将阶数降低 1.

问题 3.31 (量子力学) 只可能达到有限个状态的量子力学系统由复值向量 $\psi(t) \in \mathbb{C}^n$ 描述. 在时间 t 系统处在第 j 个状态的概率是分量绝对值的平方 $|\psi_j|^2$. 由于仅存在 n 个可能状态, 这些概率必须加起来等于 1, 就是说, ψ 必须标准化,

即 $|\psi| = 1$. 这个系统的时间发展由薛定谔 (Schrodinger) 方程

$$i \dot{\psi}(t) = H(t)\psi(t), \quad \psi(t_0) = \psi_0$$

给出, 其中 $H(t)$ 是自-伴矩阵, 即 $H(t)^* = H(t)$. (这里 A^* 是伴随矩阵 (转置的复共轭)). 称矩阵 $H(t)$ 为 (哈密顿 Hamilton) 矩阵, 它描述交互作用. 求证这个方程的解是

$$\psi(t) = U(t, t_0)\psi_0, \quad U(t, t) = I,$$

其中 $U(t, t_0)$ 是酉矩阵, 即 $U(t, t_0)^{-1} = U(t, t_0)^*$ (提示: 问题 3.24). 我们得知, 如果 ψ_0 是标准化的, 则对所有 t , $\psi(t)$ 保持标准化.

每一个可观察值 (可测量的量) 对应于自-伴矩阵, 譬如 L_0 . 如果系统处在状态 $\psi(t)$, 则 L_0 的度量的期望值是

$$\langle \psi(t), L_0 \psi(t) \rangle,$$

其中 $\langle \phi, \psi \rangle = \phi^* \psi$ 是 \mathbb{C}^n 中的数量积. 求证

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t), L_0 \psi(t) \rangle = i \langle \psi(t), [H(t), L_0] \psi(t) \rangle,$$

其中 $[H, L] = HL - LH$ 是换位子.

问题 3.32 求证如果 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds = \infty$, 则方程 (3-64) 有无界解.

(提示: 式 (3-74)).

问题 3.33 求证

$$\| \mathbf{II}(t, t_0) \| \leq e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds} \quad (3-84)$$

(提示: 问题 2.12).

问题 3.34 对任何矩阵 A , 矩阵 $\text{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ 是对称的, 因此它只有实特征值.

(其中 A^* 是伴随矩阵 (转置的复共轭)). 设 α_0 是它的最大特征值.

假设 $A(t)$ 给定, $\alpha_0(t)$ 定义如上. 求证

$$\| \mathbf{II}(t, t_0) \| \leq \exp \left| \int_{t_0}^t \alpha_0(s) ds \right|.$$

(提示: 对 $x(t) = \mathbf{II}(t, t_0) x_0$ 计算 $\frac{d}{dt} |x(t)|^2$, 并注意到, 对每一个 $x \in \mathbb{R}^n$ 有 $\langle x, \text{Re}(A) x \rangle \leq \alpha_0 |x|^2$).

注: 如果 $A(t) \equiv A$ 是常数矩阵, 我们可以做得更好一点, 用 A 的最大特征值的实部加上任意小 ε 代替 α_0 (为覆盖可能的多项式项, ε 是必要的). 也可参考定理 7.1. 因此, 我们可猜想一般情形同样也成立. 但是, 由下面问题的 3.37, 可知这是不对的.

问题 3.35 (长时间渐近性) 假设

$$\int_0^{\infty} \|A(t)\| dt < \infty.$$

求证方程 (3-64) 的每一个解 $\mathbf{x}(t)$ 收敛于相同极限:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\infty}.$$

(提示: 首先证明所有解有界, 然后利用对应的积分方程).

3.5 线性周期系统

在这一节我们要考虑 (3-64) 的一个特殊情形, 其中 $A(t)$ 是周期的,

$$A(t+T) = A(t), \quad T > 0. \quad (3-85)$$

由这个周期性条件得知, 如果 $\mathbf{x}(t)$ 是解, 则 $\mathbf{x}(t+T)$ 也是解. 此外, 我们甚至有

引理 3.11 假设 $A(t)$ 是周期矩阵, 周期为 T . 则主解矩阵满足

$$\mathbf{II}(t+T, t_0+T) = \mathbf{II}(t, t_0). \quad (3-86)$$

证明 由 $\frac{d}{dt} \mathbf{II}(t+T, t_0+T) = A(t+T) \mathbf{II}(t+T, t_0+T) = A(t) \mathbf{II}(t+T, t_0+T)$ 和

$\mathbf{II}(t_0+T, t_0+T) = \mathbf{I}$, 我们看到 $\mathbf{II}(t+T, t_0+T)$ 是 (3-68) 的解. 由唯一性它等于 $\mathbf{II}(t, t_0)$. \square

因此, 这建议我们研究当主解矩阵移动一个周期时将会发生什么, 即考虑单值矩阵

$$\mathbf{M}(t_0) = \mathbf{II}(t_0+T, t_0). \quad (3-87)$$

注意, 由我们前面的引理 $\mathbf{M}(t_0)$ 是周期的, 即 $\mathbf{M}(t_0+T) = \mathbf{M}(t_0)$.

第一个朴素的猜测是经过一个周期以后, 所有的初始条件将回到它们的开始值 (即 $\mathbf{M}(t_0) = \mathbf{I}$), 因此所有解是周期的. 但是, 这期望太高, 因为在一维情况下, $A(t)$ 是常数时这就已经不成立了.

不过, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{II}(t_0 + \ell T, t_0) &= \mathbf{II}(t_0 + \ell T, t_0 + (\ell-1)T) \mathbf{II}(t_0 + (\ell-1)T, t_0) \\ &= \mathbf{M}(t_0 + (\ell-1)T) \mathbf{II}(t_0 + (\ell-1)T, t_0) \\ &= \mathbf{M}(t_0) \mathbf{II}(t_0 + (\ell-1)T, t_0) \\ &= \mathbf{M}(t_0) \mathbf{I} \mathbf{II}(t_0, t_0) = \mathbf{M}(t_0)^\ell. \end{aligned} \quad (3-88)$$

因此, 如果我们在每一步移动一个周期, $\mathbf{II}(t, t_0)$ 具有指数性质. 如果我们把这个指数项因子去掉, 剩下的就是周期了.

为了去掉指数项因子, 我们需要对 $\frac{t}{T} = \ell$ 不是整数时给出 $\mathbf{M}(t_0)^\ell$ 的意义. 如果

$\mathbf{M}(t_0)$ 是一个数, 通常的方法是令 $\mathbf{M}(t_0)^{\ell/T} = \exp\left(\frac{\ell}{T} \ln(\mathbf{M}(t_0))\right)$. 为模仿这个技

巧需要满足

$$\mathbf{M}(t_0) = \exp(\mathbf{TQ}(t_0)), \quad \mathbf{Q}(t_0 + T) = \mathbf{Q}(t_0) \quad (3-89)$$

的矩阵 $\mathbf{Q}(t_0)$, 这是可能的, 当且仅当 $\det(\mathbf{M}(t_0)) \neq 0$ (见 3.6 节). 不过要注意, 这样的 $\mathbf{Q}(t_0)$ 不是唯一的.

由刘维尔 (Liouville) 公式 (3-74), 得 $\det(\mathbf{M}(t_0)) \neq 0$, 由此得知单值矩阵的行列式

$$\det(\mathbf{M}(t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{tr}(\mathbf{A}(s)) ds\right) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr}(\mathbf{A}(s)) ds\right) \quad (3-90)$$

与 t_0 无关且为正.

现在记

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{P}(t, t_0) \exp((t - t_0)\mathbf{Q}(t_0)), \quad (3-91)$$

直接计算得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t+T, t_0) &= \mathbf{H}(t+T, t_0) \mathbf{M}(t_0)^{-1} e^{-(t-t_0)\mathbf{Q}(t_0)} \\ &= \mathbf{H}(t+T, t_0+T) e^{-(t-t_0)\mathbf{Q}(t_0)} \\ &= \mathbf{H}(t, t_0) e^{-(t-t_0)\mathbf{Q}(t_0)} = \mathbf{P}(t, t_0), \end{aligned} \quad (3-92)$$

这是我们所预期的. 概括起来, 我们已经证明了下面的弗洛凯 (Floquet) 定理.

定理 3.12 (弗洛凯 (Floquet)) 假设 $\mathbf{A}(t)$ 是周期的, 则对应的线性系统的主解矩阵有形式

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{P}(t, t_0) \exp((t - t_0)\mathbf{Q}(t_0)), \quad (3-93)$$

其中 $\mathbf{P}(\cdot, t_0)$ 与 $\mathbf{A}(\cdot)$ 有相同的周期, 且 $\mathbf{P}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$.

注意, 任何一个基本解矩阵都可写为这个形式 (问题 3.38). 此外, 回忆 $D\mathbf{Q}(t_0)F$ 可以是复的, 即使 $\mathbf{A}(t)$ 是实的, 除非 $\mathbf{M}(t_0)$ 的所有实特征值都是正的. 但是, 由于 $\mathbf{A}(t)$ 也是有周期 $2T$, 我们从引理 3.20 推断 $\mathbf{H}(t_0 + 2T, t_0) = \mathbf{M}(t_0)^2$.

推论 3.13 假设 $\mathbf{A}(t)$ 是实且周期的, 则对应的线性系统的基本解矩阵有形式

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \tilde{\mathbf{P}}(t, t_0) \exp((t - t_0)\tilde{\mathbf{Q}}(t_0)), \quad (3-94)$$

其中 $\tilde{\mathbf{P}}(t, t_0)$, $\tilde{\mathbf{Q}}(t_0)$ 都是实的, 且 $\tilde{\mathbf{P}}(\cdot, t_0)$ 有 $\mathbf{A}(\cdot)$ 的两倍周期.

因此为了了解解的性态, 我们需要弄清楚单值矩阵的若尔当 (Jordan) 标准形. 不过, 我们可以任选一个 t_0 , 这是因为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t_1) &= \mathbf{H}(t_1 + T, t_0 + T) \mathbf{M}(t_0) \mathbf{H}(t_0, t_1) \\ &= \mathbf{H}(t_1, t_0) \mathbf{M}(t_0) \mathbf{H}(t_1, t_0)^{-1}, \end{aligned} \quad (3-95)$$

故 $\mathbf{M}(t_1)$ 和 $\mathbf{M}(t_0)$ 是相似矩阵, 因而, 特征值和若尔当 (Jordan) 结构与 t_0 无关 (从而对 $\mathbf{Q}(t_0)$ 也相同).

$\mathbf{M}(t_0)$ 的特征值 ρ_j 就是熟知的弗洛凯 (Floquet) 乘子 (也称为特征乘子),

$\mathbf{Q}(t_0)$ 的特征值 γ_j 是熟知的费洛凯 (Floquet) 指数 (特征指数). 由引理 3.3, 它们由 $\rho_j = e^{T\gamma_j}$ 相联系. 由于 $\mathbf{P}(t, t_0)$ 的周期部分有界, 如推论 3.5 我们得到

推论 3.14 线性周期系统是稳定的, 如果所有费洛凯 (Floquet) 乘子满足 $|\rho_j| \leq 1$ (相应的, 所有费洛凯 (Floquet) 指数满足 $\operatorname{Re}(\gamma_j) \leq 0$), 且所有满足 $|\rho_j| = 1$ 的费洛凯 (Floquet) 乘子 (相应的, 所有满足 $\operatorname{Re}(\gamma_j) = 0$ 的费洛凯 (Floquet) 指数) 的代数重次和几何重次相等.

线性周期系统是渐近稳定的, 如果所有 Floquet 乘子满足 $|\rho_j| < 1$ (相应的, 所有 Floquet 指数满足 $\operatorname{Re}(\gamma_j) < 0$).

在说明如何把这个结果用到具体例子之前, 我们指出定理 3.12 的另一个推论, 其证明留作练习 (问题 3.39).

推论 3.15 变换 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}(t, t_0)^{-1}\mathbf{x}(t)$ 将系统化为常系数系统

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}(t_0)\mathbf{y}(t) \quad (3-96)$$

还要注意, 由于 $\mathbf{H}(t, t_0)^{-1} = \mathbf{H}(t_0, t)$, 我们有

$$\mathbf{P}(t, t_0)^{-1} = \exp((t - t_0)\mathbf{Q}(t_0))\mathbf{P}(t_0, t)\exp(-(t - t_0)\mathbf{Q}(t)).$$

在这一节的余下部分, 我们考虑一个最著名的例子, **Hill 方程**

$$\ddot{x} + q(t)x = 0, q(t + T) = q(t) \quad (3-97)$$

这时相应的系统是

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -qx. \quad (3-98)$$

它的主解矩阵是

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \begin{pmatrix} c(t, t_0) & s(t, t_0) \\ \dot{c}(t, t_0) & \dot{s}(t, t_0) \end{pmatrix}, \quad (3-99)$$

其中 $c(t, t_0)$ 是 (3-97) 对应于初始条件 $c(t_0, t_0) = 1, \bar{c}(t_0, t_0) = 0$ 的解, 类似地, $s(t, t_0)$ 是对应于 $s(t_0, t_0) = 0, \dot{s}(t_0, t_0) = 1$ 的解. 刘维尔 (Liouville) 公式 (3-74) 显示

$$\det \mathbf{H}(t, t_0) = 1, \quad (3-100)$$

因此, 单值矩阵

$$\mathbf{M}(t_0) = \begin{pmatrix} c(t_0 + T, t_0) & s(t_0 + T, t_0) \\ \dot{c}(t_0 + T, t_0) & \dot{s}(t_0 + T, t_0) \end{pmatrix} \quad (3-101)$$

的特征方程是

$$\rho^2 - 2\Delta\rho + 1 = 0, \quad (3-102)$$

其中

$$\Delta = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{M}(t_0))}{2} = \frac{c(t_0 + T, t_0) + \dot{s}(t_0 + T, t_0)}{2}. \quad (3-103)$$

如果 $\Delta^2 > 1$, 我们有两个相异实特征值

$$\rho_{\pm} = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 1} = \sigma e^{\pm T\gamma}, \quad (3-104)$$

相应的特征向量是

$$\mathbf{u}_{\pm}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ m_{\pm}(t_0) \end{pmatrix}, \quad (3-105)$$

其中

$$m_{\pm}(t_0) = \frac{\rho_{\pm} - c(t_0 + T, t_0)}{s(t_0 + T, t_0)} = \frac{\dot{s}(t_0 + T, t_0)}{\rho_{\pm} - \dot{c}(t_0 + T, t_0)} \quad (3-106)$$

注意, $\mathbf{u}_{\pm}(t_0)$ 也是对应于特征值 $\gamma_{\pm} = \frac{1}{T} \ln(\rho_{\pm})$ 的特征向量 (引理 3.3). 由 ρ_+ $\rho_- = 1$, 我们得 $\gamma_+ + \gamma_- = 0 \pmod{2\pi i}$, 不妨假设 $|\rho_+| > 1$, 相应地, $\operatorname{Re}(\gamma_+) \geq 0$. 如果我们令 $\gamma = \operatorname{Re}(\gamma_+)$, 则当 $\rho_{\pm} > 0$ (即 $\Delta = (\rho_+ + \rho_-)/2 > 0$) 时有 $\gamma_{\pm} = \pm \gamma$, 以及, 当 $\rho_{\pm} < 0$ (即 $\Delta < 0$) 时有 $\gamma_{\pm} = \pm i\pi$.

考虑

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t, t_0) \mathbf{u}_{\pm}(t_0) &= \mathbf{P}(t, t_0) \exp((t - t_0) \mathbf{Q}(t_0)) \mathbf{u}_{\pm}(t_0) \\ &= e^{\gamma_{\pm}(t - t_0)} \mathbf{P}(t, t_0) \mathbf{u}_{\pm}(t_0), \end{aligned} \quad (3-107)$$

我们看到, 存在两个下面形式的解:

$$e^{\pm \gamma t} \mathbf{p}_{\pm}(t), \quad \mathbf{p}_{\pm}(t + T) = \mathbf{p}_{\pm}(t), \sigma^2 = 1, \gamma > 0, \quad (3-108)$$

其中 $\sigma = \operatorname{sgn}(\Delta)$ 和 $\gamma = \operatorname{Re}(\gamma_+)$.

如果 $\Delta^2 < 1$, 我们有两个不同的复共轭特征值, 因此有两个解

$$e^{\pm i\gamma t} \mathbf{p}_{\pm}(t), \quad \mathbf{p}_{\pm}(t + T) = \mathbf{p}_{\pm}(t), \gamma > 0, \quad (3-109)$$

其中 $\gamma = \operatorname{Im}(\gamma_+)$.

如果 $\Delta^2 = 1$, 我们有 $\rho_{\pm} = \Delta$, 于是或者两个解是

$$\mathbf{p}_{\pm}(t), \quad \mathbf{p}_{\pm}(t + T) = \sigma \mathbf{p}_{\pm}(t), \quad (3-110)$$

或者两个解是

$$\mathbf{p}_+(t), \mathbf{p}_-(t) + t \mathbf{p}_+(t), \quad \mathbf{p}_{\pm}(t + T) = \sigma \mathbf{p}_{\pm}(t), \quad (3-111)$$

其中 $\sigma = \operatorname{sgn}(\Delta) = \Delta$.

由于周期方程称为稳定的, 如果其所有解有界. 这样, 我们证明了

定理 3.16 当 $|\Delta| < 1$ 时希尔 (Hill) 方程稳定, 当 $|\Delta| > 1$ 时不稳定.

这个结果在应用中具有很高的实用价值. 例如, 在四极电场中电荷质点移动的势由

$$U(x) = e \frac{V}{a^2} (x_1^2 - x_2^2) \quad (3-112)$$

给出. 对应的牛顿 (Newton) 运动方程是 (1.5), 其外力为

$$\mathbf{F}(x) = - \frac{\partial}{\partial x} U(x). \quad (3-113)$$

如果电压关于时间是按照 $V(t) = V_0 + V_1 \cos(t)$ 变化, 则得运动方程 (忽略磁感应

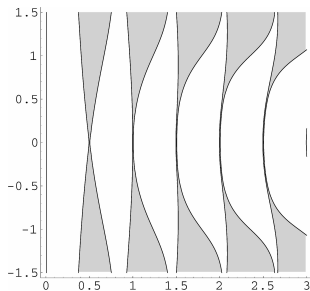
场)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{2e}{ma^2}(V_0 + V_1 \cos(t))x_1, \\ \ddot{x}_2 &= +\frac{2e}{ma^2}(V_0 + V_1 \cos(t))x_2, \\ \ddot{x}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3-114)$$

关于坐标 x_1 和 x_2 的方程是**马蒂厄 (Mathieu) 方程**

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + \varepsilon \cos(t))x. \quad (3-115)$$

对 $0 \leq \omega \leq 3$ 和 $-1.5 \leq \varepsilon \leq 1.5$, 数值计算显示稳定性区域如下图



其中暗褐色区域表示在其中 $\Delta(\omega, \varepsilon)^2 > 1$, 就是说, 在其中方程不稳定. 注意到这些不稳定区域从点 $2\omega \in \mathbb{N}_0$ 显现, 在这些点 $\Delta(\omega, 0) = \cos(2\pi\omega) = \pm 1$.

如果质点的质量位于这些区域的某个区域内, 则改变电压 V_0 和 V_1 可使得我们的方程 (仅按 x_1 或 x_2 方向) 稳定. 这可被用来按照它们的质量过滤电荷.

希尔 (Hill) 方程也可用于量子力学中的简单一维模型, 用它来描述单个电子在周期场中的运动 (参考问题 5.25). 我们将在 5.5 节进一步研究这个问题.

问题 3.36 考虑 $\dot{x} = a(t)x$, 其中 $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是以 T 为周期的周期函数. 计算弗洛凯 (Floquet) 指数, 以及求在这情形的 $\mathbf{P}(t, t_0)$ 和 $\mathbf{Q}(t_0)$.

问题 3.37 计算单值矩阵, 其中 $\mathbf{A}(t)$ 的周期为 1, 且由下面公式给出.

$$\mathbf{A}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

α 的什么值能使得所有解保持有界? 求证当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在问题 3.34 中求得的上界对考虑的 $\mathbf{A}(t/n)$ 是最佳的.

问题 3.38 求证任何线性周期系统的基本解矩阵 $\mathbf{U}(t)$ 可以写为 $\mathbf{U}(t) = \mathbf{V}(t)\exp(t\mathbf{R})$, 其中 $\mathbf{V}(t)$ 是周期的, \mathbf{R} 相似于 $\mathbf{Q}(t_0)$.

问题 3.39 证明推论 3.15.

问题 3.40 考虑非齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),$$

其中 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{g}(t)$ 的周期为 T . 求证如果 1 不是单值矩阵 $\mathbf{M}(t_0)$ 的特征值, 这个方程有周期为 T 的唯一周期解 (提示: 注意 $\mathbf{x}(t)$ 为周期解, 当且仅当 $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$, 以及应用常数变易公式 (3-83)).

3.6 附录: 若尔当 (Jordan) 标准形

在这一节我们要复习若尔当 (Jordan) 标准形的某些进一步知识, 此外, 为了后面的应用也引入一些进一步的结果.

考虑空间的分解 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$. 如果两个子空间 V_1 和 V_2 在 \mathbf{A} 作用下不变, 即 $\mathbf{A}V_j \subseteq V_j, j=1, 2$, 则这样的分解称为约化 \mathbf{A} . 改变到新基 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ 使得 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ 是 V_1 的基, 以及 $\mathbf{u}_{m+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ 为 V_2 的基, 得知在这些新坐标下, \mathbf{A} 变换成分块形

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \quad (3-116)$$

此外, 我们甚至有

$$\mathbf{U}^{-1}\exp(\mathbf{A})\mathbf{U} = \exp(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{A}_1) & 0 \\ 0 & \exp(\mathbf{A}_2) \end{pmatrix}. \quad (3-117)$$

因此, 我们需要约化 \mathbf{A} 的某些不变子空间. 如果我们考虑一维子空间, 则对某 $\alpha \in \mathbb{C}$, 我们必须有

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (3-118)$$

如果 (3-118) 成立, α 称为 \mathbf{A} 的特征值, \mathbf{x} 称为特征向量. 特别, α 是特征值, 当且仅当 $\text{Ker}(\mathbf{A} - \alpha) \neq \{\mathbf{0}\}$, 因此, 这时 $\text{Ker}(\mathbf{A} - \alpha)$ 称为 α 的特征空间. 这里我们用了 $\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$ 的简短记号. 由于 $\text{Ker}(\mathbf{A} - \alpha) \neq \{\mathbf{0}\}$ 得知 $\mathbf{A} - \alpha$ 不可逆, 特征值是 \mathbf{A} 的特征多项式的零点,

$$\chi_{\mathbf{A}}(z) = \prod_{j=1}^m (z - \alpha_j)^{a_j} = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}), \quad (3-119)$$

其中 $\alpha_i \neq \alpha_j$. 数 a_j 称为 α_j 的代数重次, $g_j = \dim \text{Ker}(\mathbf{A} - \alpha_j)$ 称为 α_j 的几何重次.

\mathbf{A} 的所有特征值的集合称为 \mathbf{A} 的谱,

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(\mathbf{A} - \alpha) \neq \{\mathbf{0}\}\}. \quad (3-120)$$

如果发生所有的特征值的代数重次与几何重次相同, 我们就可以求得仅由特征向量组成的基且 $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ 是对角矩阵, 对角线元素是特征值. 此外, $\mathbf{U}^{-1}\exp(\mathbf{A})\mathbf{U}$ 也是对角矩阵, 对角线元素是特征值的指数.

但是, 事情并不是那样的简单, 一般我们仅仅有 $g_j \leq a_j$. 这导致考虑的恰当对象应该是广义特征空间

$$V_j = \text{Ker}(A - \alpha_j)^{a_j}. \quad (3-121)$$

引理 3.17 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 并设 $V_j = \text{Ker}(A - \alpha_j)^{a_j}$. 则 V_j 是不变子空间, 且 \mathbb{C}^n 可以写为直和

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m. \quad (3-122)$$

作为结论我们得到

定理 3.18 (凯莱-哈密顿 (Cayley-Hamilton)) 每一个矩阵满足它自己的特征方程

$$\chi_A(A) = 0. \quad (3-123)$$

因此, 如果我们选择广义特征向量为基 u_j , 则矩阵 $U = (u_1, \cdots, u_n)$ 将 A 变为块状结构

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}, \quad (3-124)$$

其中每一个矩阵 A_j 只有一个特征值 α_j . 故只需限于这个情形就够了.

向量 $u \in \mathbb{C}^n$ 称为 A 的循环向量, 如果向量 $A^j u$, $0 \leq j \leq n-1$ 张成 \mathbb{C}^n , 即

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} a_j A^j u \mid a_j \in \mathbb{C} \right\}. \quad (3-125)$$

在 A 仅有一个特征值的情形, 循环向量 u 十分简单. 取

$$U = (u, (A - \alpha)u, \cdots, (A - \alpha)^{n-1}u), \quad (3-126)$$

于是 U 将 A 变换成

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}, \quad (3-127)$$

由凯莱-哈密顿 (Cayley-Hamilton) 定理, $\chi_A(A) = (A - \alpha)^n = \mathbf{0}$. 矩阵 (3-127) 称为若尔当 (Jordan) 块. 它是 $\alpha I + N$ 形式, 其中 N 是幂零矩阵, 即 $N^n = \mathbf{0}$.

因此, 我们需要将空间 V_j 分解为空间 V_{jk} 的直和, 其中每一个都有循环向量 $u_{j,k}$.

我们再把注意力限于 A 只有一个特征值 α 的情形, 并令

$$K_j = \text{Ker}(A - \alpha)^j. \quad (3-128)$$

在循环情形我们有 $K_j = \bigoplus_{k=1}^j \text{span} \{ (A - \alpha)^{n-k} \}$. 在一般情形, 利用 $K_j \subseteq K_{j+1}$ 求得 L_k , 使得

$$K_j = \bigoplus_{k=1}^j L_k. \quad (3-129)$$

在循环情形 $L_n = \text{span} \{ u \}$, 用 $A - \alpha$ 递归地作用到 L_1 . 模仿这个, 令 $M_n = L_n$, 由于

$(A - \alpha) L_{j+1} \subseteq L_j$, 我们有 $L_{n-1} = (A \oplus \alpha) L_n \oplus M_{n-1}$. 如此进行我们可以求得 M_l , 使得

$$L_k = \bigoplus_{l=k}^n (A - \alpha)^{n-l} M_l \quad (3-130)$$

现在对 $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ 选择基 \mathbf{u}_j , 其中每一个 \mathbf{u}_j 位于某个 M_l 内. 设 V_j 是由 $(A - \alpha)^l \mathbf{u}_j$ 生成的子空间, 则由集 M_k 的构造, 以及每一个 V_j 有循环向量 \mathbf{u}_j , 我们有 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$. 综上所述, 我们得到:

定理 3.19 (若尔当 (Jordan) 标准形) 设 A 是 $n \times n$ 矩阵. 则存在 \mathbb{C}^n 的基, 使得 A 是块状形, 每一块如 (3-127).

此外, 为了求矩阵指数, 我们也将需要它的逆. 就是说, 给定矩阵 A , 我们要求矩阵 B 使得

$$A = \exp(B). \quad (3-131)$$

在这情形下我们称 $B = \ln(A)$ 为 A 的矩阵对数. 显然, 由式 (3-17) 这只能当 $\det(A) \neq 0$ 时才有可能. 因此, 假设 $\det(A) \neq 0$. 不妨假设 A 是若尔当 (Jordan) 标准形, 并考虑只有一个若尔当 (Jordan) 块的情形, $A = \alpha I + N$.

由对数函数的幂级数

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j, \quad |x| < 1 \quad (3-132)$$

的启发, 我们令

$$B = \ln(\alpha)I + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j\alpha^j} N^j$$

$$= \begin{pmatrix} \ln(\alpha) & \frac{1}{\alpha} & \frac{-1}{2\alpha^2} & \cdots & \frac{(-1)^n}{(n-1)\alpha^{n-1}} \\ & \ln(\alpha) & \frac{1}{\alpha} & \ddots & \vdots \\ & & \ln(\alpha) & \ddots & \frac{-1}{2\alpha^2} \\ & & & \ddots & \frac{1}{\alpha} \\ & & & & \ln(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3-133)$$

由构造我们有 $\exp(B) = A$. 注意 B 不是唯一的, 因为 $\ln(\alpha)$ 的不同分支给出不同的矩阵. 此外, 它可能是复的, 即使 A 是实的. 事实上, 如果 A 有负特征值, 则 $\ln(\alpha) = \ln(|\alpha|) + i\pi$, 从而 $\ln(A)$ 是复的. 我们取 A^2 的对数以避免这个情况.

引理 3.20 矩阵 A 有对数, 当且仅当 $\det(A) \neq 0$. 此外, 如果 A 是实的且所有实特征值都是正的, 则存在实对数. 特别地, 如果 A 是实的, 则我们可以对 A^2

求实对数.

证明 由于 A^2 的特征值是 A 的特征值的平方 (证明它), 如果所有实特征值是正的, 剩下的只需证明 B 是实的.

在这些情形下只有若尔当 (Jordan) 块对应于复特征值可能有问题. 考虑实若尔当 (Jordan) 标准形 (3-18), 并注意对

$$R = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha) & \operatorname{Im}(\alpha) \\ -\operatorname{Im}(\alpha) & \operatorname{Re}(\alpha) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \alpha = re^{i\varphi}, \quad (3-134)$$

的对数为

$$\ln(R) = \ln(r)I + \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3-135)$$

现在将实若尔当 (Jordan) 块 $RI + N$ 写为 $R(I + R^{-1}N)$. 于是我们可以验证

$$\log(RI + N) = \log(R)I + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} R^{-j} N^j.$$

这就是我们所要求的对数. □

类似地, 我们指出, 预解式 $(A - z)^{-1}$ 也可容易由若尔当 (Jordan) 标准形计算, 因为对若尔当 (Jordan) 块我们有

$$(J - z)^{-1} = \frac{1}{\alpha - z} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(z - \alpha)^j} N^j. \quad (3-136)$$

特别地, 注意, 预解式 $(A - z)^{-1}$ 在每一个特征值有极点, 其留数是到对应的广义特征空间的投影算子.

为了后面应用我们也引入子空间

$$\begin{aligned} E^{\pm}(A) &= \bigoplus_{|\alpha_j|^{\pm} > 1} \operatorname{Ker}(A - \alpha_j)^{a_j}, \\ E^0(A) &= \bigoplus_{|\alpha_j| = 1} \operatorname{Ker}(A - \alpha_j)^{a_j}, \end{aligned} \quad (3-137)$$

其中 α_j 是 A 的特征值, a_j 是对应的代数重次. 子空间 $E^-(A)$, $E^+(A)$, $E^0(A)$ 分别称为 A 的压缩子空间, 膨胀子空间, 和酉子空间. A 在这些子空间上的限制分别记为 A_+ , A_- , A_0 .

问题 3.41 用 $r(A) = \max_j \{ |\alpha_j| \}$ 记 A 的谱半径. 求证对每一个 $\varepsilon > 0$ 存在范数 $\|\cdot\|_{\varepsilon}$, 使得

$$\|A\|_{\varepsilon} = \sup_{x: \|x\|_{\varepsilon} = 1} \|Ax\|_{\varepsilon} \leq r(A) + \varepsilon.$$

(提示: 只需对若尔当 (Jordan) 块 $J = \alpha I + N$ 证明我们的论断 (为什么?). 现在选择对角矩阵 $Q = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^n)$, 并注意到 $Q^{-1}JQ = \alpha I + \varepsilon N$.)

问题 3.42 假设 $A(\lambda)$ 是 C^k 的且没有酉子空间. 则映到压缩子空间, 膨胀子空间上的投影算子 $P^{\pm}(A(\lambda))$ 是 C^k 的. (提示: 利用公式

$$P^{-1}(A(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - A(\lambda)}, P^{+}(A(\lambda)) = I - P^{-}(A(\lambda)).)$$

第 4 章 复域中的微分方程

这一章要求读者具备一些复分析的基本知识. 读者如果仅对动力系统有兴趣可跳过这章和下一章直接阅读第 6 章.

4.1 基本的存在唯一性结果

到现在为止, 对要求的微分方程我们仅加上较弱的光滑性要求. 另一方面, 我们遇到最多的例子事实上要求的方程是(实)解析的. 但是, 迄今为止, 我们还没有用到这个附加信息. 这一章我们将说明如何用复平面这个捷径对这些问题作更深入的了解.

在这一章我们将考虑复域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ 中的微分方程. 假设函数

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad (z, w) \mapsto f(z, w) \quad (4-1)$$

在 Ω 内解析(复可微), 并考虑微分方程

$$w' = f(z, w), \quad w(z_0) = w_0. \quad (4-2)$$

这里的导数表示复微分

$$w'(z_0) = \frac{dw(z_0)}{dz} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0}, \quad (4-3)$$

因此仅当 $w(z)$ 解析时方程才有意义.

回忆复导数的存在性条件比实导数的存在性条件强得多. 事实上, 由它得知 $w(z)$ 可在 z_0 附近展开成收敛的幂级数:

$$w(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j, \quad w^{(j)}(z_0) = \frac{d^j w(z_0)}{dz^j}. \quad (4-4)$$

设 $f(w) = f(w_1, \dots, w_n)$ 依赖于多个变量, 又若复偏导数

$$\frac{\partial}{\partial w_j} f(w), \quad 1 \leq j \leq n \quad (4-5)$$

存在(如同式(4-3), 在复意义下定义), 则称它是解析的. 再次可以证明, $f(w)$ 可展开成收敛的幂级数. 但是我们在这里还不需要这个结果. 只注意由这个定义得知, 如果 $f(z, w)$ 关于 $n+1$ 个变量 (z, w) 解析, $w(z)$ 关于单个变量 z 解析, 则由链规则 $f(z, w(z))$ 关于单个变量 z 解析.

显然, 第一个问题是要问解是否存在. 很幸运, 这可由实情形的相同方法回答. 我们只需指出其中的差别.

第一步是将式 (4-2) 写为

$$w(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(\zeta, w(\zeta)) d\zeta. \quad (4-6)$$

但是要注意, 我们必须更加小心, 因为现在的积分是沿着复平面的路径并且与路径无关, 但这看上去并不明显. 另一方面, 由于我们仅考虑围绕 z_0 的小圆盘中的 z 值. 而圆盘是单连通的, 由柯西 (Cauchy) 积分定理得知上面的积分与路径无关. 接下来, 我们需要适当的巴拿赫 (Banach) 空间. 由于解析函数序列的一致极限仍是解析函数, 如同在实情形, 我们可以用 sup 范数

$$\sup_{|z - z_0| < \varepsilon} |w(z)|. \quad (4-7)$$

现在我们可如实数情形得到

定理 4.1 假设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 解析. 则初值问题 (4-2) 有定义在 z_0 的充分小圆盘内的唯一解.

接下来, 我们定义最大解. 很遗憾, 这个问题比实情形更棘手. 事实上, 设 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 是两个分别定义在区域 U_1 和 U_2 上的解. 如果它们在点 $z_1 \in U_1 \cap U_2$ 重合, 由我们的局部唯一性结果, 它们也在 z_1 的邻域内重合. 因此, 重合的区域是开的. 由 $w_j(z)$ 的连续性它也是闭的 (在相对拓扑下), 因此, 这两个解在包含 z_1 的 $U_1 \cap U_2$ 的连通分支上重合. 但一般地说, 如下面例子显示, 我们可以得出的结论也仅有这些.

例 考虑

$$w' = \frac{1}{z}, w(1) = 0, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4-8)$$

其解是

$$w(z) = \ln(z) = \ln|z| + i\arg(z), \quad (4-9)$$

选择不同的分支分割 (即沿着半射线, $\arg(z)$ 将跳过 2π) 得到不同的解. 特别地, 注意没有唯一的最大定义域.

最后, 我们指出, 如何利用解的解析性来研究简单的微分方程.

例 考虑

$$w' + w^2 = z, w(0) = w_0. \quad (4-10)$$

这是里卡蒂 (Riccati) 方程, 我们已经知道它不可能求解, 除非我们求得特解. 但是, 经过尝试一段时间以后, 你会同意看起来要找一个解不大可能, 因此需要尝试其他方法. 由于知道在 0 附近解是解析的, 因此我们至少可以将解写为

$$w(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j z^j, w'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j w_j z^{j-1}, \quad (4-11)$$

将它们代入我们的方程得

$$\sum_{j=0}^{\infty} j w_j z^{j-1} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j z^j \right)^2 = z. \quad (4-12)$$

将乘积展开并整理 z 的幂得

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1) w_{j+1} + \sum_{k=0}^j w_k w_{j-k} \right) z^j = z. \quad (4-13)$$

比较 z 的幂我们得到

$$w_1 = -w_0^2, w_2 = w_0^3 + \frac{1}{2}, w_{j+1} = \frac{-1}{j+1} \sum_{k=0}^j w_k w_{j-k}. \quad (4-14)$$

从而, 我们至少找到了解的幂级数系数的递推公式. 但是, 应该指出, 如果包含 w 的 f 太复杂, 那就不能再工作. 因此我们将仅进一步研究线性方程, 不过, 另一方面我们可允许它的系数有极点, 这在应用中通常是需要的. 事实上, 最后, 允许我们用特殊函数求解上面的方程 (问题 4.6).

问题 4.1 对下面的方程求幂级数解.

$$(1) w' + w = z, w(0) = w_0.$$

$$(2) w' + w^2 = z^2, w(0) = w_0.$$

$$(3) w' + w = \frac{1}{1-z}, w(0) = w_0.$$

问题 4.2 用上面的幂级数方法尝试求解初值问题

$$w'' = (z^2 - 1)w, w(0) = 1, w'(0) = 0,$$

你能不能求这个解的封闭形式? 第二个解是什么? (提示问题 3.27 (3)).

问题 4.3 对微分方程

$$z^2 w' = w - z$$

作幂级数解猜测. 所得级数的收敛半径是什么?

问题 4.4 考虑在 $z_0 = 0$ 时的式 (4-2). 证明第 n 次皮卡 (Picard) 迭代与直到 n 次的幂级数解相同. 用它可推导有效的数值方法, 例如熟知的 Sochacki 算法. (提示: 设 $w_n(z)$ 是皮卡 (Picard) 迭代, 又假设 $w(z) = w_n(z) + O(z^{n+1})$. 关于 $f(z, w(z))$ 和 $f(z, w_n(z))$ 之间的关系你能得到什么样的利普布茨 (Lipschitz) 估计?).

4.2 二阶方程的费罗贝尼斯 (Frobenius) 方法

作为开始, 我们将注意力局限于二阶线性方程

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0, \quad (4-15)$$

这在应用中是最重要的. 显然, 我们可将对实情形知道的一切 (例如叠加原理等) 转移到复情形, 而且我们知道, 当系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 解析时解也是解析的. 但是, 在许多应用中系数有奇点. 且我们的主要问题之一是了解解在这样的奇点附近的性

态. 这就是我们下面的课题. 为记号方便起见, 假设奇点是 $z_0 = 0$.

回忆函数 $u(z)$ 在区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$ 内解析, 它可以展开成 (收敛的) 洛朗 (Laurent) 级数

$$u(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j z^j, \quad z \in \Omega. \quad (4-16)$$

如果所有的负系数 $u_j, j < 0$ 为零, 则它在 $z=0$ 解析. 如果只有有限个负系数为零, 就说 $u(z)$ 有极点. 对 $m > n$ 满足 $u_{-m} = 0$ 的最小 n 称为极点的阶. 反之, 如果无穷多个负系数不为零, 则称 $z=0$ 为本性奇点.

现在让我们开始考虑一个典型例子.

例 考虑 Euler 方程

$$u'' + \frac{p_0}{z} u' + \frac{q_0}{z^2} u = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4-17)$$

显然, 系数在 $z=0$ 有极点, 因为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 不是单连通区域, 解不可能对一切 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 有定义. 因此我们沿着负实轴引入分支分割, 并考虑单连通区域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. 为了求解方程 (4-17), 用变换

$$\zeta = \ln(z) = \ln|z| + i \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) < \pi \quad (4-18)$$

将 Ω 映为带子 $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. 在新坐标下这个方程化为

$$w'' + (p_0 - 1)w' + q_0 w = 0, \quad \omega(\zeta) = u(e^\zeta). \quad (4-19)$$

由于它有常系数, 按照定理 3.6, 借助于特征值

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}(1 - p_0 \pm \sqrt{(p_0 - 1)^2 - 4q_0}) \quad (4-20)$$

给出解的基. 如果特征值相异, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 我们有两个线性无关解

$$u_1(z) = z^{\alpha_1}, u_2(z) = z^{\alpha_2}; \quad (4-21)$$

如果它们相等, $\alpha_1 = \alpha_2$, 我们有两个线性无关解

$$u_1(z) = z^{\alpha_1}, u_2(z) = \ln(z)z^{\alpha_1}. \quad (4-22)$$

现在我们回到一般情形. 作为热身, 先看一阶方程.

引理 4.2 一阶方程

$$u' + p(z)u = 0 \quad (4-23)$$

有形如

$$u(z) = z^\alpha h(z), \quad h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j, h_0 = 1 \quad (4-24)$$

的解, 当且仅当 $p(z)$ 有一阶极点. 在这种情形下, 我们有 $\alpha = -\lim_{z \rightarrow 0} zp(z)$ 且 $h(z)$ 的幂级数的收敛半径与 $p(z)$ 的洛朗 (Laurent) 级数的收敛半径相同.

证明 如果 $p(z) = \frac{p_0}{z} + p_1 + p_2 z + \cdots$ 有一阶极点, 则上面方程的解可明显地表

示为 (问题 1.13)

$$\begin{aligned} u(z) &= \exp\left(-\int^z p(t) dt\right) = \exp(-p_0 \ln(z) + c - p_1 z + \cdots) \\ &= z^{-p_0} \exp(c - p_1 z + \cdots). \end{aligned} \quad (4-25)$$

反之, 我们有

$$p(z) = -\frac{u'(z)}{u(z)} = -\frac{\alpha}{z} - \frac{h'(z)}{h(z)}. \quad (4-26)$$

□

现在我们准备好了来讨论我们的二阶方程. 由这个例子启发, 假设系数的形式是

$$p(z) = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j, \quad q(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j, \quad (4-27)$$

我们求形如

$$u(z) = z^\alpha h(z) \quad (4-28)$$

的解, 其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 附近解析, 且满足 $h(0) = 1$. 这是广义幂级数方法, 或者称为弗罗贝尼斯 (Frobenius) 方法.

将这些代入式 (4-15) 并比较系数得

$$((\alpha + j)(\alpha + j - 1) + (\alpha + j)p_0 + q_0)h_j + \sum_{k=1}^j (\alpha + j - k)p_k + q_k h_{j-k} = 0. \quad (4-29)$$

由于 $h_0 = 1$, 对 $j=0$ 这给出特征方程

$$\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0. \quad (4-30)$$

因此可选择特征指数 α :

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}(1 - p_0 \pm \sqrt{(p_0 - 1)^2 - 4q_0}). \quad (4-31)$$

这里我们取根的标准分支, 使得 $\operatorname{Re}(\alpha_1) \geq \operatorname{Re}(\alpha_2)$.

在情形 $\alpha = \alpha_1$, 我们得到 h_j 的递归公式

$$h_j = \frac{-1}{(\alpha_1 - \alpha_2 + j)j} \sum_{k=1}^j ((\alpha_1 + j - k)p_k + q_k) h_{j-k}, \quad (4-32)$$

这永远可解. 在情形 $\alpha = \alpha_2$ 我们得到

$$h_j = \frac{-1}{(\alpha_2 - \alpha_1 + j)j} \sum_{k=1}^j ((\alpha_2 + j - k)p_k + q_k) h_{j-k}, \quad (4-33)$$

当 $\alpha_1 = \alpha_2 + m$, $m \in \mathbb{N}_0$ 时可能会存在问题.

在此情形下, 由我们的选择 $h_0 = 1$, 则 h_j , $1 \leq j \leq m-1$ 唯一确定, 对 $j = m$ 我

们有

$$0 = \sum_{k=1}^m ((\alpha_1 - k)p_k + q_k)h_{m-k}. \quad (4-34)$$

如果这个方程满足, 我们可以按我们的要求选择 h_m , 并保持 $h_j, j > m$ 仍是递归地确定. 否则不存在形如 $z^{\alpha_2}h(z)$ 的解.

因此, 对最后这个情形需要用另外的方法. 为了求第二个解的形式我们用常数变易法猜测 (比较问题 3.30). 设

$$u_2(z) = c(z)u_1(z) = c(z)z^{\alpha_1}h_1(z). \quad (4-35)$$

于是

$$c''(z) + \left(2\frac{\alpha_1}{z} + 2\frac{h_1'(z)}{h_1(z)} + p(z)\right)c'(z) = 0, \quad (4-36)$$

其中

$$\left(2\frac{\alpha_1}{z} + 2\frac{h_1'(z)}{h_1(z)} + p(z)\right) = \frac{1 - \alpha_2 + \alpha_1}{z} + 2h_1'(0) + p_1 + \dots, \quad (4-37)$$

因此, 由引理 4.2,

$$c'(z) = z^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad c_0 \neq 0. \quad (4-38)$$

如果 $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N}_0$, 积分 (略去积分常数) 得

$$c(z) = z^{\alpha_2 - \alpha_1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{\alpha_2 - \alpha_1 + j} z^j, \quad (4-39)$$

如果 $\alpha_1 - \alpha_2 = m \in \mathbb{N}_0$ 则得

$$c(z) = z^{\alpha_2 - \alpha_1} \sum_{j=0, j \neq m}^{\infty} \frac{c_j}{\alpha_2 - \alpha_1 + j} z^j + c_m \ln(z). \quad (4-40)$$

在后一情形 c_m 可为零, 除非 $m=0$.

综上所述, 我们有

定理 4.3 假设系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 分别 (至多) 有一阶和二阶极点. 那么, 如果 α_1, α_2 是特征指数, 则可发生两种情形:

情形 1. 如果 $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N}_0$, 则基础解系是

$$u_j(z) = z^{\alpha_j} h_1(z), \quad j=1, 2, \quad (4-41)$$

其中函数 $h_j(z)$ 在 $z=0$ 附近解析且满足 $h_j(0) = 1$.

情形 2. 如果 $\alpha_1 - \alpha_2 = m \in \mathbb{N}_0$ 则基础解系是

$$u_1(z) = z^{\alpha_1} h_1(z), \quad (4-42)$$

$$u_2(z) = z^{\alpha_1} h_2(z) + c \ln(z) u_1(z),$$

其中函数 $h_j(z)$ 在 $z=0$ 附近解析且满足 $h_j(0) = 1$. 常数 $c \in \mathbb{C}$ 可以为零, 除非 $m=0$.

此外, 在这两个情形 $h_1(z)$ 和 $h_2(z)$ 的幂级数的收敛半径至少等于 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的收敛半径中较小的.

证明 由于 u_1 和 u_2 显然线性无关, 只需证明 $h_1(z)$ 的幂级数有非零的收敛半径. 设 h_j 是由式 (4-32) 定义的系数, 令 $R > 0$ 小于 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的收敛半径. 我们证明, 对某个 $C > 0$ 有 $|h_j| R^j \leq C$.

记

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} |p_j| R^j, \quad Q = \sum_{j=1}^{\infty} |q_j| R^j. \quad (4-43)$$

于是存在 $j_0 > 0$, 使得对 $j > j_0$ 有

$$\frac{(|\alpha_1| + j)P + Q}{(\operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2) + j)j} \leq 1. \quad (4-44)$$

选取 $C = \max_{0 \leq j \leq j_0} |h_j| R^j$. 则论断对 $j \leq j_0$ 成立, 且可由归纳法进行: 假设它直到 $j-1$ 成立, 则由式 (4-32) 我们得到

$$\begin{aligned} |h_j| R^j &\leq \frac{1}{(\operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2) + j)j} \sum_{k=1}^j ((|\alpha_1| + j) |p_k| + |q_k|) C R^k \\ &\leq \frac{(|\alpha_1| + j)P + Q}{(\operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2) + j)j} C \leq C, \end{aligned} \quad (4-45)$$

这就证明了我们的论断. □

进一步, 关于 p 和 q 的条件是最佳的:

定理 4.4 (富克斯 (Fuchs)) 方程 (4-15) 有如上一定理的两个解 $u_1(z)$ 和 $u_2(z)$, 当且仅当 $p(z)$ 和 $zq(z)$ 至少有一阶极点.

证明 考虑 $v(z) = (u_2(z)/u_1(z))'$, 并注意到它有形式 $v(z) = z^\beta k(z)$, 其中 $k(z)$ 在 $z=0$ 附近解析.

现在, 直接计算显示

$$p(z) = -\frac{v'(z)}{v(z)} - 2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}, \quad (4-46)$$

由于右端至多有一阶极点, 故 p 也是.

类似地,

$$q(z) = -\frac{u_1''(z)}{u_1(z)} - p(z)\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} \quad (4-47)$$

至多有二阶极点. □

最后, 注意这个特征也可用以对在 $z_0 = \infty$ 的奇点进行分类. 为此作变量变换 $\zeta = \frac{1}{z}$, 它将我们的方程变为

$$w'' + (2\zeta^{-1} - \zeta^{-2}p(\zeta^{-1}))w' + \zeta^{-4}q(\zeta)^{-1}w = 0, \quad w(\zeta) = u(\zeta^{-1}). \quad (4-48)$$

特别地, 这个方程是在 $z_0 = \infty$ 的富克斯 (Fuchs) 型, 当且仅当

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (4-49)$$

现在让我们看看如何将这个方法应用到具体的例子. 这将额外证明上面所有的情形都可出现.

例 考虑著名的贝塞尔 (Bessel) 方程

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (4-50)$$

不妨假设 $\operatorname{Re}(\nu) \geq 0$. A_0 的特征值为 $\alpha_{1,2} = \pm \nu$, 因此有如形

$$u_1(z) = z^\nu \sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} z^j, \quad h_{1,0} = 1 \quad (4-51)$$

的解. 将它代入我们的方程得

$$z^2 \sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} (j + \nu - 1)(j + \nu) z^{j+\nu-2} + z \sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} (j + \nu) z^{j+\nu-1} + (z^2 - \nu^2) \sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} z^{j+\nu} = 0, \quad (4-52)$$

两边乘上 $z^{-\nu}$ 并整理 z 的幂得

$$\sum_{j=0}^{\infty} (h_{1,j} (j + \nu - 1)(j + \nu) + h_{1,j} (j + \nu) + h_{1,j-2} - h_{1,j} \nu^2) z^j = 0, \quad (4-53)$$

其中, 对 $j < 0$ 我们令 $h_{1,j} = 0$. 比较系数我们得到未知展开系数 $h_{1,j}$ 的递推关系

$$j(j + 2\nu)h_{1,j} + h_{1,j-2} = 0. \quad (4-54)$$

特别地, 对偶次系数 $h_{1,2j}$ 和奇次系数 $h_{1,2j+1}$, 这可看作为两个独立的递推关系. 容易看出这个解是

$$h_{1,2j} = \frac{(-1)^j}{4^j j! (\nu + 1)}, \quad h_{2j+1} = 0, \quad (4-55)$$

这里我们用了 **Pochhammer** 符号

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_j = x(x+1)\cdots(x+j-1) = \frac{\Gamma(x+j)}{\Gamma(x)}. \quad (4-56)$$

具有不同规范化的这个解称为 ν 阶贝塞尔 (Bessel) 函数

$$J_\nu(z) = \frac{u_1(z)}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\nu + j + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu}. \quad (4-57)$$

现在要问第二个解是什么? 为此我们对 $-\nu$ 研究这个方程. 在上面的计算中以 $-\nu$ 代替 ν , 我们看到, 只要对所有 j , 有 $(-\nu + 1)_j \neq 0$, 这只能发生在 $\nu \in \mathbb{N}_0$, 这时

我们就可以求得第二个 (线性无关) 解 $J_{-\nu}(z)$. 因此即使对 $\nu = \frac{2n+1}{2}$, 其中 $\alpha_1 -$

$\alpha_2 = 2\nu = 2n + 1 \in \mathbb{N}$, 也不存在对数项. 剩下的考虑 $\nu = n \in \mathbb{N}$ 的情形. 这时候所有的奇次系数必须为零, 对偶次系数的递推关系在 $2j = 2n$ 给出矛盾. 因此剩下只可能是对数解

$$u_2(z) = z^{-n} h_2(z) + \ln(z) u_1(z). \quad (4-58)$$

将此代入我们的方程得

$$j(j-2n)h_{2,j} + h_{2,j-2} = -2c(j-n)h_{1,j-2n}. \quad (4-59)$$

又一次所有的奇次系数 $h_{2,2j+1} = 0$. 偶次系数 $h_{2,2j}$ 对 $j < n$ 如前可递推地确定

$$h_{2,2j} = \frac{1}{4^j j! (\nu-1)_j}, \quad j < n. \quad (4-60)$$

对 $j = 2n$ 递推地得到 $h_{2,2(n-1)} = -2cn$, 由此得

$$c = \frac{-2}{4^n n! (n-1)!}. \quad (4-61)$$

一旦我们选定了值 $h_{2,2n}$, 剩下的系数现在由

$$4j(j+n)h_{2,2j+2n} + h_{2,2(j-1)+2n} = -2c(2j+n)h_{1,2j} \quad (4-62)$$

递推地得到. 这是一阶线性非齐次递推关系式, 其解 (见问题 4.3, 并注意齐次方程的解是 $h_{1,2j}$) 是

$$h_{2,2j+2n} = h_{1,2j} \left(h_{2,2n} - \frac{c}{2} \sum_{k=1}^j \frac{2k+n}{k(k+n)} \right). \quad (4-63)$$

选取 $h_{2,2n} = \frac{c}{2} H_n$, 其中

$$H_j = \sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \quad (4-64)$$

是调和数, 我们得到

$$h_{2,2n+2j} = \frac{(-1)^j (H_{j+n} + H_j)}{4^{j+n} (n-1)! j! (j+n)!}. \quad (4-65)$$

通常, 将下面的线性组合

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= -\frac{2^n (n-1)!}{\pi} u_2(z) + \frac{\gamma - \ln(2)}{2^{n-1} \pi n!} u_1(z) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (n-1)!}{j! (1-n)_j} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (H_{j+n} + H_j)}{j! (j+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n} \end{aligned} \quad (4-66)$$

取为第二个无关解. 这里 $\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} (H_j - \ln(j))$ 是欧拉常数.

最后, 我们注意, 通常也用 (汉克尔 (Hankel) 函数)

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} \quad (4-67)$$

作为贝塞尔 (Bessel) 方程第二个解. 对固定的 $z \neq 0$, 右端对 $\nu \in \mathbb{N}_0$ 有奇点. 但是, 由于

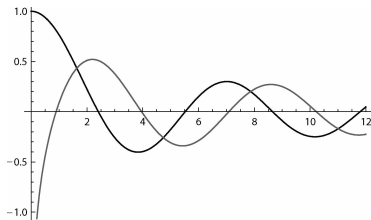
$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4-68)$$

它可以移去,且可证明其极限是第二个线性无关解(问题4.4),它与上面的一个重合.

在你的袖珍(式)计算器中可能找不到贝塞尔函数,它们可在 Mathematica 找到. 例如. 这里是 $\nu=0$ 阶贝塞尔(Bessel)和汉克尔(Hankel)函数的图像.

In[i] := Plot[{ BesselJ[0, z], BesselY[0, z] }, { z, 0, 12}]

Out[i] =



问题 4.5 证明如果 $p(z) = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} p_{j-k} z^j$, 那么引理 4.2 中的 $h(x)$ 的系数可由

$$h_j = \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} p_{j-k} h_k$$

递推地给出.

问题 4.6 考虑一阶线性非齐次差分方程

$$x(n+1) - f(n)x(n) = g(n), f(n) \neq 0.$$

求证齐次方程 ($g=0$) 的解是

$$x_h(n) = x(0) \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} f(j), & \text{对 } n > 0, \\ 1, & \text{对 } n = 0, \\ \prod_{j=0}^{-1} f(j)^{-1}, & \text{对 } n < 0. \end{cases}$$

对非齐次方程用常数变易法,并证明其解为

$$x(n) = x_h(n) + \begin{cases} x_h(n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g(j)}{x_h(j+1)}, & \text{对 } n > 0, \\ 0, & \text{对 } n = 0, \\ -x_h(n) \sum_{j=0}^{-1} \frac{g(j)}{x_h(j+1)}, & \text{对 } n < 0. \end{cases}$$

问题 4.7 (汉克尔(Hankel)函数) 对所有 ν , 求证汉克尔(Hankel)函数是贝塞尔(Bessel)方程的第二个线性无关解,其方法如下:

(1) 证明式(4-68),并得知汉克尔(Hankel)函数对所有的 ν 有定义,关于变量 z 和 ν (对 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 和 $\operatorname{Re}(\nu) > 0$) 解析.

(2) 求证贝塞尔(Bessel)方程的两个解的修正朗斯基(Wronsky)行列式

$$W(u(z), v(z)) = z(u(z)v'(z) - u'(z)v(z))$$

是常数. (提示: 刘维尔 (Liouville) 公式). 证明

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \frac{-2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\pi}\sin(\pi\nu).$$

(提示: 利用朗斯基 (Wronsky) 行列式的常数性质, 并在 $z=0$ 计算它. 你不需要对 Γ 函数去证明这个公式).

(3) 现在证明

$$W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) = \frac{2}{\pi}.$$

关于 z 微分这个公式, 并证明 $Y_\nu(z)$ 满足贝塞尔 (Bessel) 方程.

问题 4.8 求证贝塞尔 (Bessel) 函数的下面性质.

$$(1) (z^{\pm\nu}J_\nu(z))' = \pm z^{\pm\nu}J_{\nu\mp 1}(z).$$

$$(2) J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z}J_\nu(z).$$

$$(3) J_{\nu+1}(z) - J_{\nu-1}(z) = 2J_\nu(z)'$$

问题 4.9 求证

$$\int_0^a J_\nu(z)^2 z dz = \frac{a^2}{2} J_\nu'(a)^2 + \frac{a^2 - \nu^2}{2} J_\nu(a)^2, \quad \nu \geq 0.$$

(提示: 用 $u'(z)$ 乘贝塞尔 (Bessel) 方程两边并证明所得结果是只差一项的全微分).

问题 4.10 实际中出现的许多微分方程并不是标准形式 (4-50). 求证微分方程

$$w'' + \frac{1-2a}{z}w' + \left((bcz^{c-1})^2 + \frac{a^2 - \nu^2 c^2}{z^2} \right) w = 0$$

可通过变换 $w(z) = z^a u(bz^c)$ 化为贝塞尔 (Bessel) 方程.

借助贝塞尔 (Bessel) 函数求

$$w' + w^2 = z,$$

$$w' = w^2 - z^2$$

的解. (提示: 问题 3.27 (4)).

问题 4.11 (勒让德 (Legendre) 多项式) 勒让德 (Legendre) 方程是

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + n(n+1)w = 0.$$

在 $z=0$ 作幂级数解猜测, 如果 $n \in \mathbb{N}_0$, 求证存在多项式解 $p_n(z)$. $p_n(z)$, 其阶数是什么?

问题 4.12 (超几何方程). 超几何方程是

$$z(1-z)w'' + (c - (1+a+b)z)w' - abw = 0.$$

将所有奇点 (包括 ∞) 进行分类. 利用弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 方法求证

$$F(a, b, c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j, \quad -c \notin \mathbb{N}_0$$

是解. 这是超几何函数. 求证 $z^{1-c}w(z)$ 也是超几何方程的解但具有不同系数. 利用它证明 $F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)$ 是对 $c-2 \notin \mathbb{N}_0$ 时的第二个解. 这给出 $c \notin \mathbb{Z}$ 时的两个线性无关解.

问题 4.13 (汇合超几何方程) 汇合超几何方程是

$$zw'' + (c-z)w' - aw = 0.$$

将所有奇点 (包括 ∞) 进行分类. 利用弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 方法证明

$$K(a, b; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j}{(c)_j j!} z^j, \quad -c \notin \mathbb{N}_0$$

是解. 这是汇合超几何函数, 或者库默尔 (Kummer) 函数.

求证 $z^{1-c}w(z)$ 也是汇合超几何方程的解但具有不同系数. 利用这个证明 $K(a-c+1, 2-c; z)$ 是对 $c-2 \notin \mathbb{N}_0$ 时的第二个解. 这给出 $c \notin \mathbb{Z}$ 时的两个线性无关解.

问题 4.14 求证具有有限个富克斯 (Fuchs) 型奇点 z_0, \dots, z_n, ∞ 的任何二阶方程 (4-15) 都有形式

$$p(z) = \sum_{j=0}^n \frac{p_j}{z - z_j}, \quad q(z) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{q_j}{(z - z_j)^2} + \frac{r_j}{z - z_j} \right),$$

其中 $p_j, q_j, r_j \in \mathbb{C}$ 且必须满足

$$\sum_{j=0}^n r_j = 0.$$

证明如果另外有 $p_\infty = q_\infty = r_\infty = 0$, 则没有 ∞ 奇点, 其中

$$p_\infty = 2 - \sum_{j=0}^n p_j, \quad q_\infty = \sum_{j=0}^n (q_j + r_j z_j), \quad r_\infty = \sum_{j=0}^n z_j (2q_j + r_j z_j).$$

问题 4.15 (黎曼 (Riemann) 方程) 二阶方程称为 (黎曼 Riemann 方程), 如果它只有三个 Fuchs 型奇点 (包括 ∞). 黎曼 (Riemann) 方程的解用黎曼 (Riemann) 符号

$$P \left\{ \begin{matrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\} z,$$

表示, 其中数 z_j 是奇点, z_j 下面的数对应于特征指数.

我们回忆, 对给定的点 $z_j, j = 0, 1, 2$, 利用分式线性变换 (默比乌斯 (Möbius) 变换)

$$\zeta(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

将它们映为任何给定的其他点 $\zeta_j = \zeta(z_j), j = 0, 1, 2$. 取 $\zeta_0 = 0, \zeta_1 = 1$ 和 $\zeta_2 = \infty$,

并证明

$$P \begin{Bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix} z = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} az+b \\ cz+d \end{Bmatrix}.$$

对情形 $z_0=0$, $z_1=1$ 和 $z_2=\infty$, 证明

$$p(z) = \frac{p_0}{z} + \frac{p_1}{z-1}, \quad q(z) = \frac{q_0}{z^2} + \frac{r_0}{z} + \frac{q_1}{(z-1)^2} - \frac{r_0}{z-1}.$$

用特征指数表示 $p(z)$ 和 $q(z)$ 并证明

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1.$$

所得的黎曼 (Riemann) 方程由它的符号唯一确定.

最后, 证明

$$z^\nu (1-z)^\mu P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix} z = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 + \nu & \beta_1 + \mu & \gamma_1 - \mu - \nu \\ \alpha_2 + \nu & \beta_2 + \mu & \gamma_2 - \mu - \nu \end{Bmatrix} z,$$

由此得知任何一个黎曼 (Riemann) 方程可以变为超几何方程

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix} z.$$

求证勒让德 (Legendre) 方程是黎曼 (Riemann) 方程. 求将它化为超几何方程的变换.

4.3 含有奇点的线性系统

现在我们要把上一节的结果推广到线性系统

$$w' = A(z)w, \quad w(z_0) = w_0, \quad z, z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}, \quad (4-69)$$

其中 $A(z)$ 是矩阵, 其元素在 Ω 内解析.

如在实数情形, 可以证明我们总可以将解延拓. 但是, 一般地, 如同在例 (4-8) 中看到的, 沿着不同路径的延拓可得到不同的解. 但如果 Ω 是单连通区域这个问题就不会发生.

定理 4.5 假设 $w' = A(z)w + b(z)$ 是线性方程, 其中 $A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $b: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ 在单连通区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 内解析. 则对每一点 $z_0 \in \Omega$, 对应的初值问题有定义在整个 Ω 上的唯一解.

特别地, 每一个解的幂级数在以 z_0 为中心且包含在 Ω 内的最大圆盘内收敛.

证明 如果 Ω 是中心在 z_0 的圆盘, 定理结论由推论 2.6 得知. 对一般的 Ω ,

取 $z \in \Omega$ 并令 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ 为从 z_0 到 z 的路径. 围绕 γ 每一点, 在半径与初始条件和 $t \in [0, 1]$ 无关的球内, 我们有解. 故我们可以沿着路径 γ 利用解析延拓定义 $w(z)$ 的值. 由于 Ω 是单连通的, 这个值由单值定理唯一确定. \square

这个结果有一个重要推论, 即线性方程的解仅在方程系数有孤立奇点处才可能有奇点(极点, 本性奇点, 或者分支点). 就是说, 奇点是固定的且不依赖于初始条件. 另一方面, 非线性方程一般有**可移奇点**, 作为简单例子, 方程

$$w' = -w^2 \quad (4-70)$$

的通解是

$$w(z) = \frac{1}{z - z_0}. \quad (4-71)$$

仅有的可移奇点是极点的方程在应用中起着重要作用. 可以证明一阶方程

$$w' = f(z, w), \quad (4-72)$$

如果其右端是 w 的有理函数, 是 z 的全纯函数, 且是里卡蒂 (Riccati) 型的, 即 $f(z, w) = f_0(z) + f_1(z)w + f_2(z)w^2$, 则可以化为二阶线性方程 (参看问题 3.27 (4)). 在二阶方程

$$w'' = f(z, w, w') \quad (4-73)$$

的情形, 它是 w, w' 的有理函数, z 的全纯函数, 潘勒韦 (Painlevé) 与他的合作者曾经证明存在 6 个方程不能线性化或用已知的特殊函数求解. 这些就是现在大家知道的 (潘勒韦 (Painlevé) **超越方程**). 例如, 其中前两个方程是

$$P_I: w'' = 6w^2 + z, \quad (4-74)$$

$$P_{II}: w'' = zw + 2w^3 + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}.$$

它们在非线性物理学中起着如特殊函数 (如贝塞尔 (Bessel) 函数) 一样的重要作用. 不过, 这超出了我们介绍的范围, 读者可参看例如 Ince [16] 的书. 现在我们回到线性方程.

又如在实数情形, 叠加原理成立. 因此我们可以找到主解矩阵 $\mathbf{H}(z, z_0)$, 使得 (4-69) 的解是

$$w(z) = \mathbf{H}(z, z_0)w_0. \quad (4-75)$$

不难看出, 我们也可将刘维尔 (Liouville) 公式 (3.74) 推广到复数情形.

再次假设奇点在 $z_0 = 0$. 为此我们从一个典型例子开始. 系统

$$w' = \frac{1}{z}Aw, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (4-76)$$

称为**欧拉 (Euler) 系统**. 显然它在 $z=0$ 有一阶极点. 由于 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 不是单连通的, 解对所有 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 可能没有定义. 从而我们可以沿着负实轴引入分支分割并考虑单连通区域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. 为了求解 (4-76), 用变换

$$\zeta = \ln(z) = \ln|z| + i\arg(z), \quad -\pi < \arg(z) < \pi, \quad (4-77)$$

它将 Ω 映为长条区域 $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \ln(z) < \pi\}$. 在新坐标下这个方程化为

$$w' = Aw, \quad w(\zeta) = w(e^\zeta). \quad (4-78)$$

因此基础解系为

$$W(z) = z^A = \exp(\ln(z)A), \quad (4-79)$$

其中最后一个表达式理解为 z^A 的定义. 通常, 如果 A 是若尔当 (Jordan) 标准形, 则 z^A 可容易计算. 特别地, 对若尔当 (Jordan) 块 J 我们得到

$$z^J = z^\alpha \begin{pmatrix} 1 & \ln(z) & \frac{\ln(z)^2}{2!} & \cdots & \frac{\ln(z)^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & \ln(z) & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{\ln(z)^2}{2!} \\ & & & \ddots & \ln(z) \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-80)$$

因此解是由形如 $z^\alpha \ln(z)^k$ 的项组成, 其中 α 是 A 的特征值, k 是非负整数. 注意, 对数项仅在 A 不可对角化时才出现.

如下面结果所示, 这个性质事实上是任何孤立奇点附近的典型性质.

定理 4.6 假设 $A(z)$ 在 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ 内解析, 则 $w' = A(z)w$ 的基础解系有形式

$$W(z) = U(z)(z - z_0)^M, \quad (4-81)$$

其中 $U(z)$ 在 Ω 内解析.

证明 再次利用我们的变换 $\zeta = \ln(z)$ 得到

$$w' = e^\zeta A(e^\zeta)w, \quad \operatorname{Re}(\zeta) < \ln(z). \quad (4-82)$$

但是这个系统是周期系统, 周期为 $2\pi i$, 因此定理结论可如弗洛凯 (Floquet) 定理 (定理 3.12) 的证明得到.

□

注意到任何其他的基础解系 $\tilde{W}(z)$ 可以写为

$$\tilde{W}(z) = W(z)C = U(z)C(z - z_0)^{C^{-1}MC}, \quad \det(C) \neq 0 \quad (4-83)$$

因此, 我们有表达式 $\tilde{W}(z) = \tilde{U}(z)(z - z_0)^{\tilde{M}}$, 其中 \tilde{M} 线性地等价于 M .

请注意这个定理并不是说, 所有的坏项都在 $(z - z_0)^M$ 内. 事实上, $U(z)$ 在 z_0 有本性奇点. 但是, 如果不是, 奇点称为正则的且我们可容易地用

$$W(z) = U(z)(z - z_0)^m(z - z_0)^{M - ml}. \quad (4-84)$$

将 $(z - z_0)^M$ 中 $U(z)$ 的极点吸收掉. 但什么时候才可以这样做呢? 我们希望当 A

的本性奇点不是太坏时有这可能. 但是, 方程 $w' = \frac{1}{z^2}w$ 有解 $w(z) = \exp\left(-\frac{1}{z}\right)$, 它在 0 有本性奇点. 因此我们仅希望留下的是一阶极点. 我们说 z_0 是我们系统的简单奇点, 如果 $A(z)$ 在 z_0 (至多) 有一阶极点.

定理 4.7 假设 $A(z)$ 在 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ 内解析, 且在 z_0 有简单奇点. 则 $W(z)$ 的形式如式 (4-81), 且 $U(z)$ 可在 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ 内被选择为解析.

证明 不妨考虑 $z_0 = 0$, 只需证明 $U(z)$ 至多有一个极点. 设 $w(z)$ 是任一解. 此外, 对给定 $r_0 > 0$ 我们可以找到数 m , 使得对 $|z| \leq r_0$ 有 $\|A(z)\| \leq \frac{m}{|z|}$. 利用极坐标 $z = re^{i\varphi}$, 对 $0 < r \leq r_0$ 我们有

$$\begin{aligned} |w(re^{i\varphi})| &= |w(r_0 e^{i\varphi}) + \int_r^{r_0} A(se^{i\varphi})w(se^{i\varphi})e^{i\varphi} ds| \\ &\leq |w(r_0 e^{i\varphi})| + \int_r^{r_0} \frac{m}{s} |w(se^{i\varphi})| ds. \end{aligned} \quad (4-85)$$

应用格朗沃尔 (Gronwall) 不等式, 并对所有的 φ 取最大值, 得

$$|w(z)| \leq \sup_{\zeta: |\zeta|=r_0} |w(\zeta)| \left| \frac{r_0}{z} \right|^m, \quad (4-86)$$

这是我们所要求的估计. □

这个结果的逆一般不成立 (除了一维情形). 但是我们有

引理 4.8 如果 z_0 是正则奇点, 则 $A(z)$ 至多在 z_0 有极点.

证明 这由

$$A(z) = U'(z)U(z)^{-1} + \frac{1}{z - z_0}U(z)MU(z)^{-1} \quad (4-87)$$

得知. 因为 $\det(U(z))$ 至多可以有 m 阶零点, 因此 $U(z)^{-1}$ 的元素至多有 m 阶极点. □

由下面的例子看到, 这个结果是最佳的.

例

$$A(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & z^{-m} \\ z^m & m \end{pmatrix}, \quad U(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^m \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-88)$$

问题 4.16 设 z_0 是简单奇点, $W(z)$ 是如 (4-81) 中的基础解系. 求证

$$\det(W(z)) = (z - z_0)^{\operatorname{tr}(A_0)} d(z), \quad d(z_0) \neq 0,$$

其中 $d(z)$ 在 z_0 附近解析, 以及 $A_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) A(z)$. 此外, 得到 $\operatorname{tr}(A_0 - M) \in \mathbb{Z}$. (提示: 对行列式利用 Abel 恒等式 (3.74)).

4.4 弗洛贝尼乌斯 (Frobenius) 方法

在这一节我们继续研究简单奇点. 不失一般性令 $z_0 = 0$. 由于我们从定理 4.7 知道基础解系是什么样子, 因此可以假设

$$W(z) = U(z)z^M, U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j z^j, \quad U_0 \neq 0. \quad (4-89)$$

利用

$$A(z) = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} A_j z^j \quad (4-90)$$

并将它们代入我们的微分方程, 得到系数 U_j 的递推关系

$$U_j(j+M) = \sum_{k=0}^j A_k U_{j-k}. \quad (4-91)$$

但是, 由于我们并不知道 M , 这对我们并没有多少帮助. 由式 (4-79) 你可以猜想我们刚好有 $M = A_0$ 和 $U_0 = I$. 事实上, 如果我们假设 $\det(U_0) \neq 0$, 对 $j=0$ 我们得到 $U_0 M = A_0 U_0$, 因此, $W(z)U_0^{-1} = U(z)U_0^{-1}z^{A_0}$ 是预期的形式. 遗憾的是, 我们并不知道 $\det(U_0) \neq 0$, 甚至更坏地, 一般这是不对的 (见下面例子).

所以. 我们还是不要期望太高而先找简单解. 如果 μ 是 M 的特征值, 对应的特征向量是 u_0 , 则

$$w_0(z) = W(z)u_0 = z^\mu U(z)u_0 \quad (4-92)$$

是下面形式的解

$$w_0(z) = z^\alpha u_0(z), \quad u_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{0,j} z^j, \quad u_{0,0} \neq 0, \quad \alpha = \mu + m. \quad (4-93)$$

其中选择 $m \in \mathbb{N}_0$ 使得 $u_0(0) = u_{0,0} \neq 0$. 将这个假设解代入我们的微分方程, 分别地得到

$$(\alpha + j)u_{0,j} = \sum_{k=0}^j A_k u_{0,j-k}, \quad (4-94)$$

和

$$(A_0 - \alpha - j)u_{0,j} + \sum_{k=1}^j A_k u_{0,j-k} = 0. \quad (4-95)$$

特别地, 对 $j=0$ 有

$$(A_0 - \alpha)u_{0,0} = 0, \quad (4-96)$$

由此, 我们看到 α 必须是 A_0 的特征值!

现在, μ 对应于 $n > 1$ 的非平凡若尔当 (Jordan) 块的情形是什么? 由式 (4-80), 我们有对应的广义特征向量集 $u_l, 1 \leq l \leq n$, 使得

$$w_l(z) = W(z)u_l = z^\alpha \left(u_l(z) + \ln(z)u_{l-1}(z) + \cdots + \frac{\ln(z)^l}{l!}u_0(z) \right), \quad 1 \leq l \leq n \quad (4-97)$$

是 n 个解. 其中

$$u_l(z) = z^{\mu-\alpha}U(z)u_l = \sum_{j=m_l}^{\infty} u_{l,j}z^j, \quad u_{l,m_l} \neq 0, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (4-98)$$

如前, 选择 $m_l \in \mathbb{Z}$ 使得 $u_{l,m_l} \neq 0$ (注意, $m_l \geq \mu - \alpha = -m$). 为后面记号方便起见, 对 $j < m_l$ 我们令 $u_{l,j} = 0$, 以及 $u_{-1,j} = 0$.

再次, 将这假设解代入我们的微分方程, 得到

$$u_{l-1,j} = 0, j < m_l \quad (4-99)$$

以及

$$(\alpha + j)u_{l,j} + u_{l-1,j} = \sum_{k=1}^{j-m_l} A_k u_{l,j-k}, \quad j \geq m_l. \quad (4-100)$$

由第一部分得 $m_{l-1} \geq m_l$, 特别地, $m_l \leq m_0 = 0$. 由第二部分得到

$$(A_0 - \alpha - j)u_{l,j} + \sum_{k=1}^j A_k u_{l,j-k} = u_{l-1,j}, \quad j \geq m_l. \quad (4-101)$$

进一步, 对 $j = m_l$ 我们得到

$$(A_0 - \alpha - m_l)u_{l,m_l} = u_{l-1,m_l}. \quad (4-102)$$

因此存在两种情况, $m_l = m_{l-1}$ 和 $(A_0 - \alpha - m_l)u_{l,m_l} = u_{l-1,m_{l-1}}$, 即 $\alpha + m_{l-1}$ 对应于 A_0 的非平凡若尔当 (Jordan) 块. 或者, $m_l < m_{l-1}$ 和 $(A_0 - \alpha - m_l)u_{l,m_l} = 0$, 即 $\alpha + m_l$ 是 A_0 的其他特征值.

综上所述, 我们得到

定理 4.9 假设 $A(z)$ 在 $z_0 = 0$ 有简单极点, 其留数为 A_0 , 则 $w' = A(z)w$ 的每一个解具有形式

$$w(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^l u_{l-k}(z) \frac{\ln(z)^k}{k!}, \quad u_l(z) = \sum_{j=m_l}^{\infty} u_{l,j}z^j, \quad u_{l,m_l} \neq 0, \quad (4-103)$$

其中 $-m_l \in \mathbb{N}_0$ 以及 $m_l = m_{l-1}$ (令 $m_{-1} = 0$). 如果 $m_l = m_{l-1}$ (令 $m_{-1} = 0$), 则向量 u_{l,m_l} 是特征向量, $(A_0 - \alpha + m_l)u_{l,m_l} = 0$, 或者, 若 $m_l < m_{l-1}$, 它们是广义特征向量, $(A_0 - \alpha + m_l)u_{l,m_l} = u_{l,m_{l-1}}$.

特别地, M 和 A_0 的若尔当 (Jordan) 结构的联系如下:

定理 4.10 对 M 的每一个特征值 μ , 必须存在 A_0 的特征值 $\alpha = \mu + m$, $m \in \mathbb{N}_0$. 对 μ 的每个若尔当 (Jordan) 块存在 α 对应的若尔当 (Jordan) 块, 它可能小于或者等于前者. 如果小于, 则必须存在 A_0 的特征值 $\alpha_j = \alpha + m_j$, $-m_j \in \mathbb{N}$, 对应的若尔当 (Jordan) 块补足失去的部分.

如果 A_0 的两个特征值相差不是整数, 则 A_0 和 M 是相似的.

因此, 我们找到了我们的微分方程在奇点 $z = 0$ 邻域内解的可能形式的非常完

整的图像, 现在我们可以尝试求它的逆问题. 给定微分方程系统的解 (4-101), 其中 α 是 A_0 的特征值, 我们通过 (4-97) 来得到微分方程的解, 只要我们能够证明这个级数收敛.

但是在讨论收敛性问题之前, 我们想想如何求解方程组 (4-101). 如果数 $\alpha + j$ 不是 A_0 对 $j > 0$ 时的特征值, 则可以用 $(A_0 - \alpha - j)^{-1}$ 乘 (4-101), 而 $u_{l,j}$ 是由 $u_{l,j-1}$ 唯一确定的. 这可能不是永远能够办得到的, 但至少对 $j > j_0$, j_0 充分大时成立. 因此, 我们可对前面的系数 $u_{l,j}$, $0 \leq l \leq n$, $0 \leq j \leq j_0$ 的有限系统先解. 然后所有余下的系数用递推方式唯一确定.

定理 4.11 假设 $u_{l,j}$ 是方程 (4-101) 的解, 则由幂级数 (4-98) 定义的 $u_l(z)$ 与 $zA(z)$ 的围绕 $z=0$ 的幂级数的收敛半径相同. 另外, 通过 (4-97) 定义的 $w_l(z)$ 是 $w' = A(z)w$ 的解.

证明 假设 δ 小于 $zA(z)$ 围绕 $z=0$ 的幂级数的收敛半径, 记

$$M = \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \delta^j < \infty. \quad (4-104)$$

对向量值的展开系数 $\underline{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ 的空间赋予范数 (问题 4.17)

$$\|\underline{u}\| = \sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\| \delta^j. \quad (4-105)$$

我们的思想是把导致麻烦的前面 j_0 项去掉, 而视其余的为上面的巴拿赫 (Banach) 空间中的不动点方程. 设

$$Ku_j = \begin{cases} 0, & j \leq j_0, \\ \frac{1}{\gamma + j} \sum_{k=0}^j A_k u_{j-k}, & j > j_0, \end{cases} \quad (4-106)$$

则

$$\begin{aligned} \|K\underline{u}\| &\leq \frac{1}{j_0 - |\operatorname{Re}(\gamma)|} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \|A_k\| \|u_{j-k}\| \delta^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \|A_k\| \|u_j\| \delta^j = \frac{M}{j_0 - |\operatorname{Re}(\gamma)|} \|\underline{u}\|. \end{aligned} \quad (4-107)$$

因此, 对充分大的 j_0 , 和任何固定的 v_j , 由压缩原理, 方程 $u_j = v_j + Ku_j$ 有唯一解. 现在令 $u_{l,j}$ 是方程 (4-100) 的解

$$u_{l,m_l+j} = \frac{1}{\alpha + m_l + j} \sum_{k=1}^j A_k u_{l,m_l+j-k} - \frac{1}{\alpha + m_l + j} u_{l-1,m_l+j}, \quad (4-108)$$

并分别地对 $j \leq j_0$ 选取 $\gamma = \alpha + m_l$ 和 $v_j = u_{l,m_l+j}$, 以及对 $j > j_0$ 选取 $v_j = -\frac{1}{\alpha + m_l + j} u_{l-1,m_l+j}$. 于是由构造我们的不动点问题的解 u_j 与方程 (4-101) 的解 u_{l,m_l+j} 重合.

□

综上所述, 我们得到下面的求线性无关解的完整集合的过程:

对 A_0 的所有特征值 α , $\alpha + j$ 不是对所有 $j \in \mathbb{N}_0$ 时的特征值, 取对应的广义特征函数 $u_{0,l} \neq 0$, $(A_0 - \alpha) u_{0,l} = u_{0,l-1}$. 则如在 (4-97) 中定义的 $w_l(z)$, 其中 $m_l = 0$,

$$u_{l,j} = (A_0 - \alpha - j)^{-1} \left(u_{l-1,j} - \sum_{k=1}^j a_k u_{l,j-k} \right) \quad (4-109)$$

是线性无关解.

对所有其他的特征值 $\tilde{\alpha} = \alpha + m_j$, 存在两个情形. 首先, 如同在前面情形对 $\tilde{\alpha}$ 尝试求得足够数量的解, 直到不再可能再求解 (即方程 (4-101) 没有非平凡解) 为止. 接下来, 在预设解 (4-97) 中对 α 加入其他项使得直到足够数量的解被找到. 这是填满线性无关解集的过程.

这个求在简单奇点附近的一般解的过程就是熟知的弗洛贝尼乌斯 (**Frobenius**) 方法. A_0 的特征值也称为**特征指数**. 注意, “奇点是简单的” 这个要求至关重要, 因为它保证代数方程组的系数可递推地求得.

显然我们也可以尝试应用这个方法得到围绕无穷远点的幂级数. 为此, 作坐标变换 $\zeta = \frac{1}{z}$, 于是我们的系统变成

$$w = -\frac{1}{\zeta^2} A \left(\frac{1}{\zeta} \right) w, \quad w(z) = w \left(\frac{1}{z} \right). \quad (4-110)$$

特别地, ∞ 是简单奇点, 当且仅当 $A(z)$ 在 ∞ (至少) 有一阶零点, 即

$$A \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \zeta \sum_{j=0}^{\infty} A_j \zeta^j. \quad (4-111)$$

系统称为**富克斯 (Fuchs) 系统**, 如果它仅有有限多个奇点, 包括无穷远点, 且都是简单的.

引理 4.12 每一个富克斯 (Fuchs) 系统都具形式

$$A(z) = \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{z - z_j}. \quad (4-112)$$

证明 考虑

$$B(z) = A(z) - \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{z - z_j}, \quad (4-113)$$

其中 $A_j = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) A(z)$. 于是由构造, $B(z)$ 在整个 \mathbb{C} 上解析. 此外, 由于 $A(z)$ 在 ∞ 为零, 故 $B(z)$ 也是, 再由刘维尔 (Liouville) 定理 $B(z)$ 为零 (每一个有界的解析函数为常数). \square

注意, 富克斯 (Fuchs) 系统在 ∞ 是正则的, 当且仅当 $\sum_{j=1}^k A_j = 0$. 因此每一

个非平凡 ($A(z) \neq 0$) 富克斯 (Fuchs) 系统至少有两个奇点.

最后, 我们注意, 对系统的所有结果都可用到 n 阶线性方程

$$u^{(n)}(z) + q_{n-1}(z)u^{(n-1)}(z) + \cdots + q_1(z)u'(z) + q_0(z)u(z) = 0. \quad (4-114)$$

如通常, 由变换将这个方程化为方程组显示, 如果系数 $q_j(z)$, $0 \leq j \leq n-1$ 至多有一阶极点, 则 $z_0 = 0$ 是简单奇点. 但是, 我们甚至可以做得更好一点. 引入

$$w(z) = (u(z), zu'(z), \cdots, z^{n-1}u^{(n-1)}(z)), \quad (4-115)$$

得

$$A(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ -z^n q_0 & -z^{n-1} q_1 & \cdots & \cdots & -z^2 q_{n-2} & n-1-zq_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (4-116)$$

如果 $q_j(z)$, $0 \leq j \leq n-1$ 在 $z=0$ 至多有 $n-j$ 阶极点, 则它在 $z=0$ 有简单奇点.

例如, 变换方程 (4-15), 我们得到系统

$$w' = A(z)w, A(z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ -zq(z) & \frac{1}{z} - p(z) \end{pmatrix}. \quad (4-117)$$

问题 4.17 设 $w_j > 0$, $j \in \mathbb{N}_0$ 给定. 求证所有序列 $\underline{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, $u_j \in \mathbb{C}^n$ 的集合构成一个巴拿赫 (Banach) 空间, 其中范数

$$\|\underline{u}\| = \sum_{j=0}^{\infty} |u_j| w_j$$

为有限.

第5章 边值问题

5.1 引言

边值问题在物理学中有其基本重要性. 但是, 解决这类问题通常要通过常微分方程, 泛函分析, 复变函数以及测度论诸方法的结合. 由于后面几章并不要依赖它, 你可以跳过它而直接进到第6章.

为了启发边值问题的研究, 我们先从物理学看一个典型例子. 弦的振动可以由在点 x 和时间 t 的位移 $u(t, x)$ 来描述. 这个系统的运动方程是一维波动方程

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad (5-1)$$

其中 c 是声音在弦中的传播速度. 此外, 假设弦固定在两个端点上, 就是说, $x \in [0, 1]$ 和 $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$, 另外, 初始位移 $u(0, x) = u(x)$ 和初始速度 $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v(x)$ 已知.

遗憾的是, 这是一个偏微分方程, 因此我们所找到的方法没有一个能够用得上. 特别地, 我们不清楚如何去求解所提的问题. 因此不妨先尝试找方程 (5-1) 的某些解. 为了使得它稍微容易一点, 我们尝试求 $u(t, x)$ 为两个函数的乘积, 其中每一个仅依赖于一个变量, 即假设

$$u(t, x) = w(t)y(x). \quad (5-2)$$

这个方法称为**分离变量**. 将这些代入波动方程, 并分别将所有依赖于 t 以及 x 的项放在左右两端, 得到

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}. \quad (5-3)$$

现在, 如果这个方程对所有的 t 和 x 成立, 其商必须等于常数 $-\lambda$. 即我们得到方程

$$-\frac{1}{c^2} \ddot{w}(t) = \lambda w(t) \quad (5-4)$$

和

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (5-5)$$

它们容易求解. 第一个方程的解是

$$w(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t), \quad (5-6)$$

第二个方程的解是

$$y(x) = c_3 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_4 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (5-7)$$

但是, $y(x)$ 必须满足边界条件 $y(0) = y(1) = 0$, 如果 $c_3 = 0$ 则第一个条件 $y(0) = 0$ 满足, 由第二个条件, 得知 (c_4 可由 $w(t)$ 吸收)

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad (5-8)$$

当 $\lambda = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}$ 时它成立. 总之, 我们得到解

$$u(t, x) = (c_1 \cos(cn\pi t) + c_2 \sin(cn\pi t)) \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5-9)$$

特别地, 弦只对某些固有频率有振动!

这样我们找到了许多解, 但是还没有满足我们的初始条件. 这可用叠加原理来进行, 因为我们的方程是线性的, 这可以办到. 事实上, 选择

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{1,n} \cos(cn\pi t) + \frac{c_{2,n}}{cn\pi} \sin(cn\pi t) \right) \sin(n\pi x), \quad (5-10)$$

其中系数 $c_{1,n}$ 和 $c_{2,n}$ 很快衰减, 我们得到了方程的进一步解. 此外, 这些解满足

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n} \sin(n\pi x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2,n} \sin(n\pi x). \quad (5-11)$$

为此, 将初始条件展开为 Fourier 级数

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x), \quad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(n\pi x), \quad (5-12)$$

我们看到, 如果我们选择 $c_{1,n} = u_n$ 和 $c_{2,n} = v_n$, 则原来方程的解由式 (5-10) 给出.

一般地, 不同领域中的大量问题, 导致研究下面的问题

$$Ly(x) = \lambda y(x), \quad L = \frac{1}{r(x)} \left(-\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right), \quad (5-13)$$

使得它满足边界条件

$$\cos(\alpha)y(\alpha) = \sin(\alpha)p(\alpha)y'(\alpha), \quad \cos(\beta)y(\beta) = \sin(\beta)p(\beta)y'(\beta), \quad (5-14)$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 这样的问题称为施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 边值问题. 这个例子显示, 我们应该证明关于施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题的下面事实:

(1) (Sturm-Liouville) 问题有可数多个特征值 E_n , 对应的特征函数是 $u_n(x)$, 即 $u_n(x)$ 满足边值条件和 $Lu_n(x) = E_n u_n(x)$.

(2) 特征函数 u_n 是完全的, 即任何一个好函数 $u(x)$ 可以展为广义傅里叶 (Fourier) 级数

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x).$$

这个问题非常类似于矩阵的特征值问题. 但是, 现在我们的线性算子是作用在某个函数空间上, 它不是有限维的. 尽管如此, 可以对这样的函数空间赋予一个数量积

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) dx, \quad (5-15)$$

这里 $*$ 表示复共轭. 事实上, 对我们的问题它是严格意义下的希尔伯特 (Hilbert) 空间, 因此在我们继续进行讨论之前, 在下一节先回忆希尔伯特 (Hilbert) 空间的某些事实.

问题 5.1 求 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的始值条件, 使得式 (5-10) 实际上是解. 特别地, 分别求对 $c_{1,n}$ 和 $c_{2,n}$ 的条件使得 (5-10) 是在 $C^2(\mathbb{R}^2)$ 中, 且使得允许交换求和与微分的次序. 此外, 求 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的一类初值条件使得相应的傅里叶 (Fourier) 系数 u_n 和 v_n 满足这些条件. (提示: 傅里叶 (Fourier) 系数的衰减与函数的光滑性有关).

问题 5.2 求证

$$q_2(x)y'' + q_1(x)y' + q_0(x)y$$

可以写为

$$\frac{1}{r(x)}(- (p(x)y')' + q(x)y).$$

并借助于 q_0, q_1, q_2 求 r, p, q .

将贝塞尔 (Bessel) 方程和勒让德 (Legendre) 方程 (问题 4.11) 写为上面这个形式.

问题 5.3 (悬挂式电缆) 考虑悬挂在 $x=1$ 的电缆的振动. 以 $u(t, x)$ 记位移. 则运动由方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = g \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)$$

和边值条件 $u(t, 1) = 0$ 所刻画. 求形如 $u(t, x) = w(t) y(x)$ 的所有解. (提示: 问题 4.10)

问题 5.4 (一维调和晶体) 假设你有彼此用弹簧连接相同质点耦的线性链. 则运动方程是

$$m \frac{d^2}{dt^2} u(t, n) = k (u(t, n+1) - u(t, n)) + k (u(t, n-1) - u(t, n)),$$

其中 $m > 0$ 是质点的质量, $k > 0$ 是弹簧系数. (这是无穷多个微分方程的系统, 我们的理论对它不可应用!). 借助于贝塞尔 (Bessel) 函数 $c(t, n) = J_{an}(bt)$ 求解 (提示: 问题 4.8). 证明 $s(t, n) = \int_0^t c(s, n) ds$ 是第二个解. 如果 $u(n)$ 和 $v(n)$

衰减得足够地快, 你能不能给出满足初始值 $u(0, n) = u(n)$ 和 $\frac{du}{dt}(0, n) = v(n)$ 的解?

5.2 紧对称算子

假设 \mathfrak{H}_0 是一个向量空间. 映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ 称为反线性形, 如果它对第一个元线性共轭, 对第二个元线性, 即

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= \lambda_1^* \langle f_1, g \rangle + \lambda_2^* \langle f_2, g \rangle, \\ \langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle &= \lambda_1 \langle f, g_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, g_2 \rangle, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (5-16)$$

满足要求

$$(1) \langle f, f \rangle > 0 \text{ 对 } f \neq 0$$

$$(2) \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$$

的反线性形称为内积或数量积. 与每个数量积相对应的是范数

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (5-17)$$

(后面我们将证明这事实上是范数). 偶 $(\mathfrak{H}_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 称为内积空间. 如果 \mathfrak{H}_0 关于上述范数是完备的, 就称它为希尔伯特 (Hilbert) 空间. 通常我们不妨假设 \mathfrak{H}_0 是完备的, 因为我们可容易地将 \mathfrak{H} 完备化. 但是为了我们的目的这没有必要, 因此, 我们在这里不做这个以避免在后面带来技术上的复杂化.

向量 $f \in \mathfrak{H}_0$ 称为已经规范化或者单位向量, 如果 $\|f\| = 1$. 如果 $\langle f, g \rangle = 0$ 则称两个向量 $f, g \in \mathfrak{H}_0$ 为正交或者垂直 (记为 $f \perp g$), 称它们平行, 如果一个是另一个倍数.

如果 f 和 g 正交, 则我们有毕达歌拉斯 (Pythagorean) 定理:

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2, \text{ 若 } f \perp g, \quad (5-18)$$

这可直接计算得到.

假设 u 是单位向量, 则 f 在 u 方向上的投影是

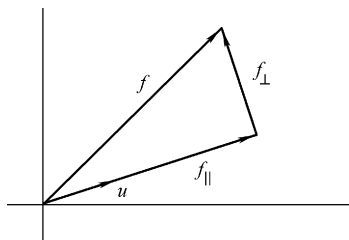
$$f_{\parallel} = \langle u, f \rangle u \quad (5-19)$$

以及 f_{\perp} 由

$$f_{\perp} = f - \langle u, f \rangle u \quad (5-20)$$

定义, 它垂直于 u , 因为 $\langle u, f_{\perp} \rangle = \langle u, f - \langle u, f \rangle u \rangle = \langle u, f \rangle - \langle u, f \rangle = 0$.

$f \rangle \langle u, u \rangle = 0$.



取任何其他平行于 u 的向量 αu , 容易看到

$$\|f - \alpha u\|^2 = \|f_{\perp} + (f_{\parallel} - \alpha u)\|^2 = \|f_{\perp}\|^2 + |\langle u, f \rangle - \alpha|^2, \quad (5-21)$$

因此, $f_{\parallel} = \langle u, f \rangle u$ 平行于 u , 且是最接近于 f 的唯一向量.

作为第一个结论, 我们得到柯西-施瓦茨-本杰科夫斯基 (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski) 不等式 (又称柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式):

定理 5.1 (柯西-施瓦茨-本杰科夫斯基 (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski)) 设 \mathfrak{S}_0 是内积空间, 则对每一个 $f, g \in \mathfrak{S}_0$ 我们有

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad (5-22)$$

等号成立, 当且仅当 f 和 g 平行.

证明 只需证明 $\|g\| = 1$ 的情形. 然后由 $\|f\|^2 = |\langle g, f \rangle|^2 + \|f_{\perp}\|^2$ 得定理结论. \square

注意, 由柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式得知数量积对两个变量都连续, 即, 如果 $f_n \rightarrow f$ 以及 $g_n \rightarrow g$, 则有 $\langle f_n, g_n \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$.

作为另一个结论, 我们得知映射 $\|\cdot\|$ 事实上是范数.

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2. \quad (5-23)$$

下面我们将投影推广到多于一个向量的情形. 向量集 $\{u_j\}$ 称为规范正交集, 如果对 $j \neq k$ 有 $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ 且 $\langle u_j, u_j \rangle = 1$.

引理 5.2 假设 $\{u_j\}_{j=0}^n$ 是规范正交集. 则每一个 $f \in \mathfrak{S}_0$ 可写为

$$f = f_{\parallel} + f_{\perp}, \quad f_{\parallel} = \sum_{j=0}^n \langle u_j, f \rangle u_j, \quad (5-24)$$

其中 f_{\parallel} 和 f_{\perp} 正交. 此外, 对所有 $1 \leq j \leq n$ 有 $\langle u_j, f_{\perp} \rangle = 0$. 特别地,

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^n |\langle u_j, f \rangle|^2 + \|f_{\perp}\|^2. \quad (5-25)$$

此外, 每一个由 $\{u_j\}_{j=0}^n$ 张成的 \tilde{f} 满足

$$\|f - \tilde{f}\| \geq \|f_{\perp}\| \quad (5-26)$$

等号成立, 当且仅当 $\tilde{f} = f_{\parallel}$. 换句话说, f_{\parallel} 是唯一刻画的由 $\{u_j\}_{j=0}^n$ 张成并最接近于 f 的向量.

证明 直接计算显示 $\langle u_j, f - f_{\parallel} \rangle = 0$, 因此 f_{\parallel} 和 $f_{\perp} = f - f_{\parallel}$ 垂直. 对范数的公式可重复应用式 (5-18) 得到.

现在, 固定由 $\{u_j\}_{j=0}^n$ 张成的向量

$$\hat{f} = \sum_{j=0}^n c_j u_j. \quad (5-27)$$

于是, 经计算得

$$\begin{aligned} \|f - \hat{f}\|^2 &= \|f_{\parallel} + f_{\perp} - \hat{f}\|^2 = \|f_{\perp}\|^2 + \|f_{\parallel} - \hat{f}\|^2 \\ &= \|f_{\perp}\|^2 + \sum_{j=0}^n |c_j - \langle u_j, f \rangle|^2, \end{aligned} \quad (5-28)$$

由此得最后一个结论. □

由式 (5-25) 得贝塞尔 (Bessel) 不等式

$$\sum_{j=0}^n |\langle u_j, f \rangle|^2 \leq \|f\|^2, \quad (5-29)$$

等号成立, 当且仅当 f 由 $\{u_j\}_{j=0}^n$ 张成.

特别地, 贝塞尔 (Bessel) 不等式显示我们也可手算规范正交集 (参考问题 5.6). 一个规范正交集称为**规范正交基**, 如果对所有 $f \in \mathfrak{S}_0$ 有

$$\|f\|^2 = \sum_j |\langle u_j, f \rangle|^2. \quad (5-30)$$

显然这等价于对每个 $f \in \mathfrak{S}_0$ 有

$$f = \sum_j \langle u_j, f \rangle u_j. \quad (5-31)$$

线性算子是线性映射

$$A: \mathfrak{D}(A) \rightarrow \mathfrak{S}_0, \quad (5-32)$$

其中 $\mathfrak{D}(A)$ 是 \mathfrak{S}_0 的线性子空间, 称为 A 的**定义域**. 线性算子 A 称为**对称的**, 如果它的定义域稠密 (即它的闭包是 \mathfrak{S}_0), 且

$$\langle g, Af \rangle = \langle Ag, f \rangle, \quad f, g \in \mathfrak{D}(A). \quad (5-33)$$

数 $z \in \mathbb{Z}$ 称为是 A 的**特征值**, 如果存在非零向量 $u \in \mathfrak{D}(A)$ 使得

$$Au = zu. \quad (5-34)$$

这时向量 u 称为对应的**特征向量**. 对应于 z 的所有特征向量的集合称为**对应 z 的特征空间**

$$\text{Ker}(A - z). \quad (5-35)$$

这里对 $A - zI$ 我们用了简短记号 $A - z$. 特征值称为是单的, 如果仅存在一个线性无关的特征向量.

定理 5.3 设 A 是对称的. 则所有的特征值是实数, 且对应于不同特征值的特征向量正交.

证明 假设 λ 是特征值, 对应的规范化特征向量 u . 则 $\lambda = \langle u, Au \rangle = \langle Au, u \rangle = \lambda^*$, 这证明 λ 是实数. 进一步, 如果 $Au_j = \lambda_j u_j$, $j = 1, 2$, 则有

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle u_1, u_2 \rangle = \langle Au_1, u_2 \rangle - \langle u_1, Au_2 \rangle = 0$$

证明完毕. □

定义在 $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{S}_0$ 上的线性算子称为有界的, 如果

$$\|A\| = \sup_{f, \|f\|=1} \|Af\| \quad (5-36)$$

有限. 不难看到, 这实际上是有界线性算子空间上的范数 (问题 5.7). 由构造, 有界算子是 Lipschitz 连续的, 且

$$\|Af\| \leq \|A\| \|f\|, \quad (5-37)$$

因此连续.

此外, 定义在 $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{S}_0$ 上的线性算子 A 称为紧的, 如果当 f_n 有界时每个序列 Af_n 都有收敛子序列. 每个紧线性算子都有界, 且有界算子和紧算子的积仍是紧的 (问题 5.8).

定理 5.4 紧对称算子有满足 $|\alpha_0| = \|A\|$ 的特征值 α_0 .

证明 我们令 $\alpha = \|A\|$, 不失一般性, 假设 $\alpha \neq 0$ (即 $A \neq 0$). 由于

$$\|A\|^2 = \sup_{f, \|f\|=1} \|Af\|^2 = \sup_{f, \|f\|=1} \langle Af, Af \rangle = \sup_{f, \|f\|=1} \langle f, A^2 f \rangle,$$

且存在规范化序列 u_n 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, A^2 u_n \rangle = \alpha^2.$$

由于 A 是紧的, 不妨假设 $A^2 u_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^2 u_n = \alpha^2 u$. 现在由

$$\begin{aligned} \|(A^2 - \alpha^2)u_n\|^2 &= \|A^2 u_n\|^2 - 2\alpha^2 \langle u_n, A^2 u_n \rangle + \alpha^4 \\ &\leq 2\alpha^2 (\alpha^2 - \langle u_n, A^2 u_n \rangle) \end{aligned}$$

(其中我们用了 $\|A^2 u_n\| \leq \|A\| \|Au_n\| \leq \|A\|^2 \|u_n\| = \alpha^2$) 得知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^2 u_n - \alpha^2 u_n) = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. 此外, u 是 A^2 的规范化特征向量, 因为 $(A^2 - \alpha^2)u = 0$. 分解最后一个方程为 $(A - \alpha)u = v$ 和 $(A + \alpha)v = 0$, 这证明或者 $v \neq 0$ 是对应于 $-\alpha$ 的特征向量, 或者 $v = 0$, 从而 $u \neq 0$ 是对应于 α 的特征向量. □

注意, 对有界算子 A , 不可能存在绝对值大于 $\|A\|$ 的特征值, 就是说, 特征值的集合囿于 $\|A\|$ (问题 5.9).

现在考虑具有特征值 α_0 (如上) 的紧对称算子 A , 以及对应的规范化特征向量 u_0 . 令

$$\mathfrak{S}_0^{(1)} = \{f \in \mathfrak{S}_0 \mid \langle u_0, f \rangle = 0\}, \quad (5-38)$$

注意到 $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ 是线性闭子空间, 因此它自己是内积空间. 此外, 我们可以限制 A 于 $\mathfrak{S}_0^{(1)}$, 因为由 $f \in \mathfrak{S}_0^{(1)}$ 得 $\langle Af, u_0 \rangle = \alpha_0 \langle f, u_0 \rangle = 0$, 故 $Af \in \mathfrak{S}_0^{(1)}$. 记这个限制为 A_1 . 显然它从 A 继承了对称性和紧性 (验证它!). 因此可用定理 5.4 重复地得到特征值序列 α_j , 对应的规范化特征向量为 u_j . 此外, 由构造, 对 $k < j$, u_j 正交于所有的 u_k , 从而, 特征向量 $\{u_j\}$ 组成规范正交集. 这个过程一直可进行下去不停止, 除非 \mathfrak{S}_0 是有限维. 但是要注意, 如果 $A_n = 0$, 对 $j \geq n$ 有可能发生 $\alpha_j = 0$.

定理 5.5 (紧对称算子的谱定理) 假设 \mathfrak{S}_0 是内空间积, $A: \mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_0$ 是紧对称算子. 则存在收敛于 0 的实特征值序列 α_j , 对应的规范化特征向量 u_j 组成规范正交集, 且每一个 $f \in \text{Ran}(A) = \{Ag \mid g \in \mathfrak{S}_0\}$ 可写为

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \langle u_j, f \rangle u_j. \quad (5-39)$$

如果 $\text{Ran}(A)$ 稠密, 则特征向量组成规范正交基.

证明 特征值 α_j 以及对应的特征向量的存在性我们已经建立. 如果特征值不收敛于零, 则存在子序列使得 $v_k = \alpha_{j_k}^{-1} u_{j_k}$ 是有界序列, 对此 Av_k 没有收敛的子序列, 因为 $\|Av_k - Av_l\|^2 = \|u_{j_k} - u_{j_l}\|^2 = 2$.

接下来, 令 $f = Ag \in \text{Ran}(A)$. 设

$$f_n = \sum_{j=0}^n \langle u_j, f \rangle u_j, \quad g_n = \sum_{j=0}^n \langle u_j, g \rangle u_j,$$

注意到

$$f_n = \sum_{j=0}^n \langle u_j, Ag \rangle u_j = \sum_{j=0}^n \langle Au_j, g \rangle u_j = \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle u_j, g \rangle u_j = Ag_n.$$

从而, 由于 $g - g_n \in \mathfrak{S}_0^{(n+1)}$, 我们有

$$\|f - f_n\| = \|A(g - g_n)\| = \|A_{n+1}(g - g_n)\| \leq |\alpha_{n+1}| \|g - g_n\| \leq |\alpha_{n+1}| \|g\|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 显示 $f_n \rightarrow f$, 这证明了在情形 $f \in \text{Ran}(A)$ 的式 (5-39).

下面, 设 $f \in \mathfrak{S}_0$ 任意且假设 $\text{Ran}(A)$ 稠密. 对固定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\tilde{f}_\varepsilon \in \text{Ran}(A)$ 使得 $\|f - \tilde{f}_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 此外, 由前一部分, 对某个充分大的 n , 存在由 $\{u_j\}_{j=0}^n$ 张成的 \hat{f}_ε

使得 $\|\tilde{f}_\varepsilon - \hat{f}_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 即 $\|f - \hat{f}_\varepsilon\| < \varepsilon$, 以及由引理 5.2, f_n 是 $\{u_j\}_{j=0}^n$ 张成的最佳逼近,

对充分大的 n 我们甚至有 $\|f - f_n\| \leq \|f - \hat{f}_\varepsilon\| < \varepsilon$. □

这些是我们所需要的一切, 下面我们就用这些结果到施图姆-刘维尔

(Sturm-Liouville) 算子上去.

问题 5.5 对 $f, g \in \mathfrak{S}_0$, 证明平行四边形定律

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

问题 5.6 设 $\{u_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathfrak{S}_0$ 是可数规范正交集以及 $f \in \mathfrak{S}_0$. 求证

$$f_n = \sum_{j=0}^n \langle u_j, f \rangle u_j$$

是 Cauchy 序列.

问题 5.7 求证式 (5-36) 实际上是范数. 证明两个有界算子的积仍有界, 满足 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

问题 5.8 求证每一个紧线性算子有界, 以及有界算子与紧算子的积是紧的 (紧算子构成算子理想)

问题 5.9 求证如果 A 有界, 则每一个特征值 α 满足 $|\alpha| \leq \|A\|$.

5.3 正则施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题

现在我们应用内积空间的理论去研究施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题. 但是我们先考虑对 $y \in C^2(I, \mathbb{C})$ 相应的微分方程

$$-(p(x)y')' + (q(x) - zr(x))y = 0, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad x \in I = (a, b), \quad (5-40)$$

它等价于一阶系统

$$y' = \frac{1}{p(x)}w, \quad (5-41)$$

$$w' = (q(x) - zr(x))y,$$

其中 $w(x) = p(x)y'(x)$. 由此我们看到, 如果 $p^{-1}(x), q(x)$ 和 $r(x)$ 在 I 上连续, 则存在唯一解. 事实上, 正如我们早先指出的, 这甚至只需假设 $p^{-1}(x), q(x)$ 和 $r(x)$ 在 I 的每个紧子区间上可积就够了. 我要说明的是, 本质上下面你所有要做的是用绝对连续代替可微 (相应的是在弱意义下的可微性). 但是, 在这一章的后面, 我们将假设

$$r, q \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \quad p \in C^1([a, b], \mathbb{R}), \quad p(x), r(x) > 0, \quad x \in [a, b], \quad (5-42)$$

并称在这个情形下的微分方程 (5-40) 为正则的.

记方程 (5-41) 的主解矩阵为

$$H(z, x, x_0) = \begin{pmatrix} c(z, x, x_0) & s(z, x, x_0) \\ p(x)c(z, x, x_0) & p(x)s'(z, x, x_0) \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5-43)$$

其中 $c(z, x, x_0)$ 是式 (5-40) 对应于初始条件 $c(z, x_0, x_0) = 1, p(x_0)c'(z, x_0, x_0) = 0$ 的解, 类似地, $s(z, x, x_0)$ 是对应于初始条件 $s(z, x_0, x_0) = 0, p(x_0)s'(z, x_0, x_0) = 1$ 的解.

我们知道, 由定理 2.9, $\mathbf{II}(z, x, x_0)$ 关于 x 和 x_0 连续. 但对 z 有更强的结果成立.

引理 5.6 对每个固定的 $(x, x_0) \in I \times I$, 主解矩阵 $\mathbf{II}(z, x, x_0)$ 关于 z 解析.

证明 如果初始条件是常数, 则只需证明每一个解在 x_0 的邻域内关于 $z \in \mathbb{C}$ 解析. 这时候每一个迭代 (2.14) 关于 $z \in \mathbb{C}$ 解析 (事实上, 它甚至可以是多项式). 此外, 对紧集中的 z , 利普希茨 (Lipschitz) 常数可选择与 z 无关, 因此, 迭代的级数对紧集中的 z 一致收敛, 由魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 收敛定理其极限仍是解析的. \square

此外, 由刘维尔 (Liouville) 公式 (3-74), 如果 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程 (5-40) 的解, 对同一 $z \in \mathbb{C}$ 修改了的朗斯基 (Wronsky) 行列式

$$W_x(u, v) = u(x)p(x)v'(x) - p(x)u'(x)v(x) \quad (5-44)$$

与 x 无关. 特别, $\det \mathbf{II}(z, x, x_0) = 1$.

现在我们求适当的数量积. 考虑

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) * g(x) r(x) dx, \quad (5-45)$$

并以 \mathfrak{S}_0 记具有这个内积的空间 $C([a, b], \mathbb{C})$.

接下来考虑作为 \mathfrak{S}_0 中算子

$$L = \frac{1}{r(x)} \left(-\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right). \quad (5-46)$$

的施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 方程. 由于在 \mathfrak{S}_0 中存在有不可微的函数, 我们不能利用它到 \mathfrak{S}_0 中的任何函数. 因此需要适当的定义域

$$\mathfrak{D}(L) = \{f \in C^2([a, b], \mathbb{C}) \mid BC_a(f) = BC_b(f) = 0\}, \quad (5-47)$$

其中

$$BC_a(f) = \cos(\alpha)f(a) - \sin(\alpha)p(a)f'(a), \quad (5-48)$$

$$BC_b(f) = \cos(\beta)f(b) - \sin(\beta)p(b)f'(b).$$

换句话说, 我们允许将边界值 $f(a)$ 和 $f'(a)$ (对应地 $f(b)$ 和 $f'(b)$) 的任意线性组合作为边界条件. 这种选择保证 $\mathfrak{D}(L)$ 是 \mathfrak{S}_0 的线性子空间, 而且我们甚至可以证明它是稠密的 (问题 5.12).

两个最重要的情形是 $\alpha = 0$ (即 $u(a) = 0$) 和 $\alpha = \pi/2$ (即 $u'(a) = 0$). 条件 $u(a) = 0$ 称为在 a 的狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件, 条件 $u'(a) = 0$ 称为在 a 的诺伊曼 (Neumann) 边界条件.

显然, 我们要求 L 是对称的. 对 $f, g \in C^2([a, b], \mathbb{C})$, 利用分部积分直接证明拉格朗日 (Lagrange) 恒等式

$$\int_I g^*(Lf) r dx = W_a(g^*, f) - W_b(g^*, f) + \int_I (Lg)^* f r dx. \quad (5-49)$$

此外, 如果 $f, g \in \mathfrak{D}(L)$, 则上面两个朗斯基 (Wronsky) 行列式为零 (问题

5.13), 因此

$$\langle g, Lf \rangle = \langle Lg, f \rangle, \quad f, g \in \mathfrak{D}(L), \quad (5-50)$$

这证明 L 是对称的.

当然下面我们要利用定理 5.5, 为此我们需要证明 L 是紧的. 遗憾的是, L 甚至不有界 (问题 5.10), 看来我们运气不佳. 但是, 还存在最后的机会: L 的逆可以是紧的, 所以我们可以对它利用定理 5.5.

由于 L 可能不是单射 (0 可能是特征值), 对某个固定的 $z \in \mathbb{C}$ 考虑 $L - z$. 为了计算 $L - z$ 的逆我们需要求解非齐次方程 $(L - z)f = g$. 这可取齐次方程的两个线性无关解 u_+ 和 u_- 以及利用常数变易公式 (3.83) 容易地办到. 此外, 除了 f 是微分方程 $(L - z)f = g$ 的解外, 它还必须在 L 的定义域内, 就是说它必须满足边界条件. 因此在常数变易公式中必须选择初始条件使得边界条件得到满足.

由问题 3.27, 非齐次方程 $(L - z)f = g$ 的解可以写为

$$f(x) = \frac{u_+(z, x)}{W(u_+(z), u_-(z))} \left(c_1 + \int_a^x u_-(z, t) g(t) r(t) dt \right) + \frac{u_-(z, x)}{W(u_+(z), u_-(z))} \left(c_2 + \int_x^b u_+(z, t) g(t) r(t) dt \right), \quad (5-51)$$

由此得知

$$f'(x) = \frac{u'_+(z, x)}{W(u_+(z), u_-(z))} \left(c_1 + \int_a^x u_-(z, t) g(t) r(t) dt \right) + \frac{u'_-(z, x)}{W(u_+(z), u_-(z))} \left(c_2 + \int_x^b u_+(z, t) g(t) r(t) dt \right). \quad (5-52)$$

现在我们选择 $c_1 = 0$, 于是 $f(a) = cu_-(a)$ 和 $f'(a) = cu'_-(a)$ (其中 $c = \frac{\langle u_+^*, g \rangle}{W(u_+, u_-)}$). 所以选择的 $u_-(z, x)$ 满足 $BC_a(u_-(z)) = 0$, 故我们得到 $BC_a(f) = 0$. 类似地, 选择 $c_2 = 0$ 以及 $u_+(z, x)$ 使得 $BC_b(u_+(z)) = 0$, 我们得到 $BC_b(f) = 0$. 但是, 可不可以永远这样做呢? 可以, 利用初始条件

$$\begin{aligned} u_-(z, a) &= \sin(\alpha), & p(a)u'_-(z, a) &= \cos(\alpha), \\ u_+(z, a) &= \sin(\beta), & p(b)u'_+(z, b) &= \cos(\beta), \end{aligned} \quad (5-53)$$

我们有两个所求类型的解, 除了朗斯基 (Wronsky) 行列式 $W(u_+(z), u_-(z))$ 可能为零. 这个朗斯基 (Wronsky) 行列式的零点有什么特殊性? 因为由 $W(u_+(z), u_-(z)) = 0$, 得知 $u_+(z)$ 和 $u_-(z)$ 线性相关, 故 $u_+(z, x) = cu_-(z, x)$, 因此 $BC_a(u_+(z)) = cBC_a(u_-(z)) = 0$, 这显示 z 是对应于特征函数 $u_+(z)$ 的特征值. 特别地, z 必须是实数, 因为 L 对称. 此外, 因为由引理 5.6, $W(u_+(z), u_-(z))$ 是 \mathbb{C} 中的解析函数, 其零点必须是离散的.

引入算子 (L 的预解式)

$$R_L(z)g(x) = \int_a^b G(z, x, t)g(t)r(t)dt, \quad (5-54)$$

其中

$$G(z, x, t) = \frac{1}{W(u_+(z), u_-(z))} \begin{cases} u_+(z, x)u_-(z, x), & x \geq t, \\ u_+(z, x)u_-(z, x), & x \leq t \end{cases} \quad (5-55)$$

称为 L 的格林 (Green) 函数. 注意, $G(z, x, y)$ 关于 $z \in \mathbb{C}$ 全纯, 它的极点就是 $W(u_+(z), u_-(z))$ 的零点, 且满足 $G(z, x, t)^* = G(z^*, x, t)$ (问题 5.14), 相应地, 有 $G(z, x, t) = G(z, t, x)$. 于是, 由构造, 我们有

$R_L(z): \mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{D}(L)$ 以及

$$(L - z)R_L(z)g = g, \quad R_L(z)(L - z)f = f, \quad g \in \mathfrak{S}_0, f \in \mathfrak{D}(L). \quad (5-56)$$

换句话说, $R_L(z)$ 是 $L - z$ 的逆. 下面的引理显示 $R_L(z)$ 是紧的.

引理 5.7 算子 $R_L(z)$ 是紧的. 此外, 对 $z \in \mathbb{R}$ 它也是对称的.

证明 固定 z , 并注意 $G(z, \cdot, \cdot)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续, 因此一致连续. 特别地, 对每一个 $\varepsilon > 0$ 可以找到 $\delta > 0$, 使得当 $|y - x| \leq \delta$ 时, 有 $|G(z, y, t) - G(z, x, t)| \leq \varepsilon$. 设 $g(x) = R_L(z)f(x)$, 则当 $|y - x| \leq \delta$ 时有

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq \int_a^b |G(z, y, t) - G(z, x, t)| |f(t)| |r(t)| dt \\ &\leq \varepsilon \int_a^b |f(t)| |r(t)| dt \leq \varepsilon \|1\| \|f\|. \end{aligned}$$

因此, 如果 $f_n(x)$ 是 \mathfrak{S}_0 中的有界序列, 则 $g_n(x) = R_L(z)f_n(x)$ 等度连续, 由 Arzela-Ascoli 定理 (定理 2.17), 存在一致收敛的子序列. 但是, 一致收敛序列在由内积诱导的范数下也收敛, 因为

$$\|f\| \leq \sqrt{b - a} \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

从而 $R_L(x)$ 是紧的.

如果 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有 $G(\lambda, t, x)^* = G(\lambda^*, x, t) = G(\lambda, t, x)$, 由此得知 $R_L(\lambda)$ 的对称性. \square

因此利用定理 5.5 我们得到

定理 5.8 正则施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题有可数多个仅在 ∞ 凝聚的离散的单特征值 E_n . 对应的规范特征函数 u_n 组成 \mathfrak{S}_0 的正交基, 即每一个 $f \in \mathfrak{S}_0$ 可以写为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, f \rangle u_n(x). \quad (5-57)$$

此外, 对 $f \in \mathfrak{D}(L)$ 这个级数一致收敛.

证明 取值 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $R_L(\lambda)$ 存在. 由定理 5.5 存在 $R_L(\lambda)$ 对应于特征函数 u_n 的特征值 α_n . 此外, $R_L(\lambda)u_n = \alpha_n u_n$ 等价于 $Lu_n = \left(\lambda + \frac{1}{\alpha_n}\right)u_n$, 这证明 $E_n = \lambda + \frac{1}{\alpha_n}$ 是对应于特征函数 u_n 的特征值.

因此, 由定理 5.5 得知前面两个结论 (注意 $\text{Ran}(R_L) = \mathfrak{D}(L)$ 稠密) 成立, 除了

特征值是单的以外. 为了证明这点, 注意到如果 u_n 和 v_n 是对应于 E_n 的两个不同的特征函数, 则由 $BC_a(u_n) = BC_a(v_n) = 0$ 得 $W_a(u_n, v_n) = 0$, 因此 u_n 和 v_n 线性相关.

为了证明当 $f \in \mathfrak{D}(L)$ 时式 (5-57) 一致收敛, 我们开始记 $f = R_L(\lambda)g$, $g \in \mathfrak{S}_0$, 得知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, f \rangle u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle u_n, g \rangle u_n(x).$$

此外, 由柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式得

$$\left| \sum_{j=m}^n \alpha_j \langle u_j, g \rangle u_j(x) \right|^2 \leq \sum_{j=m}^n |\langle u_j, g \rangle|^2 \sum_{j=m}^n |\alpha_j u_j(x)|^2.$$

现在, 由式 (5-30), $\sum_{j=0}^{\infty} |\langle u_j, g \rangle|^2 = \|g\|^2$, 因此第一项是收敛级数的一部分. 类似地, 第二项可以与 x 独立估计, 因为由

$$\alpha_n u_n(x) = R_L(\lambda) u_n(x) = \int_I G(\lambda, x, t) u_n(t) r(t) dt = \langle u_n, G(\lambda, x, \cdot) \rangle,$$

再根据式 (5-30) 得

$$\sum_{j=m}^n |\alpha_j u_j(x)|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\langle u_j, G(\lambda, x, \cdot) \rangle|^2 = \int_I |G(\lambda, x, t)|^2 r(t) dt. \quad \square$$

这看上去像定理 5.8 回答了施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题的所有问题. 遗憾的是, 这是不对的, 因为加在系数上的假设通常对实际应用限制得太多了! 首先, 正如早先指出的, 只需假设 $r(x)$, $p(x)^{-1}$, $q(x)$ 在 I 上可积. 但是, 这还是小的, 更重要的是, 在大多数情况下至少有一个系数在端点之一有奇点 (不可积), 或者积分可能为无穷. 例如, 出现在区间 $I = (-1, 1)$ 上的勒让德 (Legendre) 方程 (问题 4.11), 在其上 $p(x)^{-1} = (1-x^2)^{-1}$ 不可积.

在这种情况下, 解可能不再可延拓到边界点, 从而使边界条件 (5-47) 没有意义. 但是, 在这情形下仍可求两个解 $u_-(z_0, x)$ 和 $u_+(z_0, x)$ (至少对 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), 它们在 a, b 附近平方可积且分别满足 $\lim_{x \rightarrow a^+} W_x(u_-(z_0)^*, u_-(z_0)) = 0$, 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} W_x(u_+(z_0)^*, u_+(z_0)) = 0$. 引入边界条件

$$BC_a(f) = \lim_{x \rightarrow a^+} W_x(u_-(z_0), f) = 0, \quad (5-58)$$

$$BC_b(f) = \lim_{x \rightarrow b^-} W_x(u_+(z_0), f) = 0.$$

我们又一次得到对称算子. 逆 $R_L(z)$ 可如前计算. 但是解 $u_{\pm}(z, x)$ 对 $z \in \mathbb{R}$ 可不存在, 它们在整个复平面内可能不是解析的.

如果

$$\int_a^b \int_a^b |G(z, x, y)|^2 r(x) r(y) dx dy < \infty, \quad (5-59)$$

可以证明引理 5.7 (从而定理 5.8) 仍成立. 这可以办到的, 例如在勒让德 (Legendre) 方程情形, 利用在奇点 ± 1 附近解的明显性态由弗洛贝尼乌斯 (Frobenius)

方法得知.

但是, 即使对在 $I = \mathbb{R}$ 上如 $r(x) = p(x) = 1$, $q(x) = 0$ 如此简单的情形, 这个推广仍还不够! 事实上, 不难看出, 在这种情形下根本就不存在特征函数. 为了研究这类问题, 必须要有测度论和泛函分析的背景, 它超出了本书的范围. 我们在此仅指出, 如果特征函数的展开由关于 Borel 测度的积分变换代替, 类似的结果仍成立. 例如, 在 $I = \mathbb{R}$ 上 $r(x) = p(x) = 1$, $q(x) = 0$ 的情形, 导致在 \mathbb{R} 上的傅里叶 (Fourier) 变换.

问题 5.10 直接求证在 $I = (0, \pi)$ 上满足狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件的 $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ 是无界的. (提示: 考虑 $f(x) = \sin(nx)$.)

问题 5.11 求证 $\mathfrak{D}(L)$ 在复共轭下是线性不变子空间.

问题 5.12 求证具有紧支撑 $C_c^2(I)$ 的二次可微函数集在 \mathfrak{S}_0 内稠密. (提示: 求证每一个连续函数可以用逐段多项式函数逼近).

问题 5.13 求证如果 f 和 g 都满足 $BC_a(f) = BC_1(g) = 0$, 则 $W_a(f, g) = 0$.

问题 5.14 求证 $u_{\pm}(z, x)^* = u_{\pm}(z^*, x)$.

问题 5.15 (周期边界条件) 求证定义在

$$\mathfrak{D}(L) = \{f \in C^2([a, b], \mathbb{C}) \mid f(a) = f(b), p(a)f'(a) = p(b)f'(b)\} \quad (5-60)$$

上的 L 是对称的.

问题 5.16 (刘维尔 (Liouville) 规范形) 求证利用变换

$$y(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx, \quad v(y) = \sqrt[4]{r(x(y))p(x(y))} u(x(y))$$

可将微分方程 (5-40) 变成 $r = p = 1$ 的方程. 于是

$$-(pu')' + qu = r\lambda u$$

可变换成

$$-v'' + Qv = \lambda v,$$

其中

$$Q = q - \frac{(pr)^{1/4}}{r} (p((pr)^{-1/4})')'.$$

此外,

$$\int_a^b |u(x)|^2 r(x) dx = \int_0^c |v(y)|^2 dy, \quad c = \int_a^b \frac{r(t)}{p(t)} dt.$$

问题 5.17 假设 $u(x)$ 满足

$$u''(x) + g(x)u'(x) + f(x)u(x) = h(x).$$

求证

$$v(x) = e^{\frac{1}{2} \int g(y) dy} u(x)$$

满足

$$v''(x) + \left(f(x) - \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}g(x)^2 \right) v(x) = e^{\frac{1}{2} \int^x g(y) dy} h(x).$$

5.4 振动理论

在这一节我们进一步考察施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 方程的特征函数的零点.

设 u 和 v 分别是 $Lu = \lambda_0 u$ 和 $Lv = \lambda v$ 对某 $\lambda_0, \lambda \in \mathbb{C}$ 的任意 (非零) 解. 则我们有

$$W'(u, v) = (\lambda_0 - \lambda) ruv, \quad (5-61)$$

或者, 等价地对 $c, d \in I$ 有

$$W_d(u, v) - W_c(u, v) = (\lambda_0 - \lambda) \int_c^d u(t)v(t)r(t) dt. \quad (5-62)$$

为了对问题有更好的了解, 我们现在引入由

$$u(x) = \rho_u(x) \sin(\theta_u(x)), \quad p(x)u'(x) = \rho_u(x) \cos(\theta_u(x)) \quad (5-63)$$

定义的普吕弗 (Prüfer) 变量.

如果 $(u(x), p(x)u'(x))$ 永不为 $(0, 0)$ 且 u 可微, 则

$$\rho_u(x) = \sqrt{u(x)^2 + (p(x)u'(x))^2} \quad (5-64)$$

是正的, 以及由要求 θ_u 连续, 当 $\theta_u(x_0)$ 的值选定时

$$\theta_u(x) = \arctan\left(\frac{u(x)}{p(x)u'(x)}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{p(x)u'(x)}{u(x)}\right) \quad (5-65)$$

是唯一确定的.

u 满足 $Lu = \lambda u$ 现在等价于系统 (问题 5.18)

$$\begin{aligned} \theta'_u &= \frac{\cos(\theta_u)^2}{p} + (\lambda r - q) \sin(\theta_u)^2, \\ \rho'_u &= \rho_u \left(\frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \sin(\theta_u) \cos(\theta_u). \end{aligned} \quad (5-66)$$

利用容易的上解参数, 我们看到 (问题 5.19)

引理 5.9 设 $L_j, j=0, 1$ 是两个与 p_j, q_j, r_j 相应的算子, u_j 是 $L_j u_j = \lambda_j u_j$ 的解. 假设 $p_1 \leq p_0$ 和 $\lambda_0 r_0 - q_0 \leq \lambda_1 r_1 - q_1$.

如果对某个 $c \in (a, b)$ 有 $\theta_{u_1}(c) \geq \theta_{u_0}(c)$, 则对所有 $x \in (c, b)$ 有 $\theta_{u_1}(x) \geq \theta_{u_0}(x)$. 如果第一个不等式是严格不等式, 则第二个也是.

此外, 如果对某个 $c \in (a, b)$ 有 $\theta_{u_1}(c) = \theta_{u_0}(c)$, 以及对某 $d \in (c, d)$ 有 $\theta_{u_1}(d) = \theta_{u_0}(d)$, 则在 (c, d) 内有 $p_1 = p_0$ 和 $\lambda_0 r_0 - q_0 = \lambda_1 r_1 - q_1$.

另外, 注意到

$$W_x(u, v) = \rho_u(x)\rho_v(x)\sin(\theta_u(x) - \theta_v(x)). \quad (5-67)$$

因此得:

引理 5.10 假设 (u, pu') 和 (v, pv') 永不为 $(0, 0)$. 则 $u(x_0)$ 为零, 当且仅当 $\theta_u(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$, 以及 $W_{x_0}(u, v)$ 为零, 当且仅当 $\theta_u(x_0) \equiv \theta_v(x_0) \pmod{\pi}$.

联系到普吕弗 (Prüfer) 变量于 u 的零点个数, 观察 $\theta_u(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$ 的重要作用, 得知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{x - x_0} = u'(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho_u(x)\sin(\theta_u(x))}{x - x_0} = \rho_u(x_0) \frac{\cos(\theta_u(x_0))}{p(x_0)}. \quad (5-68)$$

因此, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(\theta_u(x))}{x - x_0} = \frac{\cos(\theta_u(x_0))}{p(x_0)}. \quad (5-69)$$

利用 $\sin(\theta_u(x)) = \cos(\theta_u(x_0))\sin(\theta_u(x) - \theta_u(x_0))$, 进一步我们看到

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(x_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(\theta_u(x) - \theta_u(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(\theta_u(x) - \theta_u(x_0))}{\theta_u(x) - \theta_u(x_0)} \frac{\theta_u(x) - \theta_u(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\theta_u(x) - \theta_u(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned} \quad (5-70)$$

同样的结果也由式 (5-66) 得到, 但是现在的证明不要求 u 是我们微分方程的解.

于是我们证明了:

引理 5.11 如果 u 是在 (a, b) 上满足 $(u(x), p(x)u'(x)) \neq (0, 0)$ 的任何 C^1 函数, 又如果 $\theta_u(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\theta_u(x) - \theta_u(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{p(x_0)}. \quad (5-71)$$

按照完全相同的方法, 我们有:

引理 5.12 设 $\lambda_0 < \lambda_1$, 以及 u, v 是 $Lu = \lambda_0 u, Lv = \lambda_1 v$ 解. 引入

$$\Delta_{u,v}(x) = \theta_v(x) - \theta_u(x). \quad (5-72)$$

则, 若 $\Delta_{u,v}(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$, 但 $\theta_u(x_0) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta_{u,v}(x) - \Delta_{u,v}(x_0)}{x - x_0} = (\lambda_1 - \lambda_0)r(x_0)\sin(\theta_u(x_0))^2 > 0. \quad (5-73)$$

以及, 若 $\Delta_{u,v}(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$, 但 $\theta_u(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta_{u,v}(x) - \Delta_{u,v}(x_0)}{(x - x_0)^3} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)r(x_0)}{3p(x_0)^2} > 0. \quad (5-74)$$

证明 如果 $\Delta_{u,v}(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$ 以及 $\theta_u(x_0) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, 则由式 (5-67) 得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho_u(x)\rho_v(x)\sin(\Delta_{u,v}(x))}{x - x_0} = W'_{x_0}(u, v),$$

由此得到第一个论断. 如果 $\Delta_{u,v}(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$ 以及 $\theta_u(x_0) \equiv \theta_v(x_0) \equiv 0 \pmod{\pi}$, 则 (用洛必达法则和再一次用式 (5-67)) 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho_u(x)\rho_v(x)\sin(\Delta_{u,v}(x))}{(x-x_0)^3} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-W'_x(u,v)}{3(x-x_0)^2} \\ &= \frac{(\lambda-\lambda_0)r(x_0)\rho_u(x_0)\rho_v(x_0)}{3} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(\theta_u(x))\sin(\theta_v(x))}{(x-x_0)^2}, \end{aligned}$$

由式 (5-69) 得引理结论. □

另外, 由最后两个引理得知, $\theta_u(x)/\pi$ 和 $\Delta_{u,v}(x)/\pi$ 的整数部分是递增的.

引理 5.13 设 $\lambda_0 < \lambda_1$ 以及 u, v 为 $Lu = \lambda_0 u, Lv = \lambda_1 v$ 的解. 记 $\#(u, v)$ 为 $W(u, v)$ 在区间 (a, b) 内的零点个数. 则

$$\#(u, v) = \lceil \Delta_{u,v}(x)/\pi \rceil - \lfloor \Delta_{u,v}(x)/\pi \rfloor - 1, \quad (5-75)$$

其中 $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$, $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ 分别表示下, 上取整函数. 此外, 令 $\#(u)$ 是 u 在 (a, b) 内的零点个数. 则

$$\#(u) = \lceil \theta_u(x)/\pi \rceil - \lfloor \theta_u(x)/\pi \rfloor - 1. \quad (5-76)$$

证明 我们从不含 $W(u, v)$ 的零点的区间 $[x_0, x_1]$ 开始. 因此 $\lfloor \Delta_{u,v}(x_0)/\pi \rfloor = \lfloor \Delta_{u,v}(x_1)/\pi \rfloor$. 现在令 $x_0 \rightarrow a^+$, $x_1 \rightarrow b^-$, 并利用引理 5.10 和引理 5.12 得第一个论断. 第二个论断证明类似. □

现在我们来讨论施图姆 (Sturm) 比较定理.

定理 5.14 (施图姆(Sturm)) 设 $L_j, j=0, 1$, 是两个与 p_j, q_j, r_j 相应的算子, u_j 是 $L_j u_j = \lambda_j u_j$ 的解. 假设 $p_1 \leq p_0$ 和 $\lambda_0 r_0 - q_0 \leq \lambda_1 r_1 - q_1$.

如果在 $(c, d) \subseteq (a, b)$ 的每一个端点, $W(u_1, u_0) = 0$, 或者 $u_0 = 0$, 则 u_1 必须在 (c, d) 内等于零, 除非 u_1 和 u_0 相等且等于常数. (后一个情形只有在 $L_0 - \lambda_0 = L_1 - \lambda_1$ 才发生).

证明 不失一般性 (也许在改变 u_0 和 u_1 的符号以后), 我们可以假设 $\theta_{u_0}(c), \theta_{u_1}(c) \in [0, \pi)$. 由于我们假设, $\theta_{u_0}(c) = 0$ 或者 $\theta_{u_0}(c) = \theta_{u_1}(c)$, 故我们有 $\theta_{u_0}(c) \leq \theta_{u_1}(c)$. 因此由引理 5.9 得知 $\theta_{u_0}(d) \leq \theta_{u_1}(d)$. 现在或者 $\theta_{u_0}(d) = 0 \pmod{\pi}$, 因此有 $\pi \leq \theta_{u_0}(d) \leq \theta_{u_1}(d)$, 或者 $\theta_{u_0}(d) = \theta_{u_1}(d) \pmod{\pi}$, 因此有 $\pi \leq \theta_{u_0}(d) + \pi \leq \theta_{u_1}(d)$, 除非 $\theta_{u_0}(d) = \theta_{u_1}(d)$, 而这只当 $L_0 - \lambda_0 = L_1 - \lambda_1$ 时才会发生. □

到此为止, u 本质上是任意的. 现在我们取式 (5-53) 中定义的解 $u(x) = u_{\pm}(\lambda, x)$, 并研究对应的普吕弗 (Prüfer) 角关于参数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的依赖性. 作为预备我们证明

引理 5.15 设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$W_x(u_{\pm}(\lambda), \dot{u}_{\pm}(\lambda)) = \begin{cases} \int_x^b u_+(\lambda, t)^2 r(t) dt, \\ - \int_a^x u_-(\lambda, t)^2 r(t) dt, \end{cases}, \quad (5-77)$$

其中的点表示关于 λ 的导数.

证明 由式 (5-62) 我们知道

$$W_x(u_{\pm}(\lambda), u_{\pm}(\bar{\lambda})) = (\bar{\lambda} - \lambda) \begin{cases} \int_x^b u_+(\lambda, t) u_+(\bar{\lambda}, t) r(t) dt, \\ - \int_a^x u_-(\lambda, t) u_-(\bar{\lambda}, t) r(t) dt. \end{cases}$$

现在利用这个去计算极限

$$\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow \lambda} W_x \left(u_{\pm}(\lambda), \frac{u_{\pm}(\lambda) - u_{\pm}(\bar{\lambda})}{\lambda - \bar{\lambda}} \right). \quad \square$$

现在由于式 (5-65), 我们有

$$\dot{\theta}_u(x) = - \frac{W_x(u, \dot{u})}{\rho_u(x)^2}, \quad (5-78)$$

故由方程 (5-77) 立刻得

$$\dot{\theta}_+(\lambda, x) = - \frac{\int_x^b u_+(\lambda, t)^2 r(t) dt}{\rho_+(\lambda, x)^2} < 0, \quad \dot{\theta}_-(\lambda, x) = \frac{\int_a^x u_-(\lambda, t)^2 r(t) dt}{\rho_-(\lambda, x)^2} > 0, \quad (5-79)$$

其中我们记 $\rho_{\pm}(\lambda, x) = \rho_{u_{\pm}(\lambda)}(x)$ 和 $\theta_{\pm}(\lambda, x) = \theta_{u_{\pm}(\lambda)}(x)$. 接下来我们选取

$$\theta_-(\lambda, a) = \alpha \in [0, \pi), \quad -\theta_+(\lambda, b) = \pi - \beta \in [0, \pi) \quad (5-80)$$

以及由于 $\pm \theta_{\pm}(\cdot, x) \geq 0$ 是递减的, 极限

$$\mp \theta_{\pm}(x) = \mp \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta_{\pm}(\lambda, x) \geq 0 \quad (5-81)$$

存在. 事实上, 下面引理成立.

引理 5.16 我们有

$$\theta_+(x) = 0, x \in [a, b], \quad \theta_-(x) = 0, x \in (a, b]. \quad (5-82)$$

证明 我们仅对 $\theta_-(x)$ 证明. 固定 $x_0 \in (a, b]$ 并对小的 $\varepsilon > 0$ 考虑 $w(x) = \pi -$

$(\pi - \varepsilon) \frac{x-a}{x_0-a}$. 于是对充分小的 λ , 当 $x \in [a, x_0]$ 时, 我们有

$$\frac{1}{p} \cos(w)^2 - (q - \lambda) \sin(w)^2 \leq \frac{1}{p} - (q - \lambda) \sin(\varepsilon)^2 < w',$$

这说明 w 是上解. 因此, 由引理 1.1, 对任何 ε , 我们得到 $0 \leq \theta_-(x_0)$. \square

现在, 注意到 $u_-(\lambda)$ 是特征函数, 当且仅当它在 b 满足边界条件, 就是说, 当且仅当 $\theta_-(\lambda, b) = \beta \bmod \pi$. 这证明当 $\lambda \rightarrow -\infty$ 时 $u_-(\lambda)$ 最终在 b 不再能满足边界条件. 因此存在最小特征值 E_0 . 我们指出:

引理 5.17 正则施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题的特征值可按 $E_0 < E_1 < \dots$ 次序排列.

有了这些准备工作以后, 现在我们容易建立几个漂亮而且重要的结果.

定理 5.18 假设 L 在 b 满足狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件 (即 $u(b) = 0$).

则我们有

$$\#_{(-\infty, \lambda)}(L) = \#(u_-(\lambda)), \quad (5-83)$$

其中 $\#(u)$ 是 u 在 (a, b) 内的零点个数, $\#_{(\lambda_0, \lambda_1)}(L)$ 是 L 在 (λ_0, λ_1) 内的特征值个数. 同样地, 假设 L 在 a 满足狄利克雷(Dirichlet)边界条件. 则我们有

$$\#_{(-\infty, \lambda)}(L) = \#(u_+(\lambda)). \quad (5-84)$$

证明 对小的 λ , 由引理 5.16, $u_-(\lambda)$ 没有零点. 因此对小的 λ 结果成立. 当 λ 增加时, $\theta_-(\lambda, b)$ 增加且等于 $0 \pmod{\pi}$, 当且仅当 λ 是 L 的特征值(引理 5.10). 证明完毕. \square

与施图姆(Sturm)比较定理(定理 5.14)同样的证明得知

定理 5.19 假设特征值是按 $E_0 < E_1 < \dots$ 次序排列. 则对应于 E_n 的特征函数 u_n 在区间 (a, b) 内恰有 n 个零点, 且 u_{n+1} 的零点与 u_n 的零点交错. 就是说, 如果 $x_{n,j}$ 是 u_n 在 (a, b) 内的零点, 则

$$a < x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < \dots < x_{n+1,n+1} < b. \quad (5-85)$$

用完全同样的方法, 我们可证明:

定理 5.20 对 $\lambda_0 < \lambda_1$, 我们有

$$\#_{(\lambda_0, \lambda_1)}(L) = \#(u_-(\lambda_0), u_+(\lambda_1)) = \#(u_+(\lambda_0), u_-(\lambda_1)), \quad (5-86)$$

其中 $\#(u, v)$ 是 $W(u, v)$ 在 (a, b) 内的零点个数, $\#_{(\lambda_0, \lambda_1)}(L)$ 是 L 在 (λ_0, λ_1) 内的特征值个数.

证明 我们仅对 $\#(u_-(\lambda_0), u_+(\lambda_1))$ 情形证明. 记 $\Delta(\lambda_1, x) = \Delta_{u_-(\lambda_0), u_+(\lambda_1)}(x)$. 由于对 $\lambda_1 = \lambda_0$, 朗斯基(Wronsky)行列式为常数, 我们的论断对接近于 λ_0 的 λ_1 成立. 此外, 由于 $\Delta(\lambda_1, b) = \beta - \Theta_-(\lambda_0, b)$ 与 λ_1 无关, 由引理 5.13 只需考虑 $\Delta(\lambda_1, a)$. 当 $\lambda_1 \geq \lambda_0$ 增加时, 由(5-79), $-\Delta(\lambda_1, a)$ 增加为 $0 \pmod{\pi}$, 当且仅当 λ_1 是 L 的特征值(引理 5.10). 证明完毕. \square

问题 5.18 证明方程(5-66).

问题 5.19 证明引理 5.9 (提示: 引理 1.1).

问题 5.20 考虑方程 $-u'' + qu = 0$ 并假设 $q_0 \leq q(x) \leq q_1 < 0$. 求证对 $u(x)$ 的两个相继零点 x_k 和 x_{k+1} , 我们有

$$\frac{\pi}{\sqrt{-q_0}} \leq x_{k+1} - x_k \leq \frac{\pi}{\sqrt{-q_1}}.$$

问题 5.21 假设 $q(x) > 0$ 以及 $-(pu') + qu = 0$. 求证在 $u'(x)$ 的两个相继零点 x_k 和 x_{k+1} 我们有

$$|u(x_k)| \leq |u(x_{k+1})|, \quad \text{若}(pq)' \geq 0.$$

提示: 考虑

$$u^2 - \frac{1}{pq}(pu')^2.$$

问题 5.22 考虑我们的施图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)问题的有序特征值

$E_n(\alpha)$ 为有界参数 α 的函数. 证明对应于不同的参数的特征值是交错的. 就是说, 假设 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$, 证明 $E_n(\alpha_1) < E_n(\alpha_2) < E_{n+1}(\alpha_1)$.

5.5 周期算子

现在我们假设 $r(x)$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 是 \mathcal{L} 周期函数.

记

$$\mathbf{H}(z, x, x_0) = \begin{pmatrix} c(z, x, x_0) & s(z, x, x_0) \\ p(x)c'(z, x, x_0) & p(x)s'(z, x, x_0) \end{pmatrix} \quad (5-87)$$

是方程 (5-41) 的主解矩阵. 因此 $c(z, x, x_0)$ 和 $s(z, x, x_0)$ 是方程 (5-41) 对应于初始条件 $c(z, x_0, x_0) = p(x_0)s'(z, x_0, x_0) = 1$, $s(z, x_0, x_0) = p(x_0)c'(z, x_0, x_0) = 0$ 的基础解系. 由于基点不起重要作用, 我们将令它等于 $x_0 = 0$, 并写为 $c(z, x) = c(z, x, 0)$, $s(z, x) = s(z, x, 0)$.

在 3.5 节我们已经引入单值矩阵 $\mathbf{M}(z) = \mathbf{H}(z, x_0 + \mathcal{L}, x_0)$ 以及它的特征值, 弗洛凯 (Floquet) 乘子为

$$\rho_{\pm}(z) = \Delta(z) \pm \sqrt{\Delta(z)^2 - 1}, \quad \rho_+(z)\rho_-(z) = 1. \quad (5-88)$$

我们将选取平方根的一个分支, 使得 $|\rho_+(z)| \leq 1$. 其中弗洛凯 (Floquet) 判别式是

$$\Delta(z) = \frac{\text{tr}(\mathbf{M}(z))}{2} = \frac{c(z, \mathcal{L}) + p(\mathcal{L})s'(z, \mathcal{L})}{2}, \quad (5-89)$$

此外, 我们已经找到了两个称为弗洛凯 (Floquet) 解的解

$$u_{\pm}(z, x) = c(z, x) + m_{\pm}(z)s(z, x), \quad (5-90)$$

它们满足

$$\begin{pmatrix} u_{\pm}(z, \mathcal{L}) \\ p(\mathcal{L})u'_{\pm}(z, \mathcal{L}) \end{pmatrix} = \rho_{\pm}(z) \begin{pmatrix} u_{\pm}(z, 0) \\ p(0)u'_{\pm}(z, 0) \end{pmatrix} = \rho_{\pm}(z) \begin{pmatrix} 1 \\ m_{\pm}(z) \end{pmatrix}. \quad (5-91)$$

其中

$$m_{\pm}(z) = \frac{\rho_{\pm}(z) - c(z, \mathcal{L})}{s(z, \mathcal{L})} = \frac{\dot{s}(z, \mathcal{L})}{\rho_{\pm}(z) - \dot{c}(z, \mathcal{L})} \quad (5-92)$$

是 Weyl m -函数. 注意, 在点 z 满足 $s(z, \mathcal{L}) = 0$, 因此, 函数 $m_{\pm}(z)$ 没有定义以及进一步 $u_{\pm}(z, x)$ 也没有定义. 这是由于我们的规范化条件 $u_{\pm}(z, 0) = 1$, 在单值矩阵的特征向量的第一个分量为零时不可能成立的缘故.

u_+ 和 u_- 的朗斯基 (Wronsky) 行列式是

$$W(u_-(z), u_+(z)) = m_+(z) - m_-(z) = \frac{2\sqrt{\Delta(z)^2 - 1}}{s(z, \mathcal{L})}, \quad (5-93)$$

因此, 如果 $\Delta(z) \neq \pm 1$, 那它们线性无关. 而当 $\Delta(z) = \pm 1$ 时这两个函数显然相

等.

当 $|\rho_+(z)| < 1$ 且 $x \rightarrow \pm \infty$ 时函数 $u_{\pm}(z, x)$ 指数式衰减, 即 $|\Delta(z)| > 1$, 且当 $|\rho_+(z)| = 1$ 时它有界, 即 $|\Delta(z)| \leq 1$. 稳定集

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\Delta(\lambda)| \leq 1\} \quad (5-94)$$

也称为谱. 我们的目的是弄清楚稳定集的情况. 它的临界作用是由满足 $\Delta(\lambda) = \pm 1$ 的点给出, 它们正是与式 (5-40) 和下面的定义域相应的周期算子 L_+ 和反周期算子 L_- 的谱,

$$\mathfrak{D}(L_{\pm}) = \{f \in C^2([0, \ell], \mathbb{C}) \mid f(\ell) = \pm f(0), p(\ell)f'(\ell) = \pm p(0)f'(0)\}. \quad (5-95)$$

定理 5.21 L_{\pm} 的谱是

$$\sigma(L_{\pm}) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Delta(\lambda) = \pm 1\}, \quad (5-96)$$

且是由没有有限聚点的实特征值序列所组成.

证明 由 $\mathfrak{D}(L_{\pm})$ 的边界条件的定义看到, $z \in \mathbb{C}$ 是 L_{\pm} 的特征值, 当且仅当 ± 1 是单值矩阵的特征值, 即当且仅当 $\Delta(z) = \pm 1$. 如同在 5.3 节, 我们可以证明 L_{\pm} 是具有紧预解式的对称算子 (问题 5.22), 因此结论成立. \square

注意, 如果单值矩阵恰有一个特征值, 则 L_{\pm} 的特征值是单的, 以及如果单值矩阵有两个线性无关的特征向量, 则它是二次退化的.

首先注意, L_{\pm} 没有小于某 λ_0 的特征值.

引理 5.22 对 $\lambda < \lambda_0$ 我们有 $\Delta(\lambda) > 1$, 其中

$$\lambda_0 = \min_{x \in [0, \ell]} \frac{q(x)}{r(x)}. \quad (5-97)$$

证明 设 $\lambda < \lambda_0$, 则 $q - \lambda r > 0$, 且式 (5-40) 任何满足 $z = \lambda$ 的解 u 满足 $(pu')' = q - \lambda r > 0$. 因此 pu' 是递增的, 即对 $x > 0$ 有 $p(x)u'(x) > p(0)u'(0)$. 此外, 如果 $p(0)u'(0) \geq 0$, 则 u 也是递增的, 就是说, 对 $x > 0$ 有 $u(x) > u(0)$. 特别地, $c(\lambda, x) \geq c(\lambda, 0) = 1$, 以及对 $x > 0$ 有 $p(x)s'(\lambda, x) \geq p(0)s'(\lambda, 0) = 1$. \square

为了研究在使得 $\Delta(z) = \pm 1$ 的点 $\Delta(z)$ 的导数, 我们先推导 $\dot{\Delta}(z)$ 的一个很实用的公式.

引理 5.23 我们有

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(z) &= -\frac{s(z, \ell)}{2} \int_0^{\ell} u_+(z, x) u_-(z, x) r(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (p(\ell) c'(z, \ell) s(z, x)^2 + (c(z, \ell) - p(\ell) s'(z, \ell)) s(z, x) c(z, x) - \\ &\quad s(z, \ell) c(z, x)^2) r(x) dx, \end{aligned} \quad (5-98)$$

其中的点表示关于 z 的导数.

证明 设 $u(z, x), v(z, x)$ 是 $\tau u = zu$ 的两个光滑解, 于是积分 (5-62), 其中 $u = u(z_0)$ 和 $v = v(z)$, 两端除 $z_0 - z$, 并取 $z_0 \rightarrow z$ 得

$$W_{\ell}(\dot{u}(z), v(z)) - W_0(\dot{u}(z), v(z)) = \int_0^{\ell} u(z, t)v(z, t)r(t) dt. \quad (5-99)$$

(利用朗斯基 (Wronsky) 行列式 $W_{\ell}(u(z), v(z)) - W_0(u(z), v(z)) = 0$ 的不变性, 我们看到, 左边事实上是导数). 现在选择 $u(z) = u_+(z)$ 和 $v(z) = u_-(z)$, 并由计算朗斯基 (Wronsky) 行列式

$$\begin{aligned} W_{\ell}(\dot{u}_+(z), u_-(z)) - W_0(\dot{u}_+(z), u_-(z)) &= \dot{\rho}_+(z)\rho_-(z)W(u_+(z), u_-(z)) \\ &= -\frac{\dot{\Delta}(z)}{\sqrt{\Delta(z)^2 - 1}}W(u_-(z), u_+(z)) \end{aligned}$$

得到第一个公式. 第二个公式由式 (5-90) 和朗斯基 (Wronsky) 行列式 $c(z, \ell)p(\ell)s'(z, \ell) - p(\ell)c'(z, \ell)s(z, \ell) = 1$ 的不变性得到. \square

推论 5.24 对 $\lambda \in \Sigma$ 我们有

$$\dot{\Delta}(\lambda) = -\frac{s(\lambda, \ell)}{2} \int_0^{\ell} |u_{\pm}(\lambda, x)|^2 r(x) dx, \quad (5-100)$$

它在 Σ 的内部不为零.

证明 对 $\lambda \in \Sigma$ 我们有 $\overline{\rho_-(\lambda)} = \rho_+(\lambda)$, 因此也有 $\overline{u_-(\lambda)} = u_+(\lambda, x)$. 此外, 如果 $s(\lambda, \ell) = 0$, 那么 $s(\lambda, x)$ 是对应于实值乘子 $s'(\lambda, \ell)$ 的弗洛凯 (Floquet) 解. 因此 $s(\lambda, \ell)$ 在 Σ 的内部不为零, 因为两个 (Floquet) 乘子在那里都不是实数. \square

引理 5.25 在使得 $\Delta(E) = \pm 1$ 的点 $E \in \mathbb{R}$ 处有 $\dot{\Delta}(E) = 0$, 当且仅当 $s(E, \ell) = p(\ell)c'(E, \ell) = 0$, 即当且仅当 $M(E) = \pm I$. 此外, 在这情形下我们有 $\Delta(E)\ddot{\Delta}(E) < 0$.

证明 为记号方便起见我们不表出 z . 利用 $c(\ell)p(\ell)s'(\ell) - p(\ell)c'(\ell)s(z, \ell) = 1$, 我们看到

$$\begin{aligned} \Delta^2 - 1 &= \left(\frac{c(\ell) + p(\ell)s'(\ell)}{2} \right)^2 - c(\ell)p(\ell)s'(\ell) + p(\ell)c'(\ell)s(z, \ell) \\ &= \left(\frac{c(\ell) - p(\ell)s'(\ell)}{2} \right)^2 + p(\ell)c'(\ell)s(\ell). \end{aligned}$$

因此, 在使得 $\Delta(E) = \pm 1$ 的点 $z = E$ 处, 我们有

$$\left(\frac{c(\ell) - p(\ell)s'(\ell)}{2} \right)^2 = -p(\ell)c'(\ell)s(\ell).$$

从而, 如果 $s(E, \ell) = p(\ell)c'(E, \ell) = 0$, 则式 (5-98) 显示 $\dot{\Delta}(E) = 0$.

反之, 假设 $\Delta(E) = \pm 1$ 和 $\dot{\Delta}(E) = 0$, 但 $s(E, \ell) \neq 0$. 则我们可以对式 (5-98) 乘上 $s(E, \ell)$ 得到

$$0 = \int_0^{\ell} \left(s(\ell)c(x) + \frac{c(\ell) - p(\ell)s'(\ell)}{2}s(x) \right)^2 r(x) dx.$$

由此得知该积分为 0, 又由于 $s(x)$ 和 $c(x)$ 线性无关, 我们必须有 $s(\ell) = \frac{c(\ell) - p(\ell)s'(\ell)}{2} = 0$, 与假设矛盾. 类似地, 对式 (5-98) 乘上 $p(\ell)c'(E, \ell)$, 我们看到 $p(\ell)c'(E, \ell) = 0$.

现在微分式 (5-98), 并在满足 $M(E) = \pm I$ 的点 $z = E$ 计算显示

$$\ddot{\Delta} = \frac{1}{2} \int_0^\ell (p(\ell)\dot{c}'(\ell)s(x)^2 + (\dot{c}(\ell) - p(\ell))\dot{s}'(x)s(x)c(x) - \dot{s}(\ell)c(x)^2)r(x)dx.$$

进一步, 在式 (5-99) 中选择 $u = v = s$ 得

$$W(\dot{s}, s) = \int_0^\ell s(x)^2 r(x) dx, \quad (5-101)$$

由 $s(\ell) = 0$, $s'(\ell) = \pm 1$, 我们有

$$\dot{s}(\ell) = \pm \int_0^\ell s(x)^2 r(x) dx.$$

类似地, 我们得到

$$p(\ell)\dot{c}'(\ell) = \mp \int_0^\ell c(x)^2 r(x) dx, \quad \dot{c}(\ell) = -p(\ell)\dot{s}'(\ell) = \pm \int_0^\ell s(x)c(x)r(x) dx.$$

因此

$$\Delta \ddot{\Delta} = \left(\int_0^\ell s(x)c(x)r(x) dx \right)^2 - \left(\int_0^\ell s(x)^2 r(x) dx \right) \left(\int_0^\ell c(x)^2 r(x) dx \right),$$

由于在柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式中的等号仅在 $c(x)$ 和 $s(x)$ 线性相关时才出现, 故右边是严格为负的. \square

综上所述, 这些结果建立了 $\Delta(z)$ 的下面这些性态: 由引理 5.22, $\Delta(\lambda)$ 将首先在某点 E_0 碰到 +1. 在这点我们必须有 $\dot{\Delta}(E) < 0$. 事实上, 由 $\dot{\Delta}(E) = 0$ 和引理 5.25 得 $\ddot{\Delta}(E) < 0$, 这和它从上面与直线 +1 相交矛盾. 由引理 5.24, $\Delta(\lambda)$ 不可能转向直到它在某点 $E_1 > E_2$ 交于 -1. 现在它或者穿过 ($\dot{\Delta}(E_1) < 0$) 或者转向 ($\dot{\Delta}(E_1) = 0, \ddot{\Delta}(E_1) > 0$). 在第一个情形, 它将在后面某个点 E_2 再次碰到 -1, 在后一情形, 我们刚好可令 $E_2 = E_1$ (这时 $E_1 = E_2$ 是 L_- 的二次退化特征值). 由于存在无穷多个周期 (反周期) 特征值 (问题 5.23), 这个过程可永远不停止, 于是我们得到:

定理 5.26 存在趋于 ∞ 的实数序列

$$E_0 < E_1 \leq E_2 < E_3 \leq E_4 \cdots \quad (5-102)$$

使得

$$\Sigma = \bigcup_{n=0}^{\infty} [E_{2n}, E_{2n+1}]. \quad (5-103)$$

此外,

$$\sigma(L_+) = \{E_0 < E_3 \leq E_4 < E_7 \leq E_8 < \cdots\} \quad (5-104)$$

且

$$\sigma(L_-) = \{E_1 \leq E_2 < E_3 \leq E_6 < \dots\}. \quad (5-105)$$

就是说, 谱是由无穷序列带组成, 其中有些可能会接触. 事实上, 如果 $q=0$, 我们得到 $\Delta(z) = \cos(\sqrt{z})$, 所有带都接触, 故 $\Sigma = [0, \infty)$. 典型判别式描述如下.

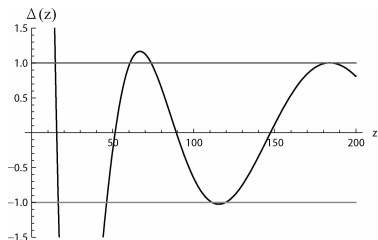


图 5-2

与 (5-40) 和下面的定义域相应的算子 L_α 的谱甚至存在进一步的联系

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(L_\alpha) &= \{f \in C^2([0, \ell], \mathbb{C}) \mid \cos(\alpha)f(0) - \sin(\alpha)p(0)f'(0) \\ &= \cos(\alpha)f(\ell) - \sin(\alpha)p(\ell)f'(\ell) = 0\}. \end{aligned} \quad (5-106)$$

作为准备, 我们证明:

引理 5.27 如下结论成立

$$\dot{m}_\pm(z) = - \int_0^{\pm\infty} u_\pm(z, x)^2 r(x) dx, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma. \quad (5-107)$$

证明 在式 (5-62) 中选择 $u = u_\pm(z_0), v = u_\pm(z)$, 分别令 $c=0$ 和 $d \rightarrow \pm\infty$ 得

$$-W_0(u_\pm(z_0), u_\pm(z)) = (z_0 - z) \int_0^{\pm\infty} u_\pm(z_0, x) u_\pm(z, x) r(x) dx.$$

两边除 $z - z_0$, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_0 - z} W_0(u_\pm(z_0), u_\pm(z)) &= W_0\left(\frac{u_\pm(z_0) - u_\pm(z)}{z_0 - z}, u_\pm(z)\right) \\ &= - \int_0^{\pm\infty} u_\pm(z_0, x) u_\pm(z, x) r(x) dx, \end{aligned}$$

令 $z_0 \rightarrow z$, 得

$$W_0(\dot{u}_\pm(z), u_\pm(z)) = - \int_0^{\pm\infty} u_\pm(z, x)^2 r(x) dx.$$

现在 $W_0(\dot{u}_\pm(z), u_\pm(z)) = \dot{m}_\pm(z)$, 证毕. \square

定理 5.28 记 L_α , $\alpha \in [0, \pi)$ 的谱为

$$\sigma(L_\alpha) = \{\lambda_0(\alpha) < \lambda_1(\alpha) < \dots\}, \quad \alpha \neq 0 \quad (5-108)$$

以及

$$\sigma(L_0) = \{\lambda_1(0) < \lambda_2(0) < \dots\}. \quad (5-109)$$

则对 $E_{2j-1} < E_{2j}$, 在 $(-\infty, E_0]$ 和 $\cup_{\alpha \in (0, \pi)} \lambda_0(\alpha)$ 相应地 $[E_{2j-1}, E_{2j}]$ 和 $\cup_{\alpha \in [0, \pi)} \lambda_j(\alpha)$

之间存在一一对应. 如果 $E_{2j-1} = E_{2j}$, 则对所有 $\alpha \in [0, \pi)$, 我们有 $\lambda_j(\alpha) = E_{2j-1} = E_{2j}$.

证明 首先注意 $\lambda \in \sigma(L_\alpha)$ 当且仅当 $m_+(\lambda) = \cot(\alpha)$ 或者 $m_-(\lambda) = \cot(\alpha)$, 因为对应的特征函数给出单值矩阵的特征向量, 反之亦然.

因此, 只需证明当 λ 从 E_{2j-1} 跑到 E_{2j} 时 $m_-(\lambda)$ 和 $m_+(\lambda)$ 穿过 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 内的所有值. 本质上, 这由 $m_\pm(\lambda)$ 在这些区域的单调性 (引理 5.27) 以及它们必须在边界点相等这些事实得知. 乍一看似乎有矛盾 (如果两个从同一点开始, 一个增加, 另一个减少, 它们永远不可能再相遇), 这完全不是这么回事, 因为 m_\pm 可以 (将) 有极点! 事实上, 由式 (5-101) 我们看到在满足 $s(\mu, x) = 0$ 的点 $z = \mu$ 处有

$$\dot{s}(\mu, x) = \frac{1}{s'(\mu, x)} \int_0^\ell s(\mu, t)^2 r(t) dt \neq 0,$$

因此 $m_\pm(\lambda)$ 在 $z = \mu \in (E_{2j-1}, E_{2j})$ 有简单极点.

典型情况描述如下.

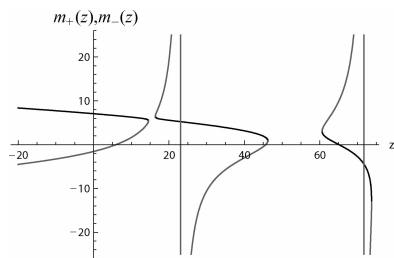


图 5-3

我们的目的是证明这个图像永远看上去如此.

我们从 $\lambda \in (-\infty, E_0)$ 开始. 对 $\lambda < \lambda_0$, 引理 5.22 的证明显示 $s(\lambda, \ell) > 0$, 因此 $m_-(\lambda) < m_+(\lambda)$. 现在当 λ 增加时, $m_-(\lambda)$ 增加而 $m_+(\lambda)$ 减少. 由于它们在 $\lambda = E_0$ 之前不可能相交 (由 $u_+(\lambda, x)$ 和 $u_-(\lambda, x)$ 线性无关性得知), 它们将在 $\lambda = E_0$ 相交. 为看到这点, 当 $\lambda \rightarrow -\infty$ 时 $m_\pm(\lambda) \rightarrow \pm\infty$, 注意到 $m_\pm(\lambda) = \cot(\theta_\pm(\lambda, 0))$, 其中 $\theta_\pm(\lambda, x)$ 是 $u_\pm(\lambda, x)$ 的 Prüfer 角. 如在引理 5.16 的证明, 我们证明 $\theta_\pm(\lambda, x)$ 收敛于 π 的倍数, 这就完成了情形 $\lambda \in (-\infty, E_0)$ 的证明.

如果 $E_{2j-1} = E_{2j}$, 所有解是 (反) 周期的, 因此在 0 满足边界条件的任何解在 ℓ 也满足相同的边界条件. 换句话说, 对所有 $\alpha \in [0, \pi)$ 有 $\lambda_j(\alpha) = E_{2j-1} = E_{2j}$.

如果 $\lambda \in (E_{2j-1}, E_{2j})$, 存在两种情形, 或者 $m_-(\lambda) < m_+(\lambda)$ (若 $s(\lambda, \ell) > 0$), 或者 $m_-(\lambda) > m_+(\lambda)$ (若 $s(\lambda, \ell) < 0$). 情形 $s(\lambda, \ell) = 0$ 总可以用稍微移动 λ 一点来避免. 我们仅讨论第一个情形 $m_-(\lambda) < m_+(\lambda)$, 由于第二个情形完全类似. 当 λ 增加时, $m_-(\lambda)$ 增加而 $m_+(\lambda)$ 减少, 两个在 E_{2j} 相遇. 当 λ 减少时, $m_-(\lambda)$ 减少而 $m_+(\lambda)$ 增加. 现在如果在 (E_{2j-1}, λ) 内没有极点, 它们不可能在有限值 $m_-(E_{2j-1}) = m_+(E_{2j-1})$ 相遇, 因此 $E_\pm(E_{2j-1}) = \infty$, 即 $s(E_{2j-1}, \ell) = 0$. 否

则, 它们中的一个存在极点 (它们不可能都有极点, 因为在那种情形下产生 L_0 的两个线性无关的特征函数, 但是 L_0 的特征值是单的), 在这个极点以后我们有 $m_- > m_+$. 由于它们不可能相交, 故不可能存在另外的极点, 因此它们必须在 E_{2j-1} 的有限值相交. \square

作为简单的结论我们有

定理 5.29 最小周期特征值 E_0 是单的, 对应的特征函数 $u(E_0, x)$ 没有零点. 反周期特征函数 $u(E_{4j-3}, x), u(E_{4j-2}, x)$ 在 $[0, \ell)$ 内有 $2j-1$ 个零点, 周期特征函数 $u(E_{4j-1}, x), u(E_{4j}, x)$ 在 $[0, \ell)$ 内有 $2j$ 个零点.

证明 首先注意, 周期特征函数必须有偶数个零点, 反周期特征函数必须有奇数个零点 (为什么?). 此外, 由定理 5.18, 对应于 $\lambda_j(0)$ 的特征函数刚好有 $j-1$ 个零点.

由施图姆 (Sturm) 比较定理 (定理 5.14) 得知, 任何满足 $\lambda_j(0) \leq \lambda \leq \lambda_{j+1}(0)$ 的解 $u(\lambda, x)$ 至少有 $j-1$ 个和至多 j 个零点. 由 $\lambda_j(0) \leq E_{2j-1} < E_{2j} \leq \lambda_{j+1}(0)$ 得知关于零点个数的结论.

如果 E_0 是二次退化, 为了得到在 0 等于零的特征函数, 我们可以取两个线性无关的特征函数的线性组合. 由周期性这个函数在 ℓ 也必须等于零. 因此, 它是 L_0 的特征函数, 由此得知 $\lambda_1(0) = E_0$, 但这与 $E_0 < E_1 \leq \lambda_1(0)$ 矛盾. \square

问题 5.23 (周期和反周期谱)

- (1) 求证 L_{\pm} 是对称的.
- (2) 求证对应的格林 (Green) 函数是

$$G_{\pm}(z, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1 \mp \rho_+(z)} u_+(z, x) u_-(z, y) + \frac{1}{1 \mp \rho_-(z)} u_-(z, x) u_+(z, y), & y < x, \\ \frac{\rho_+(z)}{1 \mp \rho_+(z)} u_+(z, x) u_-(z, y) + \frac{\rho_-(z)}{1 \mp \rho_-(z)} u_-(z, x) u_+(z, y), & y > x. \end{cases}$$

故周期和反周期特征值组成收敛于 ∞ 的实数序列.

- (3) 用例子证明周期, 反周期特征值不必是单的. (提示: $r=p=1$ 和 $q=0$).

问题 5.24 (反射对称) 假设 q 是周期函数 $q(t+\ell) = q(t)$ 且是对称的 $q(-x) = q(x)$ (令 $r(x) = p(x) = 1$). 证明

- (1) $c(z, -x) = c(z, x)$ 和 $s(z, -x) = -s(z, x)$,
- (2) $c(z, x \pm \ell) = c(z, \ell) c(z, x) \pm c'(z, \ell) s(z, x)$ 和 $s(z, x \pm \ell) = \pm s(z, \ell) c(z, x) + s'(z, \ell) s(z, x)$,
- (3) $c(z, \ell) = \dot{s}(z, \ell)$.

问题 5.25 电子在晶体中的简单量子力学模型导致研究方程

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad \text{其中 } q(x+1) = q(x).$$

参数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 对应于电子的能量. 仅当能量使得方程是稳定时才被允许, 因此集合 Σ

$= \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \|\Delta(\lambda)\| \leq 1 \}$ 称为晶体的谱. 由于 $\Delta(\lambda)$ 关于 λ 连续, 谱是由带之间具有缝隙的带组成.

考虑明显的情形

$$q(x) = q_0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}, \quad q(x) = 0, \quad \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

求证在某个 λ 值的下面不存在谱带. 证明如果 $q_0 \neq 0$ 则存在无穷多个缝隙. $q_0 = 0$ 时存在多少个缝隙? (提示: 在 $\Delta(\lambda)$ 的表达式中令 $\lambda - q_0 \rightarrow (a - \varepsilon)^2$ 和 $\lambda \rightarrow (a + \varepsilon)^2$. 如果 $q_0 \rightarrow 0$, 你期望在哪里出现缝隙? 选择这些 a 值并考虑 $a \rightarrow \infty$ 的情形.)

第 2 部分 动力系统

第 6 章 动力系统

6.1 动力系统

你可以想象动力系统为某个物理系统的时间发展，例如某些行星在万有引力作用下的运动。通常你希望知道系统在长时间内的命运，例如行星们最终将是碰撞在一起，还是系统对所有时间维持现状？

对某些系统（例如，两个行星的系统），这些问题的回答相对比较简单，因为系统的运动是正则并收敛，例如收敛到平衡态。

但是，许多有趣的系统并不是正则的！事实上，对许多系统，即使初始条件非常接近，其轨线也可能在短时间内分开很远。例如，你或许听到过关于蝴蝶运动，它可在雷暴以后几个星期产生大气紊动。

我们从定义开始：**动力系统**是作用在空间 M 上的半群 G 。就是说，存在映射

$$\begin{aligned} T: G \times M &\rightarrow M \\ (g, x) &\mapsto T_g(x) \end{aligned} \quad (6-1)$$

使得

$$T_g \circ T_h = T_{g \circ h}. \quad (6-2)$$

如果 G 是群，我们就说它是**可逆动力系统**。

我们的主要兴趣是**离散动力系统**，其中

$$G = \mathbb{N}_0 \quad \text{或} \quad G = \mathbb{Z} \quad (6-3)$$

和**连续动力系统**，其中

$$G = \mathbb{R}^+ \quad \text{或} \quad G = \mathbb{R}. \quad (6-4)$$

当然这个定义非常抽象，所以让我们先看几个例子。

例 离散动力系统的典型例子是迭代映射。设 f 映区间 I 到它自己，并考虑

$$T^n = f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{次}}, \quad G = \mathbb{N}_0. \quad (6-5)$$

显然，如果 f 可逆，又如果我们按通常方法把这个定义推广到 $n \in \mathbb{Z}$ ，则动力系统

可逆. 你可能会怀疑这样的系统的任何兴趣是否太简单了. 不过我们将会看到, 情况恰恰相反, 如此简单的系统恰给我们带来非常丰富的数学结构, 其中还有许多尚未解决的问题.

例 连续动力系统的典型例子是自治微分方程的流

$$T_t = \Phi_t, \quad G = \mathbb{R}, \quad (6-6)$$

我们将在下一节考虑它.

6.2 自治方程的流

现在我们将靠近地观察自治系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (6-7)$$

的解. 整个这一节将假设 $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, 其中 M 是 \mathbb{R}^n 的开子集.

这样的系统可以视为 \mathbb{R}^n 上的向量场. 解是 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 中的曲线, 在每一点它与这个向量场相切. 因此, 为了得到解的图像的几何概念, 我们可以简单地画出对应的向量场.

例 利用 Mathematica 于数学摆的向量场 $f(x, y) = (y, -\sin(x))$, 可作图如下:

```
In[1] := Needs["VectorFieldPlots"];
```

```
In[2] := VectorFieldPlot[{y, -sin[x]}, {x, -2π, 2π}, {y, -5.5},
```

```
Frame→True, PlotPoints→10]
```

```
Out[2] =
```

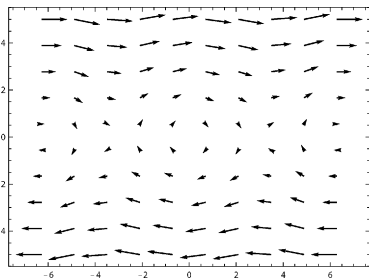


图 6-1

在 6.7 节我们将回到这个例子.

特别地, IVP(6.7) 的解也称为积分曲线或轨线[⊖]. 如果 ϕ 满足 $\phi(0) = \phi_0$, 我们就说 ϕ 是在 x_0 的积分曲线,

由定理 2.12, 对每一点 x , 存在定义在最大区间 $I_x = (T_-(x), T_+(x))$ 上的(唯一)最大积分曲线 ϕ_x .

⊖ 通常将微分方程的解在相空间 \mathbb{R}^n 中的曲线称为相轨线或轨线, 而称它在空间 \mathbb{R}^{n+1} (包括时间变量 t) 中的曲线为积分曲线, 与积分曲线相应的轨线是积分曲线在相空间中的投影. 译者注.

引入集合

$$W = \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times M, \quad (6-8)$$

我们定义微分方程的流为映射

$$\Phi: W \rightarrow M, \quad (t, x) \mapsto \phi(t, x), \quad (6-9)$$

其中 $\phi(t, x)$ 是在 x 的最大积分曲线. 有时候我们也用记号 $\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$ 和 $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$.

如果 $\phi(\cdot)$ 是在 x 的积分曲线, 则 $\phi(\cdot + s)$ 是在 $y = \phi(s)$ 的积分曲线. 它分别定义在 x 和在 y 的积分曲线之间的双射. 进一步, 它映最大积分曲线为最大积分曲线, 因此我们推断有 $I_x = s + I_y$. 从而, 对 $x \in M$ 和 $s \in I_x$ 以及对所有 $t \in I_{\phi(s, x)} = I_x - s$, 我们有

$$\Phi(s + t, x) = \Phi(t, \Phi(s, x)) \quad (6-10)$$

定理 6.1 假设 $f \in C^k$. 则对所有 $x \in M$ 存在包含 0 的区间 $I_x \subseteq M$, 以及在 x 对应的唯一最大积分曲线 $\Phi(\cdot, x) \in C^k(I_x, M)$. 此外, 由式 (6-8) 定义的集合 W 是开的, 且 $\Phi \in C^k(W, M)$ 是 M 上的 (局部) 流, 即

$$\begin{aligned} \Phi(0, x) &= x, \\ \Phi(s + t, x) &= \Phi(t, \Phi(s, x)), \quad x \in M, s, t + s \in I_x. \end{aligned} \quad (6-11)$$

证明 剩下要证明 W 是开的, 且 $\Phi \in C^k(W, M)$. 固定点 $(t_0, x_0) \in W$ (得 $t_0 \in I_{x_0}$) 并令 $\gamma = \Phi_{x_0}([0, t_0])$. 由定理 2.10, 围绕每一点 $x \in \gamma$, 存在 $(0, x)$ 的开邻域 $(-\varepsilon(x), \varepsilon(x)) \times U(x)$, 使得 Φ 在这个邻域内有定义且是 C^k 的. 由于 γ 是紧的, 有限个这样的邻域覆盖了 $\{0\} \times \gamma$, 因此我们可以求得 $\varepsilon > 0$ 以及 γ 的开邻域 U_0 , 使得 Φ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0$ 上有定义. 接下来取 $m \in \mathbb{N}$ 足够大, 满足 $\frac{t_0}{m} < \varepsilon$, 使得 $K \in C^k(U_0)$, 其中 $K: U_0 \rightarrow M$, $K(x) = \Phi_{x_0}^m$. 进一步, 对任何 $0 \leq j \leq m$, 有 $K^{j+1} \in C^k(U_j)$, 其中 $U_j = K^{-j}(U_0) \subseteq U_0$ 是开的. 因为 $x_0 = K^{-j}(\Phi(\frac{j}{m}t_0, x))$ 我们甚至有 $x_0 \in U_j$, 就是说 U_j 是非空的. 特别地,

$$\Phi(t, x) = \Phi(t - t_0, \Phi(t_0, x)) = \Phi(t - t_0, K^m(x)) \quad (6-12)$$

对所有 $(t, x) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U_m$ 有定义且是 C^k 的. \square

特别地, 在式 (6-11) 分别选取 $s = -t$ 和 $t = -s$ 显示 $\Phi_t(\cdot) = \Phi(t, \cdot)$ 是局部同胚, 其逆是 $\Phi_{-t}(\cdot)$. 注意, 如果我们代替 $f \rightarrow -f$, 则有 $\Phi(t, x) = \Phi(-t, x)$.

例 设 $M = \mathbb{R}$ 和 $f(x) = x^3$. 则 $W = \{(t, x) \mid 2tx^2 < 1\}$, 以及 $\Phi(t, x) = \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2t}}$

$T_-(x) = -\infty$ 和 $T_+(x) = 1/(2x^2)$.

满足 $f(x_0) = 0$ 的点 x_0 称为不动点. 除了这种点, 所有向量场局部地看上去是相同的.

引理 6.2 (向量场的直化) 假设 $f(x_0) \neq 0$. 则存在局部坐标变换 $y = \varphi(x)$, 使得 $\dot{x} = f(x)$ 变换成

$$\dot{y} = (1, 0, \dots, 0). \quad (6-13)$$

证明 不妨假设 $x_0 = 0$. 我们看到, 经过线性变换后不妨也假设 $f(0) = (1, 0, \dots, 0)$.

考虑从平面 $x_1 = 0$ 上开始的所有点. 于是我们要找到的变换 φ 应该映点 $\Phi(t, (0, x_2, \dots, x_n))$ 到点 $(0, x_2, \dots, x_n) + t(1, 0, \dots, 0) = (t, x_2, \dots, x_n)$.

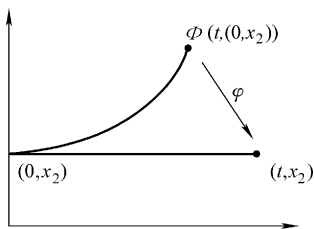


图 6-2

因此, φ 应该是

$$\psi(x) = \Phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n)) \quad (6-14)$$

的逆, 它在 0 的邻域内有定义. 在 0 的雅可比 (Jacobi) 的行列式为

$$\det \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \Big|_{x=0} = \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right) \Big|_{t=0, x=0} = \det I_n = 1, \quad (6-15)$$

因为由假设 $\partial \Phi / \partial x \Big|_{t=0, x=0} = I_n$ 以及 $\partial \Phi / \partial t \Big|_{t=0, x=0} = f(0) = (1, 0, \dots, 0)$. 由反函数定理可以假设 ψ 是局部微分同胚, 因此可以考虑新坐标 $y = \psi^{-1}(x)$. 由于 $\partial \psi_j / \partial x_1 = f_j(\psi(x))$, 即 $(\partial \psi_j / \partial x_j) \delta_{1,i} = f_j(\psi(x))$, 在新坐标下我们的系统化为

$$\dot{y}_j = \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right)_{\psi^{-1}(x)}^{-1} f_i(x) = \delta_{1,j}, \quad (6-16)$$

这是我们所要求的形式. □

问题 6.1 向量

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

能否是自治系统 $\dot{x} = f(x)$ 的解? (提示: 画出轨道). 能否是 $\dot{x} = f(t, x)$ 的解?

问题 6.2 对 $f(x) = x^2$, 计算定义在 $M = \mathbb{R}$ 上的流.

问题 6.3 寻找定义在 $M = \mathbb{R}$ 上, 并直化 $\dot{x} = x$ 的流的变换.

问题 6.4 求证 $\Phi(t, x) = e^t(1+x) - 1$ 是流 (即满足 (6-11)). 你能否求与这个流相应的自治系统?

问题 6.5 假设 $\Phi(t, x)$ 可微且满足式 (6-11). 求证 Φ 是向量场

$$f(x) = \dot{\Phi}(0, x)$$

的流.

6.3 轨道与不变集

x 的轨道定义为

$$\gamma(x) = \Phi(I_x, x) \subseteq M. \quad (6-17)$$

注意, 由 $y \in \gamma(x)$ 得 $y = \Phi(t, x)$, 从而由式 (6-11) 得 $\gamma(x) = \gamma(y)$. 特别地, 不同的轨道是不相交的 (即在 M 上我们有下面的等价关系: 若 $\gamma(x) = \gamma(y)$ 则 $x \simeq y$). 如果 $\gamma(x) = \{x\}$, 则 x 称为 Φ 的不动点 (也称为奇点, 驻点, 平衡点). 否则, x 称为正则点, $\Phi(\cdot, x): I_x \rightarrow M$ 是浸入.

类似地, 我们引入 x 的向前轨道和向后轨道

$$\gamma_{\pm}(x) = \Phi((0, T_{\pm}(x)), x). \quad (6-18)$$

显然, $\gamma(x) = \gamma_-(x) \cup \{x\} \cup \gamma_+(x)$. 我们说 $x \in M$ 是 Φ 的周期点, 如果存在 $T > 0$, 使得 $\Phi(T, x) = x$. x 的这种 $T(x)$ (简记为 T) 的下界即 $T(x) = \inf\{T > 0 \mid \Phi(T, x) = x\}$ 称为 x 的周期. 由 Φ 的连续性与由流的性质 $\Phi(t + T(x), x) = \Phi(t, x)$, 我们有 $\Phi(T(x), x) = x$. 特别, 一个轨道称为周期轨道, 如果轨道上的一点 (因而所有的点) 是周期的.

不难看到 (问题 6.8), x 是周期的, 当且仅当 $\gamma_+(x) \cap \gamma_-(x) \neq \emptyset$, 因此周期轨道又称为闭轨道. 由此我们可以将 f 的轨道分类如下:

- (1) 不动点轨道 (对应于周期为零的周期点)
- (2) 正则周期轨道 (对应于具正周期的周期点)
- (3) 非闭轨道 (不对应于周期点)

上一节定义的量 $T_+(x) = \sup I_x$ (相应的 $T_-(x) = \inf I_x$) 称为 x 的正 (相应的负) 生命时间. 点 $x \in M$ 称为 σ 完全, $\sigma \in \{\pm\}$, 如果 $T_{\sigma}(x) = \sigma\infty$. 点 x 称为完全的, 如果它既是 + 完全又是 - 完全 (即如果 $I_x = \mathbb{R}$).

推论 2.14 给了我们判别什么时候点 $x \in M$ 是 σ 完全的有用准则.

引理 6.3 设 $x \in M$, 且假设 x 的向前 (相应的向后) 轨道位于 M 的紧子集 C 内. 则 x 是 + (相应的 -) 完全的.

显然周期点是完全的. 如果所有点完全, 则向量场称为完全. 因此 f 是完全的意味着 Φ 大范围定义, 即 $W = \mathbb{R} \times M$.

集合 $U \subseteq M$ 称为 σ 不变, $\sigma \in \{\pm\}$, 如果

$$\gamma_{\sigma}(x) \subseteq U, \quad \forall x \in U, \quad (6-19)$$

称它是不变的, 如果它是 \pm 不变, 即如果 $\gamma(x) \subseteq U$.

如果 $C \subseteq M$ 是紧 σ 不变集, 则由引理 6.3 得知 C 中的所有点是 σ 完全的.

引理 6.4 σ 不变集的任意交和并是 σ 不变的. 此外, σ 不变集的闭包仍是 σ 不变的.

证明 只有最后一个论断是非平凡的. 设 U 是 σ 不变, 回忆 $x \in \bar{U}$, 则存在序列 $x_n \in U$ 使得 $x_n \rightarrow x$. 固定 $t \in I_x$. 于是 (由于 W 是开的) 对充分大的 N , 我们有 $t \in I_{x_n}$, $n \geq N$ 以及 $\Phi(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t, x_n) \in \bar{U}$. \square

我们主要目的之一是刻画解的长时间渐近性. 为此我们在下面引入一个轨道最终凝聚在那里的集合.

点 $x \in M$ 的 ω_{\pm} -极限集 $\omega_{\pm}(x)$, 是点 $y \in M$ 的集合, 对此存在序列 $t_n \rightarrow \pm \infty$ 满足 $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$.

显然 $\omega_{\pm}(x)$ 是空的, 除非 x 是 \pm 完全的. 注意到, 如果 $y \in \gamma(x)$ 则 $\omega_{\pm}(x) = \omega_{\pm}(y)$ (如果 $y = \Phi(t, x)$ 我们有 $\Phi(t_n, y) = \Phi(t_n, \Phi(t, x)) = \Phi(t_n + t, x)$). 此外,

引理 6.5 集合 $\omega_{\pm}(x)$ 是闭不变集.

证明 为了看到 $\omega_{\pm}(x)$ 是闭的, 设 y 在它的闭包内, 选择 $y_n \in \omega_{\pm}(x)$ 使得 $|y - y_n| < (2n)^{-1}$, 以及 $t_n \rightarrow \pm \infty$ 使得 $|\Phi(t_n, x) - y_n| < (2n)^{-1}$. 于是 $|\Phi(t_n, x) - y| < n^{-1}$, 从而 $y \in \omega_{\pm}(x)$.

集合 $\omega_{\pm}(x)$ 是不变的, 因为如果 $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$, 则有 $\Phi(t_n + t, x) = \Phi(t, \Phi(t_n, x)) \rightarrow \Phi(t, y)$. \square

例 对方程 $\dot{x} = -x$, 和每个 $x \in \mathbb{R}$ 我们有 $\omega_+(x) = \{0\}$, 因为 $t \rightarrow \infty$ 时每个解收敛于 0. 此外对 $x \neq 0$ 有 $\omega_-(x) = \emptyset$ 以及 $\omega_-(0) = \{0\}$.

特别地, 即使对完全的 x , 集合 $\omega_{\pm}(x)$ 还可以是空的. 因此, 为了保证这个情况不发生, 我们还需要某些进一步假设.

引理 6.6 如果 $\gamma_{\sigma}(x)$ 包含在紧集 C 内, 则 $\omega_{\sigma}(x)$ 是非空, 紧, 且连通.

证明 由引理 6.3, x 是 σ 完全的, 且我们可以选择 $t_n \rightarrow \sigma \infty$ 的序列 $\Phi(t_n, x)$. 由紧性可选取收敛子序列, 因此 $\omega_{\sigma}(x)$ 非空且紧 (由于紧集的闭子集仍是紧的). 如果 $\omega_{\sigma}(x)$ 不连通, 我们可将它分为两个不相交的闭集 $\omega_{1,2}$. 设 $\delta > 0$ 是 ω_1 和 ω_2 之间的最小距离. 取距离 $\omega_{1,2}$ 至多 $\frac{\delta}{2}$ 的所有点, 分别得到 $\omega_{1,2}$ 的两个不相交的邻域 $U_{1,2}$. 现在选择严格的单调序列 $t_n \rightarrow \sigma \infty$ 使得 $\Phi(t_{2m+1}, x) \in U_1$ 和 $\Phi(t_{2m}, x) \in U_2$. 由 $\Phi((t_{2m}, t_{2m+1}), x)$ 的连通性, 我们可以找到 $\Phi(\tilde{t}_m, x) \in C \setminus (U_1 \cup U_2)$, 其中 $t_{2m} < \tilde{t}_m < t_{2m+1}$. 由于 $C \setminus (U_1 \cup U_2)$ 是紧的, 我们可以假定 $\Phi(\tilde{t}_m, x) \rightarrow y \in C \setminus (U_1 \cup U_2)$. 但是 y 也必须在 $\omega_{\sigma}(x)$ 中, 矛盾. \square

现在我们考虑一个例子, 它说明紧性的要求事实上是必须的.

例 设 $M = \mathbb{R}^2$, 并考虑向量场

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1)^2 (\sin(x_1) - x_2 \cos(x_1)) \\ \sin(x_1) + x_2 \cos(x_1) \end{pmatrix}, \quad (6-20)$$

由于 f 有界, 由定理 2.16 它是完全的. 奇点是 $(Z \pi, 0)$. 进一步验证, 对 $x \in (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$, 我们有

$$\Phi(t, x) = \begin{pmatrix} \arctan(re^{\tau(t)} \cos(\tau(t) + \theta)) \\ re^{\tau(t)} \sin(\tau(t) + \theta) \end{pmatrix}, \quad (6-21)$$

其中 (r, θ) 是 $(\tan(x_1), x_2)$ 的极坐标, 以及

$$\dot{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 e^{2\tau(t)} \cos(\tau(t))^2}}, \quad \tau(0) = 0. \quad (6-22)$$

显然, $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是微分同胚, 因此, 如果 $x \neq (0, 0)$, 则 $\omega_-(x) = (0, 0)$ 且 $\omega_+(x) = \{\pm \pi\} \times \mathbb{R}$. 此外,

$$\Phi\left(t, \left(\pm \frac{\pi}{2}, x_2\right)\right) = \begin{pmatrix} \pm \frac{\pi}{2} \\ x_2 \pm t \end{pmatrix}, \quad (6-23)$$

因此, $\omega_-\left(\pm \frac{\pi}{2}, 0\right) = \omega_+\left(\pm \frac{\pi}{2}, 0\right) = \emptyset$.

因此 Φ 仅对 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$ 给出. 对平面余下的部分可用变换 $(t, x_1, x_2) \rightarrow (-t, x_1 \pm \pi, x_2)$ 研究.

非空, 紧, σ 不变集 C 称为极小的, 如果它包含具有这三个性质的非真 σ 不变子集. 注意, 对这样的极小集, 和每一点 $x \in C$, 我们有 $C = \omega_+(x) = \omega_-(x)$. 这种极小集的一个例子是周期轨道. 事实上, 在二维这是唯一的例子 (推论 8.4). 但是, 在三维或更高维, 轨道可以在紧超曲面上稠密, 这时超曲面不能再分裂为更小的闭不变子集.

引理 6.7 每一个非空, 紧 (σ) 不变集 $C \subseteq M$ 包含极小 (σ) 不变集.

此外, 如果 C 同胚于闭 m -维圆盘 (其中 m 不必要是 M 的维数), 则它包含不动点.

证明 第一部分是一般拓扑学中的标准论述 (例如参看文献 [18]). 考虑 C 的所有紧 (σ) 不变子集族 \mathcal{F} . 由紧集的有限交性质, \mathcal{F} 中每一个套有极小数. 故由极小原理[⊙], 存在 F 的极小数.

现在设 C 同胚于圆盘, 为简单起见, 选定 $\sigma = +$. 取序列 $T_j \rightarrow 0$. 由 Brouwer 定理, $\Phi(T_j, \cdot): C \rightarrow C$ 有不动点 x_j . 由于 C 是紧的, 我们可以通过选取子序列以后假设 $x_j \rightarrow x$. 固定 $t > 0$, 并取 $n_j \in \mathbb{N}_0$, 使得 $0 \leq t - n_j T_j < T_j$. 于是

$$\Phi(t, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi(n_j T_j, x_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x \quad (6-24)$$

故 x 是不动点. □

⊙ 极小原理: 设 S 是一个非空集簇, 若对 S 中由关系 \supseteq 组成的每个链 C , $\cap C$ 在 S 中, 则 S 按关系 \supseteq 有极小元素. 译者注.

问题 6.6 考虑 \mathbb{R}^1 中的一阶自治系统. 假设 $f(x)$ 可微, $f(0) = f(1) = 0$, 以及对 $x \in (0, 1)$ 有 $f(x) > 0$. 若 $x \in [0, 1]$, 试确定轨道 $\gamma(t)$ 和 $\omega_{\pm}(x)$.

问题 6.7 设 $\phi(t)$ 是一阶自治系统的解. 假设 $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x \in M$. 求证 x 是不动点且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}(t) = 0$.

问题 6.8 (周期点) 设 Φ 是某一阶自治系统的流.

(1) 求证如果 T 满足 $\Phi(T, x) = x$, 则对 T 的任何整数倍, 此式也成立. 此外, 如果 $T(x) \neq 0$ 则对某 $n \in \mathbb{Z}$, 我们必须有 $T = nT(x)$.

(2) 求证点 x 是不动点, 当且仅当 $T(x) = 0$.

(3) 求证 x 是周期点, 当且仅当 $\gamma_+(x) \cap \gamma_-(x) \neq \emptyset$, 这时对所有 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\gamma_+(x) = \gamma_-(x)$ 和 $\Phi(t + T(x), x) = \Phi(t, x)$. 特别地, 在同一轨道上所有点的周期是相同的.

问题 6.9 点 $x \in M$ 称为是非游荡点, 如果对 x 的每一个邻域 U , 存在正时间序列 $t_n \rightarrow \infty$, 使得对所有 t_n 有 $\Phi_{t_n}(U) \cap U \neq \emptyset$. 非游荡点集记为 $\Omega(f)$.

(1) $\Omega(f)$ 是闭不变集 (提示: 证明它是开集的补集).

(2) $\Omega(f)$ 包含所有的周期轨道 (包括所有的不动点).

(3) 对所有 $x \in M$ 有 $\omega_+(x) \subseteq \Omega(f)$.

对系统 $f(x, y) = (y, -x)$ 求非游荡点集 $\Omega(f)$.

问题 6.10 用 $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$ 表示点 $x \in \mathbb{R}^n$ 和集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 之间的距离. 求证

$$|d(x, A) - d(z, A)| \leq |x - z|.$$

特别地, $x \mapsto d(x, A)$ 是连续的.

问题 6.11 假设 $\gamma_{\sigma}(x)$ 包含在紧集内. 求证 $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, x), \omega_{\sigma}(x)) = 0$.

6.4 庞加莱 (Poincaré) 映射

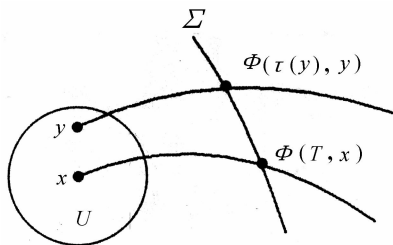
回忆集合 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 称为余维 1 子流形 (即它的维数是 $n-1$), 如果它可写为

$$\Sigma = \{x \in U \mid S(x) = 0\}, \quad (6-25)$$

其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开的, $S \in C^k(U)$ 以及对所有 $x \in \Sigma$, $\partial S / \partial x \neq 0$. 子流形 Σ 称为与向量场 f 横截, 如果对一切 $x \in \Sigma$ 有 $(\partial S / \partial x) \neq 0$.

引理 6.8 假设 $x \in M$ 以及 $T \in I_x$. 设 Σ 是与 f 横截的余维 1 子流形, 使得 $\Phi(T, x) \in \Sigma$. 则存在 x 的邻域 U 和 $\tau \in C^k(U)$, 使得 $\tau(x) = T$ 以及对一切 $y \in U$ 有

$$\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma. \quad (6-26)$$



证明 考虑对 (T, x) 成立的方程 $S(\Phi(t, y)) = 0$. 由横截性, 对 (T, x) 的邻域 $I \times U$ 中的 (t, y) 有

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\Phi(t, y)) = \frac{\partial S}{\partial t}(\Phi(t, y)) f(\Phi(t, y)) \neq 0. \quad (6-27)$$

故由隐函数定理 (也许要对 U 有所限制), 存在函数 $\tau \in C^k(U)$, 使得对一切 $y \in U$, 我们有 $S(\Phi(\tau(y), y)) = 0$, 就是说 $\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma$. \square

如果 x 是周期点, $T = T(x)$ 是它的周期, 则

$$P_\Sigma(y) = \Phi(\tau(y), y) \quad (6-28)$$

称为 **Poincaré 映射**. 它映 Σ 为它自己, 以及, 每个不动点对应于周期轨道. 这将得到研究周期轨道的一个重要工具.

问题 6.12 下面几个方程哪一个确定 \mathbb{R}^2 的余维 1 子流形?

- (1) $x = 0$.
- (2) $x^2 + y^2 = 1$.
- (3) $x^2 - y^2 = 1$.
- (4) $x^2 + y^2 = 0$.

它们之中哪一个与向量场 $f(x, y) = (x, -y)$, $f(x, y) = (1, 0)$ 或者 $f(x, y) = (0, 1)$ 分别横截?

问题 6.13 在哪一点, $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 与向量场 $f(x, y) = (y, -2x)$ 横截?

问题 6.14 向量场 $f(x, y) = (-y, x)$ 有周期解 $(\cos(t), \sin(t))$, 计算对应于 $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}$ 的 Poincaré 映射.

6.5 不动点的稳定性

我们早先已经指出过, 关键问题之一是动力系统 (6-7) 的长时间性态. 特别地, 我们通常要知道解是否 **稳定**. 当然首先我们需要定义稳定性的意义. 通常观察一个不动点, 要知道如果解开始接近它以后会发生什么情况. 因此我们作下面的定义:

$f(x)$ 的不动点 x_0 称为是 **稳定的**, 如果对给定的邻域 $U(x_0)$, 存在另外的邻域

$V(x_0) \subseteq U(x_0)$, 使得对一切 $t \geq 0$, 从 $V(x_0)$ 中开始的任何解都停留在 $U(x_0)$ 内.

类似地, $f(x)$ 的不动点 x_0 称为**渐近稳定**, 如果它稳定, 且存在领域 $U(x_0)^\ominus$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, x) - x_0| = 0, \quad \text{对一切 } x \in U(x_0). \quad (6-29)$$

注意, 由式 (6-29) 不能自动得出稳定性 (问题 6.15).

例如, 考虑 \mathbb{R}^1 中的 $\dot{x} = ax$. 则 $x_0 = 0$ 稳定, 当且仅当 $a \leq 0$, 以及渐近稳定, 当且仅当 $a < 0$. 更一般地, 假设 \mathbb{R}^1 中的 $\dot{x} = f(x)$ 有不动点 x_0 . 那么不难看出 (比较 1.5 节), 若对某个邻域 $U(x_0)$ 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}, \quad (6-30)$$

则 x_0 稳定, 若严格不等式成立, 则不动点渐近稳定. 特别地, 如果 $f'(x_0) \neq 0$ 则稳定性可单独从 f 在 x_0 的导数得出. 但是, 如果 $f'(x_0) = 0$, 则非线性系统的稳定性不能由线性系统提供任何信息, 这可从例子

$$\dot{x} = \mu x^3 \quad (6-31)$$

看出.

在 \mathbb{R}^n , $n > 1$, 方程 $\dot{x} = f(x)$ 一般不能明显求解, 就需要好的稳定性准则. 这是这一章余下部分的主题.

但在这之前, 我们指出, 微分方程关于参数的改变也是有意义的. 由定理 2.11, 流光滑依赖于参数 μ (如果 f 光滑依赖于 μ). 不过, 参数的很小的改变也会引起解的定性性态大的变化. 对这些现象的系统研究就是熟知的**分支理论**. 我们不需要对此作详细说明, 而仅给出几个典型的例子进行说明.

系统

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (6-32)$$

当 $\mu \leq 0$ 时有一个稳定不动点, 它在 $\mu = 0$ 变成不稳定且分裂成两个稳定不动点. 这是熟知的**叉分支**.

系统

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (6-33)$$

对 $\mu \neq 0$ 有两个稳定不动点, 它们在 $\mu = 0$ 合并并且改变其稳定性. 这是熟知的**超临界分支**.

系统

$$\dot{x} = \mu + x^2 \quad (6-34)$$

对 $\mu < 0$ 有一个稳定和一个不稳定不动点, 它们在 $\mu = 0$ 重合并消失. 这是熟知的**鞍-结点分支**.

如果 $f(x_0, \mu_0) = 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 0$, 由隐函数定理不动点数目在 (x_0, μ_0) 可仅

⊖ 通常这里的邻域与稳定性中的邻域是不同的. 译者注.

局部地改变.

问题 6.15 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{y} &= x + y - x(x^2 + y^2) - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}\quad (6-35)$$

求证 (1, 0) 不稳定, 即使它满足式 (6-29). (提示: 求证其极坐标系统是 $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = 2\sin(\theta/2)^2$).

问题 6.16 画出上面三个系统作为 μ 函数的相图, 并证明上面所述的所有论断.

6.6 李雅普诺夫 (Liapunov) 方法稳定性

取 f 的不动点 x_0 和 x_0 的开邻域 $U(x_0)$. 李雅普诺夫 (Liapunov) 函数是连续函数

$$L: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (6-36)$$

它在 x_0 为零, 对 $x \neq x_0$ 为正, 且对任何解 $\phi(t)$ 满足

$$L(\phi(t_0)) \geq L(\phi(t_1)), \quad t_0 < t_1, \quad \phi(t_j) \in U(x_0) \setminus \{x_0\}. \quad (6-37)$$

如果式 (6-37) 中的等号永不出现, 则称它为严格李雅普诺夫 (Liapunov) 函数.

注意, 如果 L 是严格的, 则 $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ 可以不包含周期轨道 (为什么?).

由于函数 L 沿着积分曲线递减, 我们希望 L 的等位集是正向不变的. 设 S_δ 是包含 x_0 的 $\{x \in U(x_0) \mid L(x) \leq \delta\}$ 的连通分支. 注意, 一般 S_δ 可以不是闭的, 因为它可以与 $U(x_0)$ 有公共的边界. 在这时候, 轨道可以通过这个边界的这个部分而离开, 因此为了避免这个情况, 我们需要假设 S_δ 是闭的.

引理 6.9 如果 S_δ 是闭的, 则它是正向不变集.

证明 假设 $\phi(t)$ 在 t_0 离开 S_δ , 令 $x = \phi(t_0)$. 由于 S_δ 是闭的, $x \in S_\delta \subset U(x_0)$, 对小的 $\varepsilon > 0$ 存在满足 $\phi(t_0 + \varepsilon) \in B_r(x) \setminus B_\varepsilon(x)$ 的球 $B_r(x) \subseteq U(x_0)$. 故有 $L(\phi(t_0 + \varepsilon)) > \delta = L(x)$, 这与式 (6-37) 矛盾. \square

此外, S_δ 是 x_0 的邻域, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时它收缩到一点.

引理 6.10 对每一个 $\delta > 0$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$S_\varepsilon \subseteq B_\delta(x_0) \quad \text{和} \quad B_\varepsilon(x_0) \subseteq S_\delta. \quad (6-38)$$

证明 假设式 (6-38) 中的第一个结论不成立. 则对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $x_n \in S_{1/n}$, 使得 $|x_n - x_0| \geq \delta$. 由于 $S_{1/n}$ 是连通的, 我们甚至可以要求 $|x_n - x_0| = \delta$. 由球的紧性, 可以取收敛子序列 $x_{n_m} \rightarrow y$. 由 L 的连续性, 我们有 $L(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} L(x_{n_m}) = 0$, 故 $y = x_0$. 这与 $|y - x_0| = \delta > 0$ 矛盾.

如果式 (6-38) 中的第二个结论不成立, 则我们可以找到序列 x_n , 使得 $|x_n - x_0| \leq 1/n$ 且 $L(x_n) \geq \delta$. 但这样一来, $\delta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(x_n) = L(x_0) = 0$, 又得知矛盾. \square

因此, 任给邻域 $V(x_0)$, 我们可以找到 ε , 使得 $S_\varepsilon \subseteq V(x_0)$ 是正向不变的. 换句话说, x_0 稳定.

定理 6.11 李雅普诺夫 (Liapunov) 假设 x_0 是 f 的不动点. 如果存在李雅普诺夫 (Liapunov) 函数 L , 则 x_0 稳定.

但是, 我们甚至还可以多说几句. 对满足 $\phi(t, x) \in U(x_0)$, $t \geq 0$ 的每一点 x , 由单调性极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(\phi(t, x)) = L_0(x) \quad (6-39)$$

存在. 此外, 对每一点 $y \in \omega_+(x)$ 我们有某个序列 $t_n \rightarrow \infty$ 使得 $\phi(t_n, x) \rightarrow y$, 因此 $L(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\phi(t_n, x)) = L_0(x)$. 从而, 如果 L 在 $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ 中的任何轨道上不是常数, 我们必须有 $\omega_+(x) = \{x_0\}$. 特别地, 这对每一点 $x \in S_\varepsilon$ 成立, 因此 x_0 渐近稳定.

综上所述, 我们已经证明了

定理 6.12 (Krasovskii-LaSalle 原理) 假设 x_0 是 f 的不动点. 如果存在 Liapunov 函数 L , 它在整个地位于 $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ 内的任何轨道上不为常数, 则 x_0 渐近稳定. 这是 L 为严格 Liapunov 函数情形的例子. 此外, 每条整个位于 $U(x_0)$ 的轨道都收敛于 x_0 .

同样也可证明

定理 6.13 设 $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 如果对某个解 $\phi(t, x)$ 有

$$L(\phi(t_0, x)) \geq L(\phi(t_1, x)), \quad t_0 < t_1, \quad (6-40)$$

则在 $\omega_\pm(x) \cap U$ 上 L 是常数.

大部分李雅普诺夫 (Liapunov) 函数事实上是可微的. 这时式 (6-37) 成立, 当且仅当

$$\frac{d}{dt} L(\phi(t, x)) = \text{grad}(L)(\phi(t, x)) \dot{\phi}(t, x) = \text{grad}(L)(\phi(t, x)) f(\phi(t, x)) \leq 0. \quad (6-41)$$

出现在上面方程中的表达式

$$\text{grad}(L)(x) f(x) \quad (6-42)$$

是 L 沿着向量场 f 熟知的 **Lie 导数**^①. 李 (Lie) 导数为零的函数在每一个轨道上为常数, 因此称为**常数运动**.

由定理 6.13 得知所有的 ω_\pm 极限集都包含 Lie 导数为零的点集.

① 对给定函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 和 M 上的向量场 X , f 在点 $p \in X$ 的 Lie 导数是函数 f 沿着向量场 X 的方向导数: $L_X f(p) = \Delta_X f(p) = (\partial f / \partial x_1 X_1 + \cdots + \partial f / \partial x_n X_n) \Big|_p$. 译者注.

问题 6.17 求证 $L(x, y) = x^2 + y^2$ 是系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\eta y - x$$

的李雅普诺夫 (Liapunov) 函数, 其中 $\eta \geq 0$, 研究 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 的稳定性.

问题 6.18 (梯度系统) 下面类型的系统

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) = -\text{grad}V(x)$$

称为梯度系统. 研究其不动点的稳定性. (提示: 计算 V 的 Lie 导数.)

问题 6.19 证明定理 6.13.

6.7 一维 Newton 方程

最后我们来看一个特殊例子, 用它阐述本章的一些结果.

我们已经在引论中学过, 质点在外力场 $f(x)$ 作用下的一维运动是由牛顿方程

$$\ddot{x} = f(x) \quad (6-43)$$

刻画. 物理学家通常称 $M = \mathbb{R}^2$ 为相空间, (x, \dot{x}) 为相点, 称解为相曲线. 于是定理 2.2 说, 通过每一个相点恰有一条相曲线通过.

动能是二次型

$$T(\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad (6-44)$$

势能是函数

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \quad (6-45)$$

对它仅确定到相差一个常数, 常数可任意选择. 动能和势能的和称为系统的总能

$$E = T(\dot{x}) + U(x). \quad (6-46)$$

它沿着解是常数, 因为

$$\frac{d}{dt}E = \ddot{x}\dot{x} + U'(x)\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - f(x)) = 0. \quad (6-47)$$

因此, 对 \dot{x} 求解方程 (6-46), 对应于初始条件 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$ 的解可明显地给出为

$$\text{sign}(x_1) \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = t, \quad E = \frac{\dot{x}_1^2}{2} + U(x_0). \quad (6-48)$$

如果 $x_1 = 0$ 则 $\text{sign}(x_1)$ 必须用 $-\text{sign}(U'(x_0))$ 代替. 运动方程 (6-43) 的不动点是 $\dot{x} = 0, U'(x) = f(x) = 0$ 的解, 因此它对应于势能的极值点. 此外, 如果 $U(x)$ 在 x_0 有局部极小值, 则能量函数 (确切地说是 $E - U(x_0)$) 可作为李雅普诺夫 (Liapunov) 函数. 如果 $U(x)$ 在 $U(x_0)$ 有局部极小, 则 x_0 稳定. 概括地说, 我们有:

定理 6.14 牛顿 (Newton) 方程有不动点, 当且仅当在这点有 $\dot{x} = 0$ 和 $U'(x) = 0$. 此外, 如果 $U(x)$ 在这点有局部极小, 则不动点稳定.

注意, 这个不动点不可能是渐近稳定的 (为什么?).

现在我们研究某些例子. 首先我们看由

$$\ddot{x} = -\sin(x) \quad (6-49)$$

给出的所谓**数学摆**. 这里 x 描述从静止位置 ($x=0$) 开始测量的角位移. 特别地, x 应该理解为 $\text{mod } 2\pi$. 势能是 $U(x) = 1 - \cos(x)$. 为了更好地理解这个系统, 我们来看对应于不同初始条件的解. 这是通常考虑的系统的相图. 用 Mathematica 画出这些解. 下面的编码就是为我们计算的.

```
In[3] := PhasePlot[f_, ic_, tmax_, opts_... ] :=
Block[{i, n = Length[ic], ff, ivp, sol, phaseplot},
ff = f/. {x -> x[t], y -> y[t]};
Off[ParametricPlot::"ppcom"];
Do[
ivp = {x'[t] == ff[[1]], y'[t] == ff[[2]]},
x[0] == ic[[1, i]], y[0] == ic[[1, 2]]};
sol = DNSolve[ivp, {x[t], y[t]}, {t, -tmax, tmax}];
phaseplot[i] =
ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. sol, {t, -tmax, tmax},
, {1, 1, n}];
On[ParametricPlot::"ppcom"];
Show[table[phaseplot[i], {1, 1n}], opts]
];
```

接下来, 我们定义势函数

```
In[4] := U[x_] = 1 - Cos[x];
Plot[U[x], {x, -2π, 2π}, Ticks -> False]
```

Out[4] =

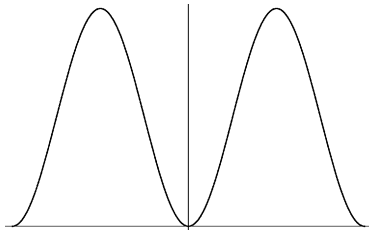


图 6-3

画出相图

```
In[5] := PhasePlot[{y, U'[x]}, {{0, 0.2}, {0, 1}, {-2π, 0.2}, {-2π, 1},
{2π, 0.2}, {2π, 1}, {0, 2}, {2π, -2}, {2π, 2}, {-2π, -2},
{-2π, 2}, {0, -2}, {0, 2.5}, {0, -2.5}, {0, 3}, {0, -3}},
2π, Plot -> Range {{-2π, 2π}, {-3, 3}}, Ticks -> False]
```

Out[5] =

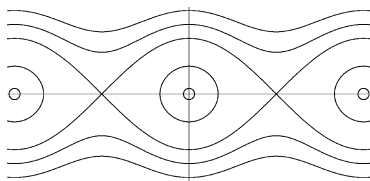


图 6-4

现在我们开始严格研究它. 并把注意力局限于区间 $x \in (-\pi, \pi]$. 不动点是 $x = 0$ 和 $x = \pi$. 由于势能在 $x = 0$ 有极小值, 它是稳定的. 接下来, 如前指出, 等位集 $E(\dot{x}, x) = \text{常数}$ 是不变的. $E = 0$ 对应的等位集是平衡点位置 $(\dot{x}, x) = (0, 0)$. 对 $0 < E < 2$, 等位集同胚于圆周. 由于圆周上不含不动点, 它是正则周期轨道. 接下来, $E = 2$ 的等位集是由不动点 π 和两条连接 $-\pi$ 和 π 的通常称它为分界线的非闭轨线所组成. $E > 2$ 的等位集又是闭轨道 (因为我们在每个地方考虑 $\text{mod } 2\pi$).

在平衡点位置 $x = 0$ 的邻域内, 系统由 $\sin(x) = x + O(x^2)$ 的线性化近似给出调和振子

$$\ddot{x} = -x. \quad (6-50)$$

由于能量为 $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$, 相图是由中心在 0 的圆周所组成. 更一般地, 如果

$$U'(x_0) = 0, \quad U''(x_0) = \frac{\omega^2}{2} > 0, \quad (6-51)$$

我们的系统应该由

$$\ddot{y} = -\omega^2 y, \quad y(t) = x(t) - x_0 \quad (6-52)$$

近似.

显然, 这个方程可按照时间尺度化 $t \rightarrow \frac{t}{\omega}$ 化为式 (6-50).

最后, 注意, 我们经常用矩 $p = \dot{x}$ (已经选择单位使得质量为 1) 和位置 $q = x$ 作为坐标. 能量称为哈密顿 (Hamilton) 方程

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + U(q), \quad (6-53)$$

运动方程这时写为 (比较问题 8.2)

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}. \quad (6-54)$$

这种形式称为哈密顿 (Hamilton) 力学, 这对多于一个自由度的系统也有用. 在 9.3 节我们将回到这个问题.

问题 6.20 考虑数学摆. 如果 $E = 2$, 什么时候摆从 $x = 0$ 运动到 $x = \pi$?

问题 6.21 研究势能 $U(x) = x^2 - 2x^3$.

In[6]: = U[x_] = x^2 - 2x^3;

```
Plot[U[x], {x, -0.5, 1}, TicksFalse]
```

Out[6] =

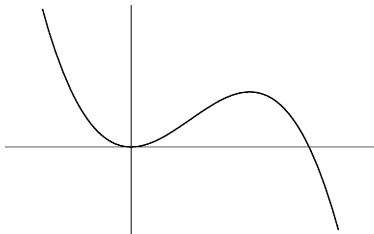


图 6-5

这里你开始得到一些有趣的相曲线.

```
In[7] := PhasePlot[{y, U'[x]}, {{-0.5, 0}, {-0.3}, {-1/6, 6}, {-1/6, 0},
{0.1, 0}
{0.34, 0}, {0.6, 0}}, 4,
PlotRange -> {{-0.6, 1.2}, {-2, 2}}, Ticks -> False]
```

Out[7] =

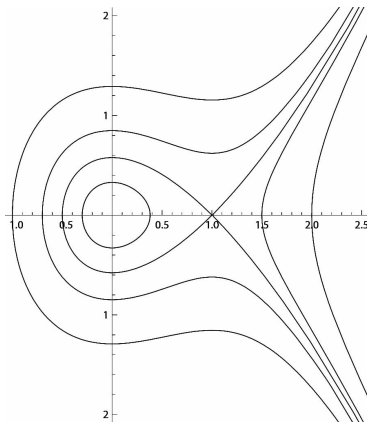


图 6-6

问题 6.22 如果 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = +\infty$, 求证所有解都是周期的.

问题 6.23 具有摩擦力的数学摆是由

$$\ddot{x} = -\eta \dot{x} - \sin(x), \quad \eta > 0$$

描述的. 在这情形下能量是否仍守恒? 证明能量可作为李雅普诺夫 (Liapunov) 函数并证明不动点 $(\dot{x}, x) = (0, 0)$ (渐近) 稳定. 相图如何变化?

问题 6.24 考虑更一般的具摩擦力的系统

$$\ddot{x} = -\eta(x) \dot{x} - U'(x), \quad \eta(x) > 0.$$

(1) 利用能量证明不存在正则周期解 (比较问题 8.3).

(2) 证明 $U(x)$ 的极小点是渐近稳定的.

第 7 章 不动点附近的局部性态

7.1 线性系统的稳定性

这一章我们的目的是证明在不动点附近流的许多信息，可以从不动点附近的线性化系统得到。首先我们需要讨论线性自治系统

$$\dot{x} = Ax \quad (7-1)$$

的稳定性。显然，在 6.5 节的稳定性定义在线性坐标变换下不变。因此不妨假设矩阵 A 是 Jordan 标准形。

此外，从若尔当 (Jordan) 块 J 的 $\exp(tJ)$ 的显式 (3-32) 得知，线性系统的长时间性态由特征值的实部确定。一般它依赖于初始条件，且存在两个线性流形 $E^+(e^A)$ 和 $E^-(e^A)$ ，使得如果我们的解 $x(t)$ 从 $E^+(e^A)$ (相应地 $E^-(e^A)$) 出发，则当 $t \rightarrow \infty$ (相应地， $t \rightarrow -\infty$) 时 $x(t) \rightarrow 0$ 。

线性流形 $E^+(e^A)$ (相应地 $E^-(e^A)$) 称为 **稳定** (相应地，**不稳定**) **流形**，它是由对应于具有负 (相应地，正) 实部的特征值的广义特征向量所张成

$$E^\pm(e^A) = \bigoplus_{\pm \operatorname{Re}(\alpha_j) < 0} \operatorname{Ker}(A - \alpha_j)^{g_j}. \quad (7-2)$$

类似地，我们可以定义对应于具有零实部的特征值的 **中心流形** $E^0(e^A)$ 。但是由于中心流形一般在小扰动下不稳定，我们通常假设它是空的。因而，将所有特征值都具有非零实部的系统取个专门名字，叫 **双曲系统**。

现在从所有特征值具有负实部的情形开始。

定理 7.1 以 $\alpha_j, 1 \leq j \leq m$ 记 A 的特征值，对应的代数重次和几何重次分别以 a_j 和 g_j 记之。

系统 $\dot{x} = Ax$ 大范围稳定，当且仅当 $\operatorname{Re}(\alpha_j) \leq 0$ ，且当 $\operatorname{Re}(\alpha_j) = 0$ 时 $a_j = g_j$ 。

系统 $\dot{x} = Ax$ 大范围渐近稳定，当且仅当对一切 j ，有 $\operatorname{Re}(\alpha_j) < 0$ 。此外，在此情形对每一个 $\alpha < \min\{-\operatorname{Re}(\alpha_j)\}_{j=1}^m$ 存在常数 C ，使得

$$\|\exp(tA)\| \leq Ce^{-t\alpha}. \quad (7-3)$$

证明 如同我们早先指出的，(渐近) 稳定性定义是一个拓扑性质，因此在连续变换下不变。此外，由于 $\|U \exp(tJ) U^{-1}\| \leq \|U\| \exp(tJ) \|U^{-1}\|$ ，不妨假设 A 是若尔当 (Jordan) 标准形。现在由式 (3-32)，第一个论断是显然的。对第二个论断，注意到 $\|\exp(tA)\| = e^{-t\alpha} \|\exp(t(A + \alpha))\|$ 。由于 $\operatorname{Re}(\alpha_j + \alpha) < 0$ ，由式 (3-32) 看到，矩阵 $\exp(t(A + \alpha))$ 的所有元素有界。因此， $\exp(t(A + \alpha))$ 有界。证明完

毕. □

最后, 我们考虑双曲情形. 另外, 由我们前面的定理以及稳定和不稳定流形关于 A (因此关于 $\exp(tA)$) 不变的事实, 立刻得到下面的结果.

定理 7.2 线性稳定和不稳定流形 E^\pm 在流作用下不变, 从 E^\pm 开始的每个解当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时指数式趋于 0. 事实上, 对任何 $\alpha < \min\{\|\operatorname{Re}(\alpha_j)\| \mid \alpha_j \in \sigma(A), \pm \operatorname{Re}(\alpha_j) < 0\}$, 以及依赖于 α 的常数 C , 我们有

$$\|\exp(tA)x_\pm\| \leq Ce^{\mp t\alpha} \|x_\pm\|, \quad \pm t > 0, \quad x_\pm \in E_\pm. \quad (7-4)$$

证明 如前, 我们可以假设 A 是若尔当 (Jordan) 标准形. 为了看到估计 (7-4) 考虑 “+” 的情形并令 $\varepsilon = \min\{\|\operatorname{Re}(\alpha_j)\| \mid \alpha_j \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\alpha_j) < 0\} - \alpha > 0$. 于是对于任何满足 $\operatorname{Re}(\alpha_j) < 0$ 的特征值 α_j , 存在大小为 n 的对应 Jordan 块以及最大元素, 它们可用

$$|t^n e^{\alpha_j t}| \leq |t^n e^{-\varepsilon t}| e^{-\alpha t} \leq \left(\frac{n}{e\varepsilon}\right)^n e^{-\alpha t}$$

估计. □

其余的是直接的.

为了我们进一步的研究, 引入对应于实部小于/大于 $\mp\alpha$ 的特征值的所有广义特征向量张成的空间也是有用的,

$$E^{\pm, \alpha}(e^A) = \bigoplus_{\mp \operatorname{Re}(\alpha_j) > \alpha} \operatorname{Ker}(A - \alpha_j)^{a_j} = E^\pm(e^{A \pm \alpha}). \quad (7-5)$$

等价地,

$$E^{\pm, \alpha}(e^A) = \{x \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{\pm\alpha t} \|\exp(tA)x\| = 0\} \quad (7-6)$$

是对某个给定的指数率 $\alpha > 0$ 由所有收敛于 0 的初始条件所张成的空间. 注意 $E^{\pm, \alpha}$ 是在 α 等于 A 的某个特征值的实部时跳跃的分段常数.

问题 7.1 对问题 3.8 中的矩阵. 如果系统是双曲的, 确定原点的稳定性, 并求对应的稳定和不稳定流形.

问题 7.2 设 A 是 2×2 矩阵, 令

$$X_A(z) = z^2 - Tz + D = 0, \quad T = \operatorname{tr}(A), \quad D = \det(A),$$

为它的特征多项式. 求证如果 $TD \neq 0$, 则 A 是双曲的. 此外, A 渐近稳定, 当且仅当 $D > 0$ 和 $T < 0$ (提示: $T = \alpha_1 + \alpha_2$, $D = \alpha_1 \alpha_2$).

设 A 是 3×3 矩阵, 且令

$$X_A(z) = z^3 - Tz^2 + Mz - D = 0$$

是它的特征多项式. 求证, 如果 $(TM - D)D \neq 0$, 则 A 是双曲的. 此外, A 是渐近稳定的, 当且仅当 $D < 0$, $T < 0$ 且 $TM < D$. (提示: $T = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $M = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3$, $D = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, 以及 $TM - D = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$.)

问题 7.3 假设 A 所有的特征值满足 $\operatorname{Re}(\alpha_j) < 0$. 求证, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} |g(t)| = 0$, 则式 (3-33) 的每个解满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

(提示: 式 (3-34)). 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g_0$ 那解有什么性质?

7.2 稳定流形和不稳定流形

在这一节我们将上一节的某些结果转移到非线性方程. 我们定义不动点 x_0 的稳定集和不稳定集为当 $t \rightarrow \infty$, 和 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于 x_0 的所有点的集合, 即

$$W^\pm(x_0) = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\Phi(t, x) - x_0| = 0\}. \quad (7-7)$$

这两个集合显然在流作用下是不变的. 这一节我们的目的就是求这些集合.

任何在 $x_0 = 0$ 为零的函数 $f \in C^1$ 可分解为

$$f(x) = Ax + g(x) \quad (7-8)$$

其中 A 是 f 在 0 的雅可比 (Jacobi) 矩阵, 以及 $g(x) = o(|x|)$. 显然, 对小的 x , 我们希望非线性方程的解由线性方程的解刻画. 由定理 2.8 这对小的 t 成立, 但当 $|t| \rightarrow \infty$ 时情况如何呢? 在 6.5 节我们对 $n=1$ 已经看到, 如果 $f'(0) \neq 0$, 稳定性可以从 $A = f'(0)$ 得到. 在这一节我们将这个结果推广到高维.

称不动点 x_0 是双曲的, 如果它的线性系统是双曲的, 即 A 的特征值没有一个具有零实部.

由于我们的结果是局部性质的, 固定 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 定义

$$M^{\pm, \alpha}(x_0) = \{x \mid \gamma_\pm(x) \subseteq U(x_0) \text{ 和 } \sup_{t \geq 0} e^{\pm \alpha t} |\Phi(t, x) - x_0| < \infty\} \quad (7-9)$$

为以某个指数率 $\alpha > 0$ 收敛于 x_0 的所有点的点集. 这是由 A 对应于实部小于/大于 $\mp \alpha$ 的特征值的所有特征向量所张成空间 $E^{\pm, \alpha}$ 的像. 现在我们定义不动点 x_0 的局部稳定流形 (相应地, 不稳定流形) 为所有当 $t \rightarrow \infty$ (相应地, $t \rightarrow -\infty$) 时指数式收敛于 x_0 的集合, 即

$$M^\pm(x_0) = \bigcap_{\alpha > 0} M^{\pm, \alpha}(x_0). \quad (7-10)$$

由构造, 这两个集合在流作用下是 \pm 不变的.

在线性情形, 显然我们有 $M^\pm(0) = E^\pm$. 我们的目的是证明作为定理 7.2 的推广, 集合 $M^\pm(x_0)$ 事实上是 (光滑) 流形, 且 E^\pm 在 0 切于 $M^\pm(x_0)$, 如图 7-1 所示. 最后, 证明在双曲情形有 $M^\pm(x_0) = W^\pm(x_0)$.

下面假设 $x_0 = 0$ 是双曲不动点. 我们的关键思想是将问题再次叙述为积分方程以便用迭代求解. 由于我们已经知道线性系统的解的性态, 就可用常数变易公式 (3-83) 把方程写为

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-r)A} g(x(r)) dr. \quad (7-11)$$

现在用 P^\pm 记在 $\exp(\mathbf{A})$ 的稳定, 不稳定子空间 E^\pm 上的投影. 此外, 记 $x_\pm = P^\pm x(0)$ 和 $g_\pm(x) = P^\pm g(x)$.

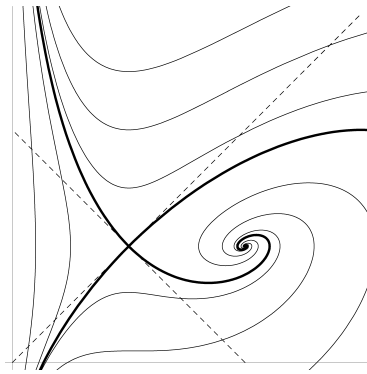


图 7-1 具有双曲不动点 $(1, 1)$ 和稳定/不稳定流形 (粗线) 以及它们的线性像 (虚线) 的相图

要使得 $x(t)$ 保持有界, 对 $x(0) = x_+ + x_-$ 需要什么条件. 显然, 如果 $g(x) = 0$, 这个条件是 $x_- = 0$. 在一般情形, 我们仍可尝试表达 $x_- = h^+(x_+)$. 为此, 将积分方程的不稳定部分投影在一旁, 而对 x_- 求解

$$x_- = e^{-tA} x_-(t) - \int_0^t e^{sA} g_-(x(s)) ds, \quad (7-12)$$

这里 $x_\pm(t) = P^\pm x(t)$. 假设对 $t \geq 0$, $|x(t)|$ 有界, 我们可以令 $t \rightarrow \infty$, 得

$$x_- = - \int_0^\infty e^{-rA} g_-(x(r)) dr, \quad (7-13)$$

其中积分绝对收敛, 因为积分指数式衰减. 将它代回到我们的方程, 得到

$$x(t) = e^{tA} x_+ + \int_0^t e^{(t-r)A} g_+(x(r)) dr - \int_t^\infty e^{(t-r)A} g_-(x(r)) dr. \quad (7-14)$$

引入 $P(t) = P^+$, $t > 0$, 相应地, $P(t) = -P^-$, $t \leq 0$, 这可以写为更紧凑的形式

$$x(t) = K(x)(t), \quad K(x)(t) = e^{tA} x_+ + \int_0^\infty e^{(t-r)A} P(t-r) g(x(r)) dr. \quad (7-15)$$

综上所述, 若 \mathbf{A} 是双曲的, 则每个有界解可从式 (7-15) 求解, 因此可用类似于 2.1 节的不动点方法建立解的存在性. 这将证明在双曲不动点切于稳定流形的线性像的稳定流形的存在性. 不稳定流形可用时间的逆变换 $t \rightarrow -t$ 得到.

事实上, 我们甚至还可以得到更好的结果.

定理 7.3 假设 $f \in C^k$ 有不动点 x_0 , 对应的雅可比 (Jacobi) 矩阵为 \mathbf{A} . 则如果 $\alpha > 0$ 以及 $\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}$ 是双曲的, 那么存在邻域 $U(x_0) = x_0 + U$ 和函数 $h^{+\alpha} \in C^k(E^{+\alpha} \cap U, E^{-\alpha})$, 使得

$$M^{+\alpha}(x_0) \cap U(x_0) = \{x_0 + a + h^{+\alpha}(a) \mid a \in E^{+\alpha}(a) \cap U\}. \quad (7-16)$$

两个 $h^{+\alpha}$ 以及它们的雅可比 (Jacobi) 行列式在 0 为零, 即 $M^{+\alpha}(x_0)$ 在 x_0 切于它

的线性像 $E^{+\alpha}$.

对 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 我们有 $M^{+\alpha_2}(x_0) \subseteq M^{+\alpha_1}(x_0)$ 以及当 $E^{+\alpha_2} = E^{+\alpha_1}$ 时有 $M^{+\alpha_2}(x_0) = M^{+\alpha_1}(x_0)$.

证明 假设 $x_0 = 0$ 并先假设 A 是双曲的使得可以选择 $\alpha = 0$. 我们的底空间巴拿赫 (Banach) 空间是赋予上确界范数

$$\|x\| = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$$

的 $C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$. 为了用迭代求解方程 (7-15), 假设 $|x(t)| \leq \delta$. 于是由于 g 在 0 的雅可比 (Jacobi) 矩阵为零, 我们有

$$|g(x(t)) - g(y(t))| \leq \varepsilon |x(t) - y(t)|, \quad (7-17)$$

其中选择 δ 充分小使得 ε 可任意小. 此外, 对 $\alpha < \min\{|\operatorname{Re}(\alpha)| \mid \alpha \in \sigma(A)\}$ 由式 (7-4) 我们有

$$\|e^{(t-r)A}P(t-r)\| \leq Ce^{-\alpha t-r}.$$

结合式 (7-17) 我们得到

$$\begin{aligned} \|K(x) - K(y)\| &= \left\| \int_0^\infty e^{(t-r)A}P(t-r)(g(x(r)) - g(y(r)))dr \right\| \\ &\leq C \int_0^\infty e^{-\alpha t-r} |g(x(r)) - g(y(r))| dr \\ &\leq C\varepsilon \|x - y\| \sup_{t \geq 0} \int_0^\infty e^{-\alpha t-r} dr = \frac{2C\varepsilon}{\alpha} \|x - y\|, \end{aligned}$$

又如果 $\varepsilon < \alpha/(2C)$ 则由压缩映射原理 (定理 2.1) 存在唯一解 $\psi(t, x_+)$. 此外由定理 7.19 (见 7.4 节下面) 当 f 关于 x_+ 是 C^k 时解 $\psi(t, x_+)$ 关于 x_+ 也是 C^k .

显然我们有 $\psi(t, 0) = 0$. 引入函数 $h^+(a) = P^-\psi(0, a)$ 我们得到非线性系统在 0 的邻域 $U(0)$ 内稳定流形的好候选者 $\{a + h^+(a) \mid a \in E^+ \cap U(0)\}$.

此外, 我们希望 M^+ 在 0 切于 E^+ . 从定理 7.19 的证明得到 $\varphi(t, x_+) = \frac{\partial}{\partial x_+} \psi(t, x_+)$ 满足

$$\varphi(t, x_+) = e^{tA}P^+ + \int_0^\infty e^{(t-r)A}P(t-r)g_x(\psi(r, x_+))\varphi(r, x_+)dr. \quad (7-18)$$

在 $(t, x_+) = (0, 0)$ 计算这个方程, 我们看到 $\varphi(0, 0) = P^+$ 等价于

$$\frac{\partial}{\partial a} h^+(a) \Big|_{a=0} = 0, \quad (7-19)$$

这就是说, 我们的候选者在 0 切于线性稳定流形 E^+ .

为了看一般情形, 作坐标变换 $\tilde{x} = \exp(\alpha t)x(t)$, 它将 A 变换成 $\tilde{A} = A + \alpha I$ 以及 $g(x)$ 变成 $\tilde{g}(t, \tilde{x}) = \exp(\alpha t)g(\exp(-\alpha t)\tilde{x})$. 由于 \tilde{A} 和 \tilde{g} 满足相同假设, 由 $\sup_{t \geq 0} |\tilde{x}(t)| \leq \delta$, 得到 $\sup_{t \geq 0} |x(t)| \leq \delta \exp(-\alpha t)$. 由积分方程在 x_0 的充分小邻域内解的唯一性我们得到式 (7-16).

对最后一个论断我们设 $x \in M^{+, \alpha_2}(x_0) \subseteq M^{+, \alpha_1}(x_0)$, 于是对 $a \in E^{+, \alpha_1} = E^{+, \alpha_2}$ 有 $x = x_0 + a + h^{+, \alpha_2}(a) = x_0 + a + h^{+, \alpha_1}(a)$, 从而得到 $h^{+, \alpha_2}(a) = h^{+, \alpha_1}(a)$. \square

作为第一个结论, 即使在非双曲情形, 我们得到稳定和 unstable 流形的存在性, 因为对使得 $E^+ = E^{+, \varepsilon}$ 的小的 $\varepsilon > 0$ 有 $M^+(x_0) = M^{+, \varepsilon}(x_0)$.

定理 7.4 (稳定流形) 假设 $f \in C^k$ 有不动点 x_0 , 对应的雅可比 (Jacobi) 矩阵为 A . 则存在邻域 $U(x_0) = x_0 + U$ 和函数 $h^\pm \in C^k(E^\pm, E^\mp)$ 使得

$$M^\pm(x_0) \cap U(x_0) = \{x_0 + a + h^\pm(a) \mid a \in E^\pm \cap U\}. \quad (7-20)$$

两个 h^\pm 以及它们的雅可比 (Jacobi) 矩阵在 x_0 为零, 即 $M^\pm(x_0)$ 在 x_0 切于它们对应的线性像 E^\pm . 此外, 对任何 $\alpha < \min \{ \|\operatorname{Re}(\alpha_j)\| \mid \alpha_j \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\alpha_j) \neq 0 \}$, 以及依赖于 α 的某个 $C > 0$, 有

$$\|\Phi(t, x) - x_0\| \leq C e^{\mp t \alpha}, \quad \pm t \geq 0, \quad x \in M^\pm. \quad (7-21)$$

我们甚至可以证明中心子空间 E^0 的非线性像也存在. 但是, 这样的中心流形可以不唯一 (问题 7.10).

在双曲情形, 我们甚至还可多说一点.

定理 7.5 假设 $f \in C^k$ 有双曲不动点 x_0 . 则存在邻域 $U(x_0)$, 使得 $\gamma_\pm(x) \subset U(x_0)$, 当且仅当 $x \in M^\pm(x_0)$. 特别地,

$$W^\pm(x_0) = \{\Phi(t, x) \mid x \in M^\pm(x_0), \pm t \geq 0\}. \quad (7-22)$$

证明 因为我们已经证明, 初始条件充分接近于 x_0 的任何解可从解 (7-14) 得到. 因此, 由解的唯一性 (在 x_0 的充分小邻域内) 得知初始值必须位于 $M^+(x_0)$ 内. \square

可能发生从一个不动点 x_0 的不稳定流形出发的轨道终止于另一个不动点 x_1 的稳定流形. 当 $x_0 \neq x_1$ 时这种轨道称为 **异宿轨道**, 当 $x_0 = x_1$ 时这种轨道称为 **同宿轨道**. 例子见问题.

此外, 我们得到另一个结论:

推论 7.6. 假设 $f \in C^k$, $f(x_0) = 0$, 以及令 f 在 x_0 的雅可比 (Jacobi) 矩阵的所有特征值有负实部. 则点 x_0 是渐近稳定的.

我们也得到, 如果 f 的不动点 x_0 是双曲的, 且 A 至少有一个特征值具有正实部, 则 x_0 不稳定 (为什么?).

最后, 也可能包括 f 依赖于参数 $\lambda \in \Lambda$ 的情形. 设 x_0 是 $f(x, 0)$ 的双曲不动点, 则由隐函数定理, 对充分小 λ 存在不动点 $x_0(\lambda)$ (它仍是双曲的). 特别地, 我们有

$$f(x, \lambda) = A(\lambda)(x - x_0(\lambda)) + g(x, \lambda), \quad (7-23)$$

其中 $A(\lambda)$ 是 $f(\cdot, \lambda)$ 在 $x_0(\lambda)$ 的雅可比 (Jacobi) 矩阵. 由定理 3.42, 投影算子 $P^\pm(\lambda) = P^\pm(A(\lambda))$ 关于 λ 光滑变化, 我们可如前进行而得到 (比较问题 7.13) 下面的

定理 7.7 假设 $f \in C^k$ 以及 $x(\lambda)$ 如上. 则存在邻域 $U(x_0)$ 和函数 $h^\pm \in C^k(E^\pm \times \Lambda, E^\mp)$, 使得

$$M^\pm(x_0(\lambda)) \cap U(x_0) = \{x(\lambda) + P^\pm(\lambda)a + h^\pm(a, \lambda) \mid a \in E^\pm \cap U\}. \quad (7-24)$$

问题 7.4 对

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

求 $E^{\pm, \alpha}$ 并计算 P^\pm .

问题 7.5 求

$$f(x) = (x_2, -\sin(x_1))$$

的线性化, 如果可能, 再确定 $x=0$ 的稳定性.

问题 7.6 (达芬 (Duffing) 方程) 研究达芬 (Duffing) 方程

$$\ddot{x} = -\delta \dot{x} + x - x^3, \quad \delta \geq 0.$$

由线性化确定不动点的稳定性. 求在情形 $\delta=0$ 原点的稳定和不稳定流形.

问题 7.7 考虑系统

$$f(x) = (-x_1, x_2 + x_1^2).$$

求流. (提示: 从对 x_1 的方程开始). 接下来求稳定和不稳定流形. 画出相图并与它的线性化进行比较.

问题 7.8 (异宿轨道) 由线性化确定摆 (6-49) 的不动点的稳定性. 求稳定和不稳定流形以及异宿轨道.

问题 7.9 (同宿轨道) 由线性化确定问题 6.21 中的系统的不动点的稳定性. 求稳定和不稳定流形以及同宿轨道.

问题 7.10 考虑系统

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y^2.$$

求所有形如 $\{(h(a), a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ 的光滑不变流形, 它们都切于 E^0 .

问题 7.11 考虑系统

$$f(-x_1 - x_2^2, x_2 + x_1^2).$$

利用计算 (7.14) 的几次迭代求稳定流形的近似. (数值) 画出相图并与线性化进行比较.

问题 7.12 对洛伦兹 (Lorenz) 方程

$$f(x) = (x_2 - x_1, rx_1 - x_2 - x_1x_3, x_1x_2 - x_3), \quad r > 0$$

的不动点按稳定性分类. 在 r 的什么值不动点的个数发生变化?

问题 7.13 假设矩阵 $A(\lambda)$ 在某紧集上关于 λ 是 C^k . 又假设存在 $0 < \alpha_0 < \min \{|\operatorname{Re}(\alpha)| \mid \alpha \in \sigma(A(\lambda))\}$. 则

$$\left\| \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^n e^{tA(\lambda)} P(\lambda, t) \right\| \leq C_n (1 + |t|^n) e^{-\alpha_0 |t|}, \quad n \leq k.$$

(提示: 从 $A(\lambda)$ 是纯量情形开始, 对一般情形可对指数的幂级数求导数. 问题是 $A(\lambda)$ 和它的导数可能不可交换. 但是一旦取范数后...).

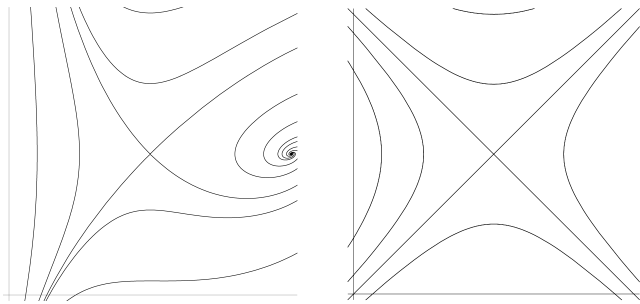


图 7-2 具有双曲不动点(1,1)的平面系统的相图和它的线性化的相图

7.3 Hartman-Grobman 定理

上一节的结果只告诉我们在稳定和 unstable 流形上轨道的某些信息. 这一节我们要证明一个较强的结果, 它显示双曲不动点附近的轨道局部地正好是它们的线性像的连续变形. 如图 7-2 所示

如果我们假设 A 没有特征值在单位圆上, 我们可以利用 $\mathbb{R}^n = E^-(A) \oplus E^+(A)$ 将 A 划分为压缩部分和伸长部分 $A = A_- \oplus A_+$, 其中 $A_{\pm} = A|_{E^{\pm}(A)}$. 由构造, A_+ 的所有特征值位于单位圆的内部, A_- 的所有特征值位于单位圆的外部. 因此由问题 3.41 我们可以求得范数使得 $\|A_+\| < 1$.

我们从对映射的下面的引理开始.

引理 7.8 假设 A 是没有特征值在单位圆上的可逆矩阵, 选择范数使得 $\alpha = \max(\|A^{-1}\|, \|A_+\|) < 1$. 则对每个满足

$$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon |x - y|, \quad \varepsilon < \frac{1 - \alpha}{2} \quad (7-25)$$

的有界函数 g 存在唯一连续映射 $\varphi(x) = x + h(x)$, h 为有界函数, 使得

$$\varphi \circ A = f \circ \varphi, \quad f = A + g, \quad (7-26)$$

如果 f 可逆 (例如, 如果 $\varepsilon \|A^{-1}\| < 1$), 则 φ 是一个同胚, 如果另外有 $g(0) = 0$ 则 $\varphi(0) = 0$.

证明 条件 (7-26) 等价于

$$h(Ax) - Ah(x) = g(x + h(x)). \quad (7-27)$$

我们将在赋予上确界范数的连续函数的巴拿赫 (Banach) 空间 $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 上研究这个方程. 首先注意由 $(Uh)(x) = h(Ax)$ 给出的线性算子 $U: C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n,$

\mathbb{R}^n)是可逆的(因为 A 是可逆的)且范数保持. 显然我们也可以视 A 为由 $(Ah)(x) = Ah(x)$ 给出的线性算子

$$A: C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

引入 $L = U - A$ 可以将式 (7-27) 写为 $Lh(x) = g(x + h(x))$. 为了得到不动点方程需要 L 的逆. 分解 $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n, E^-(e^A)) \oplus C(\mathbb{R}^n, E^+(e^A))$, 对应的有分解 $A = A_- \oplus A_+$, $U = U_- \oplus U_+$ 和 $L = L_- \oplus L_+$.

由 $L_- = -A_-(I - A_-^{-1}U_-)$, 我们看到 $L_-^{-1} = -(I - A_-^{-1}U_-)^{-1}A_-^{-1}$, 其中 $(I - A_-^{-1}U_-)$ 可逆, 其逆由诺伊曼 (Neumann) 级数 (问题 7.14)

$$(I - A_-^{-1}U_-)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_-^{-1}U_-)^n \quad (7-28)$$

给出. 因为 $\|A_-^{-1}U_-\| \leq \alpha$. 特别, $\|L_-^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\alpha}$. 类似地, $L_+^{-1} = (I - U_+^{-1}A_+)^{-1}U_+^{-1}$,

其中 $\|L_+^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

综上所述, $L^{-1} = (U_- - A_-)^{-1} \oplus (U_+ - A_+)^{-1}$ 存在且 $\|L^{-1}\| \leq \frac{2}{1-\alpha}$. 因此, 余

下的要求解不动点方程

$$h(x) = L^{-1}g(x + h(x)). \quad (7-29)$$

因为右端的算子是压缩的, 故我们有

$$\begin{aligned} & \|L^{-1}g(x + h_1(x)) - L^{-1}g(x + h_2(x))\| \\ & \leq \frac{2}{1-\alpha} \|g(x + h_1(x)) - g(x + h_2(x))\| \\ & \leq \frac{2\varepsilon}{1-\alpha} \|h_1 - h_2\|, \end{aligned} \quad (7-30)$$

于是压缩原理 (定理 2.1) 保证了唯一解的存在性.

现在假设 f 可逆, 则存在映射 $\vartheta(x) = x + k(x)$ 使得 $A \circ \vartheta = \vartheta \circ f$. 事实上, 如前, 但用 $U(k)(x) = k(f(x))$ 定义 L . 我们看到最后这个方程等价于 $L(k)(x) = -g(x)$, 又用如上相同的论述证明 L 是可逆的, 于是我们得到 $k(x) = -L^{-1}(g)(x)$. 因此 $A \circ \vartheta \circ \varphi = \vartheta \circ f \circ \varphi = \vartheta \circ \varphi \circ A$, 由我们结果的唯一性部分 (在情形 $g \equiv 0$) 得 $\vartheta \circ \varphi = I$. 类似地, 由 $A^{-1} \circ \varphi \circ \vartheta = \varphi \circ \vartheta \circ A^{-1}$, 得 $\varphi \circ \vartheta = I$, 因此 φ 是同胚.

为了证明 $\varphi(0) = 0$, 计算在 $x = 0$ 的 $A\varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(f(x))$, 得 $A\varphi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(0)$. 但这个方程只有解 $\varphi^{-1}(0) = 0$. \square

推论 7.9 设 A 是前面引理中的 A 而 f 任意. 假设存在同胚 $\varphi(x) = x + h(x)$, h 有界, 使得

$$\varphi \circ A = f \circ \varphi, \quad (7-31)$$

则 φ 是唯一的.

证明 假设存在两个这样的映射 φ_1 和 φ_2 . 注意到逆 φ_j^{-1} 是相同类型 (问题 7.15). 则由 $f = \varphi_1 A \varphi_1^{-1} = \varphi_2 A \varphi_2^{-1}$ 得知 $A(\varphi_1^{-1} \varphi) = (\varphi_1^{-1} \varphi) A$, 再由上面引理的 $g \equiv 0$ 情形, 得知 $\varphi_1 \varphi_2^{-1} = I$. \square

现在可以证明我们期望的结果.

定理 7.10 (Hartman-Grobman) 假设 f 是可微向量场, 它有双曲不动点 0. 记 $\Phi(t, x)$ 为对应的流, $A = df_0$ 为 f 在 0 的 Jacobi 矩阵. 则存在同胚 $\varphi(x) = x + h(x)$, h 有界, 使得在 0 的充分小邻域内有

$$\varphi \circ e^{tA} = \Phi_t \circ \varphi. \quad (7-32)$$

证明 我们的方法是应用引理 7.8 去求 φ , 使它在固定的 t , 譬如在 $t=1$ 公式成立. 然后验证它实际上对所有的 t 都成立.

首先我们需要去控制

$$\Pi(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, x). \quad (7-33)$$

由

$$\dot{\Phi}(t, x) = f(\Phi(t, x)), \quad \Phi(0, x) = x \quad (7-34)$$

得到

$$\dot{\Pi}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x)) \Pi(t, x), \quad \Pi(0, x) = I, \quad (7-35)$$

令 $x=0$ 得

$$\Pi(t, 0) = e^{tA}. \quad (7-36)$$

因此

$$\Phi_1(x) = e^A x + G(x), \quad (7-37)$$

其中式 (7-25) 至少在充分接近于我们的不动点时成立. 为了确认它永远成立, 我们将对 f 作点修改.

设 $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑碰撞函数, 使得对 $0 \leq x \leq 1$ 有 $\phi(x) = 0$, 对 $x \geq 2$ 有 $\phi(x) = 1$. 用函数 $\tilde{f}(x) = Ax + (1 - \phi(|x|/\delta))g(x)$ 代替 $f(x) = Ax + g(x)$, 对 $|x| \geq 2\delta$ 不妨考虑满足 $f=A$ 的大范围问题. 注意我们可以选择 δ 很小使得

$$\left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x) \right| \leq C \sup_{|x| \leq 2\delta} \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right|$$

充分小 (证明这个!). 此外, 注意对充分大的 $|x|$ (例如, 对 $|x| \geq 2\delta e^\alpha$, 其中 α 是对 A 所有特征值 α_j 满足 $\alpha \geq -\text{Re}(\alpha_j)$ 的某个非负数) $\tilde{G}(x)$ 为 0. 从现在起我们将用 \tilde{f} , 为了记号简单起见去掉上面的小波纹.

为了能够应用引理 7.8, 需要证明由

$$\Pi(t, x) = e^{tA} + z(t, x) \quad (7-38)$$

定义的 $z(1, x)$ 可任意小, 只要选择 δ 足够小. 将它代入式 (7-35) 得到

$$z(t, x) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(\Phi(s, x)) e^{sA} ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(s, x)) z(s, x) ds. \quad (7-39)$$

如上选择足够小 δ 使得 $\frac{\partial g}{\partial x}$ 任意小, 并应用格朗沃尔 (Gronwall) 不等式得到定理结论.

因此, 存在 φ 使得 (7-32) 至少对 $t=1$ 成立. 进一步, 映射 $\varphi_s = \Phi_s \circ \varphi \circ e^{-sA}$ 对 $t=1$ 也满足式 (7-32)

$$\varphi_s \circ e^A = \Phi_s \circ \varphi \circ e^A \circ e^{-sA} = \Phi_s \circ \Phi_1 \circ \varphi \circ e^{-sA} = \Phi_1 \circ \varphi_s. \quad (7-40)$$

因此, 如果我们能证明 $\varphi_t(x) = x + h_t(x)$, h_t 有界, 则推论 7.9 将告诉我们 $\varphi = \varphi_t$, 而这正是式 (7-32). 现在考察

$$h_t = \Phi_t \circ \varphi \circ e^{-tA} - I = (\Phi_t - e^{tA}) \circ e^{-tA} + \Phi_t \circ h \circ e^{-tA}, \quad (7-41)$$

其中第一项有界, 因为对充分大的 x (例如前面指出的 $|x| \geq 2\delta$) $\Phi_t(x) = e^{tA}x$ 有界. 第二项由于 h 有界而有界. \square

两个向量场 f, g 的系统 and 它们相应的流 Φ_f, Φ_g 称为是拓扑共轭, 如果存在同胚 φ 使得

$$\varphi \circ \Phi_{f,t} = \Phi_{g,t} \circ \varphi. \quad (7-42)$$

注意, 流的拓扑共轭是一个等价关系.

因此, Hartman-Grobman 定理叙述为, f 在双曲不动点局部共轭于它的线性化系统. 事实上甚至存在更强的结果, 就是说, 两个向量场在双曲不动点附近局部共轭, 当且仅当它们相应的稳定子空间和不稳定子空间的维数相同.

为证明这点, 只需证明对线性系统这个结果成立. 再由等价关系的传递性和 Hartman-Grobman 定理得知.

定理 7.11 假设 A 和 B 是两个没有特征值在虚轴上的矩阵. 如果对它们的流, 相应的稳定和不稳定子空间的维数相同. 则它们的流拓扑共轭.

证明 首先, 不妨假设 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^u$, 其中 \mathbb{R}^s 和 \mathbb{R}^u 是对应这两个流, 相应的稳定和不稳定子空间 (事实上, 我们甚至利用线性共轭, 可假设两个矩阵是 Jordan 标准形). 我们分开地处理两个部分, 即只需证明 $s=n$ 和 $u=n$ 两个情形. 此外, 甚至只需对情形 $s=n$ 证明, 因为另外一个情形由考虑 A^{-1}, B^{-1} 得知.

所以, 我们假设 $s=n$, 就是说, 所有的特征值具有负实部. 因此, 存在范数使得对一切 $t \geq 0$ 和某个小数 α 有 $|\exp(tA)x|_A \leq \exp(-t\alpha)|x|_A$ (问题 3.41). 作变换 $t \rightarrow -t$ 和 $x \rightarrow \exp(tA)x$, 我们也得到, 对一切 $t \leq 0$ 有 $|\exp(tA)x|_A \geq \exp(-t\alpha)|x|_A$. 因此对 $t \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |x(t)|_A &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\exp(sA)x(t)|_A - |x(t)|_A}{s} \\ &\leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\exp(-s\alpha) - 1}{s} |x(t)|_A = -\alpha |x(t)|_A. \end{aligned} \quad (7-43)$$

从而, 存在唯一时间 $\tau_A(x)$, 使得对 $x(t)|_A > 1$ 有 $|\exp(\tau(x)\mathbf{A})x|_A = 1$. 类似地, 对 $t \leq 0$ 有 $\frac{d}{dt}|x(t)|_A \geq -\alpha|x(t)|_A$, 以及也存在唯一的时间 $\tau_A(x) < 0$, 使得对 $0 < |x(t)|_A \leq 1$ 有 $|\exp(\tau(x)\mathbf{A})x|_A = 1$. 此外, 单位球面 $|x|_A = 1$ 是横截的, 以及由引理 6.8, τ_A 是光滑函数. 注意 $\tau_A(\exp(t\mathbf{A})x) = \tau_A(x) - t$. 类似地可对 \mathbf{B} 进行考虑.

于是, 函数 $h_{AB}(x) = x/|x|_B$ 将对 \mathbf{A} 的单位球连续映为对 \mathbf{B} 的单位球. 此外, 由 $h_{BA}(x) = x/|x|_A$ 给出逆, 故它是同胚. 现在考虑映射

$$h(x) = \exp(-\tau_A(x)\mathbf{B})h_{AB}(\exp(\tau_A(x)\mathbf{A})x), \quad x \neq 0, \quad (7-44)$$

它是从 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 到它自身的同胚. 事实上, 它的逆是

$$h^{-1}(x) = \exp(-\tau_B(x)\mathbf{A})h_{BA}(\exp(\tau_B(x)\mathbf{B})x), \quad x \neq 0, \quad (7-45)$$

这是容易得到的, 因为若 $y = h(x)$, 则 $\tau_B(x) = \tau_A(y)$. 进一步, 由于当 $x \rightarrow 0$ 时 $\tau(x) \rightarrow -\infty$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时我们有 $|h(x)| \leq c\|\exp(-\tau(x)\mathbf{B})\| \rightarrow 0$. 由此, 令 $h(0) = 0$, 我们就可将 h 扩展为 \mathbb{R}^n 到它自己的同胚.

最后, h 是拓扑共轲的, 因为

$$\begin{aligned} h(\exp(t\mathbf{A})x) &= \exp((t - \tau_A(x))\mathbf{B})h_{AB}(\exp((\tau_A(x) - t)\mathbf{A})\exp(t\mathbf{A})x) \\ &= \exp(t\mathbf{B})h(x), \end{aligned} \quad (7-46)$$

这里我们用了 $\tau_A(\exp(t\mathbf{A})x) = \tau_A(x) - t$. □

问题 7.14 设 X 是巴拿赫 (Banach) 空间, $A: X \rightarrow X$ 是线性算子. 令

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

求证这定义了一个范数. 此外, 证明

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

且如果 $\|A\| < 1$ 则 $I + A$ 可逆, 它的逆由诺伊曼 (Neumann) 级数

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

给出. 进一步, $\|(I - A^{-1})\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$

问题 7.15 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是形如 $\varphi(x) = x + h(x)$ 的同胚, 其中 h 有界. 求证 $\varphi^{-1}(x) = x + k(x)$, 其中 $k(x)$ 也有界 (有相同上界).

问题 7.16 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \alpha > 0.$$

计算定理 7.11 证明中所得到的明显共轲.

7.4 附录: 积分方程

我希望经过上面几节讨论以后, 你到如今会确信积分方程是研究微分方程的一个重要工具. 下面一些技巧性的结果在初读时可以省略掉.

主要工具还是不动点定理. 但是, 我们现在需要的不动点方程是依赖于另外的参数 $\lambda \in \Lambda$ 的情形, 其中 Λ 是某个巴拿赫 (Banach) 空间的子集.

定理 7.12 (一致压缩原理) 设 C 是巴拿赫 (Banach) 空间 X 的 (非空) 闭子集, Λ 是另一个巴拿赫 (Banach) 空间的子集. 假设 $K_\lambda: C \rightarrow C$ 是一致压缩的, 即

$$\|K_\lambda(x) - K_\lambda(y)\| \leq \theta \|x - y\|, \quad x, y \in C, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (7-47)$$

且 $K_\lambda(x)$ 关于 $\lambda \in \Lambda$ 和每一个 $x \in C$ 连续. 则唯一不动点 $\bar{x}(\lambda)$ 连续依赖于 λ .

此外, 如果 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 则

$$x_{n+1} = K_{\lambda_n}(x_n) \rightarrow \bar{x}(\lambda). \quad (7-48)$$

证明 首先, 证明 $\bar{x}(\lambda)$ 连续. 由三角不等式我们有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(\lambda) - \bar{x}(\eta)\| &= \|K_\lambda(\bar{x}(\lambda)) - K_\eta(\bar{x}(\eta))\| \\ &\leq \theta \|\bar{x}(\lambda) - \bar{x}(\eta)\| + \|K_\lambda(\bar{x}(\eta)) - K_\eta(\bar{x}(\eta))\|, \end{aligned} \quad (7-49)$$

因此

$$\|\bar{x}(\lambda) - \bar{x}(\eta)\| \leq \frac{1}{1-\theta} \|K_\lambda(\bar{x}(\eta)) - K_\eta(\bar{x}(\eta))\|. \quad (7-50)$$

由于当 $\lambda \rightarrow \eta$ 时上式右端收敛于零, 故左端也是, 因此 $\bar{x}(\lambda)$ 连续.

记 $\Delta_n = \|x_n - \bar{x}(\lambda)\|$, $\varepsilon_n = \|\bar{x}(\lambda_n) - \bar{x}(\lambda)\|$, 考虑

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &\leq \|x_{n+1} - \bar{x}(\lambda_n)\| + \|\bar{x}(\lambda_n) - \bar{x}(\lambda)\| \leq \theta \|x_n - \bar{x}(\lambda_n)\| + \varepsilon_n \\ &\leq \theta \Delta_n + (1 + \theta) \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (7-51)$$

因此, 由于 ε_n 收敛于 0,

$$\Delta_n \leq \theta^n \Delta_0 + (1 + \theta) \sum_{j=1}^n \theta^{n-j} \varepsilon_{j-1} \quad (7-52)$$

收敛于 0 (证明这个结论). □

也存在定理 2.4 的一致形式.

定理 7.13 设 C 是巴拿赫 (Banach) 空间 X 的 (非空) 闭子集, Λ 是另一个巴拿赫 (Banach) 空间的子集. 假设 $K_\lambda: C \rightarrow C$ 对每一点 $x \in C$ 关于 λ 连续, 且满足

$$\|K_{\lambda_n} \circ \cdots \circ K_{\lambda_1}(x) - K_{\lambda_n} \circ \cdots \circ K_{\lambda_1}(y)\| \leq \theta_n \|x - y\|, \quad x, y \in C, \quad \lambda_j \in \Lambda, \quad (7-53)$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$. 则其唯一不动点 $\bar{x}(\lambda)$ 关于 λ 连续.

此外, 如果 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 则

$$x_{n+1} = K_{\lambda_n}(x_n) \rightarrow \bar{x}(\lambda). \quad (7-54)$$

证明 首先证明, $K_{\underline{\lambda}} = K_{\lambda_n} \circ \cdots \circ K_{\lambda_1}$, $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 对固定的 $x \in C$ 关于 $\underline{\lambda} \in \Lambda^n$ 连续. 由假设, 定理结论对 $n=1$ 成立. 余下要证明, 只要它对 $n-1$ 成立就对 n 成立. 但这可由下面得知

$$\begin{aligned} & \|K_{\lambda_n} \circ K_{\underline{\lambda}}(x) - K_{\eta_n} \circ K_{\underline{\eta}}(x)\| \\ & \leq \|K_{\lambda_n} \circ K_{\underline{\lambda}}(x) - K_{\lambda_n} \circ K_{\underline{\eta}}(x)\| + \|K_{\lambda_n} \circ K_{\underline{\eta}}(x) - K_{\eta_n} \circ K_{\underline{\eta}}(x)\| \\ & \leq \theta_1 \|K_{\underline{\lambda}}(x) - K_{\underline{\eta}}(x)\| + \|K_{\lambda_n} \circ K_{\underline{\eta}}(x) - K_{\eta_n} \circ K_{\underline{\eta}}(x)\|. \end{aligned} \quad (7-55)$$

其中 $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ 和 $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$.

现在注意到, 对充分大 n 有 $\theta_n < 1$, 因此 $K_{\underline{\lambda}}$ 是一致压缩的, 对此我们可用定理 7.12. 特别地, 选择 $\underline{\lambda}_j = (\lambda_j, \dots, \lambda_{j+n-1})$, 我们有 $x_{n(j+1)+l} = K_{\underline{\lambda}_j}(x_{nj+1})$ 收敛于 $K_{(\lambda, \dots, \lambda)}$ 的唯一不动点, 它就是 $\bar{x}(\lambda)$. 因此对每一个 $0 \leq l \leq n-1$ 有 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{nj+l} = \bar{x}(\lambda)$, 故得 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \bar{x}(\lambda)$. \square

现在我们已经准备好把这些结果用到积分方程上去. 但是, 证明要求积分理论的某些结果, 我们先来叙述它们. 考虑函数 $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, 可积函数是指黎曼 (Riemann) (或勒贝格 (Lebesgue)) 积分, 对此 $\int |f(x)| dx$ 是有限的.

定理 7.14 (控制收敛性) 假设 $f_n(x)$ 是逐点收敛于可积函数 $f(x)$ 的可积函数序列. 如果存在控制函数 $g(x)$, 即 $g(x)$ 可积并满足

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad (7-56)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx. \quad (7-57)$$

证明见任何一本实分析或者测度理论的书.

这个结果有两个直接的推论, 我们在后面将要用到它们.

推论 7.15 假设逐点有 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 和 $df_n(x) \rightarrow g(x)$. 如果对 $df_n(x)$ (局部) 存在控制函数, 则 $f(x)$ 可微且 $df(x) = g(x)$.

证明 只需对 f 是一维情形证明. 利用

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t) dt \quad (7-58)$$

两边取极限得结果. \square

推论 7.16 假设 $f(x, \lambda)$ 对任何 λ 关于 x 可积, 对任何 x 关于 λ 连续可微. 如果存在控制函数 $g(x)$ 使得

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \leq g(x), \quad (7-59)$$

则函数

$$F(\lambda) = \int f(x, \lambda) dx \quad (7-60)$$

连续可微, 且导数为

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda) = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx. \quad (7-61)$$

证明 再次只需考虑 f 是一维的情形. 由于

$$f(x, \lambda + \varepsilon) - f(x, \lambda) = \varepsilon \int_0^1 f'(x, \lambda + \varepsilon t) dt, \quad (7-62)$$

我们有

$$\frac{F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda)}{\varepsilon} = \int \int_0^1 f'(x, \lambda + \varepsilon t) dt dx. \quad (7-63)$$

此外, 由于 $|f'(x, \lambda + \varepsilon t)| \leq g(x)$, 由控制收敛性定理有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 f'(x, \lambda + \varepsilon t) dt = f'(x, \lambda). \quad (7-64)$$

再用控制收敛定理, 注意到 $\left| \int_0^1 f'(x, \lambda + \varepsilon t) dt \right| \leq g(x)$, 得知结论. \square

现在我们转到积分方程. 如在 2.2 节我们赋予连续函数集合 $C(U, \mathbb{R}^n)$ (其中 $U \subseteq \mathbb{R}^m$) 上确界范数 $\|f\| = \sup_{x \in U} |f(x)|$, 使得 $C(U, \mathbb{R}^n)$ 成为一个巴拿赫 (Banach) 空间.

假设 U 是 \mathbb{R}^n 的开子集, 考虑下面的 (非线性) 沃尔泰拉 (Volterra) 积分方程

$$K_\lambda(x)(t) = k(t, \lambda) + \int_0^t K(s, x(s), \lambda) ds, \quad (7-65)$$

其中

$$k \in C(I \times \Lambda, U), \quad K \in C(I \times U \times \Lambda, \mathbb{R}^n), \quad (7-66)$$

这里 $I = [-T, T]$ 和 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集. 我们要求存在常数 L (与 t 和 λ 无关), 使得

$$|K(t, x, \lambda) - K(t, y, \lambda)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in U. \quad (7-67)$$

由定理 7.12 知道, 存在唯一解 $\bar{x}(t, \lambda)$ 关于 λ 连续. 下面的结果甚至可推出, 如果 k 和 K 可微, 这个解也可微.

定理 7.17 设 K_λ 满足上面的要求式 (7-66) 和式 (7-67), 并令 $T_0 = \min\left(T, \frac{\delta}{M}\right)$, 其中 $\delta > 0$ 使得

$$C_\delta = \{B_\delta(k(t, \lambda)) \mid (t, \lambda) \in [T, T] \times \Lambda\} \subset U \quad (7-68)$$

以及

$$M = \sup_{(t, x, \lambda) \in [-T, T] \times B_\delta(0) \times \Lambda} |K(t, k(t, \lambda) + x, \lambda)|. \quad (7-69)$$

则积分方程 $K_\lambda(x) = x$ 有唯一解 $\bar{x}(t, \lambda) \in C([-T_0, T_0] \times \Lambda, U)$ 满足

$$|\bar{x}(t, \lambda) - k(t, \lambda)| \leq e^{LT_0} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{-T_0}^{T_0} |K(s, k(s, \lambda), \lambda)| ds. \quad (7-70)$$

此外, 如果 $k(t, \lambda)$ 和 $K(t, x, \lambda)$ 关于 λ 和 x 的所有直到 r 阶的偏导数都连续, 则 $\bar{x}(t, \lambda)$ 关于 λ 的直到 r 阶的所有偏导数也都连续.

证明 首先注意到由改变 $K(t, x, \lambda)$ 和 U , 不妨假设 $k(t, \lambda) \equiv 0$. 则如同上一节由定理 2.4 得知解的存在并有界. 由控制收敛性定理, 对固定的 $x(t)$, $K_\lambda(x)$ 关于 λ 连续. 因此

$$|\bar{x}(t, \lambda) - \bar{x}(s, \eta)| \leq |\bar{x}(t, \lambda) - \bar{x}(s, \lambda)| + |\bar{x}(s, \lambda) - \bar{x}(s, \eta)| \quad (7-71)$$

中的第二项当 $(t, \lambda) \rightarrow (s, \eta)$ 时趋于零. 第一项由于

$$|\bar{x}(t, \lambda) - \bar{x}(s, \lambda)| \leq \left| \int_s^t K(r, \bar{x}(r, \lambda), \lambda) dr \right| \leq M |t - s| \quad (7-72)$$

也趋于零.

现在转到第二个论断. 假设 $\bar{x}(t, \lambda) \in C^1$, 则 $\bar{y}(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \bar{x}(t, \lambda)$ 是不动点方程

$\tilde{K}_\lambda(\bar{x}(\lambda), y) = y$ 的解, 其中

$$\tilde{K}_\lambda(x, y)(t) = \int_0^t K_\lambda(s, x(s), \lambda) ds + \int_0^t K_x(s, x(s), \lambda) y(s) ds, \quad (7-73)$$

其中下标表示偏导数. 这个积分算子关于 y 是线性的, 于是由中值定理和 (7-67) 我们有

$$\|K_x(t, x, \lambda)\| \leq L. \quad (7-74)$$

因此, 由第一部分得知 $\tilde{K}_\lambda(\bar{x}(\lambda), y) = y$ 的连续解 $\bar{y}(t, \lambda)$ 的存在性. 余下的我们要证明它事实上就是 $\bar{x}(\lambda)$ 的偏导数.

固定 λ , 从 $(x_0(t), y_0(t)) = (0, 0)$ 开始我们得到序列 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (K_\lambda(x_n), \tilde{K}_\lambda(x_n, y_n))$ 满足 $y_n(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} x_n(t)$. 由于 \tilde{K}_λ 关于 x 连续 (问题 7.18), 由定理 7.13 得知 $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda))$. 此外, 由于 (x_n, y_n) 关于 λ 是一致有界的, 由推论 7.15 得知, $\bar{y}(\lambda)$ 事实上是 $\bar{x}(\lambda)$ 的导数.

这是 $r=1$ 的情形. 现在假设论断对 $r-1$ 成立. 由于 y 的方程与 x 的方程有相同形式, 又由于 $k_\lambda, K_\lambda, K_x \in C^{r-1}$, 得知 $y \in C^{r-1}$, 因此 $x \in C^r$. \square

推论 7.18 如果除了定理 7.17 的要求以外, $k \in C^r(I \times \Lambda, V)$ 和 $K \in C^r(I \times V \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$, 则 $\bar{x}(t, \lambda) \in C^r(I \times \Lambda, V)$.

证明 情形 $r=0$ 由上面定理得知. 现在假设 $r=1$. 关于 t 微分不动点方程, 我们看到

$$\dot{\bar{x}}(t, \lambda) = \dot{k}(t, \lambda) + K(t, \bar{x}(t, \lambda), \lambda) \quad (7-75)$$

连续. 与上面结果一起, 得知所有偏导数存在且连续, 故 $\bar{x} \in C^1$. 对一般的 r , 如上面定理的证明由归纳法得知. \square

下面我们转到在 7.2 节遇到的哈默斯坦 (Hammerstein) 积分方程

$$K_\lambda(x)(t) = k(t, \lambda) + \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) K(s, x(s), \lambda) ds, \quad (7-76)$$

其中

$$k, \kappa \in C([0, \infty) \times \Lambda, \mathbb{R}^n), \quad K \in C([0, \infty) \times U \times \Lambda, \mathbb{R}^n), \quad (7-77)$$

其中 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集. 现在我们证明, 对这个方程我们有与在 7.2 节用过的定理 7.17 类似的定理.

对每一个紧集 $C \subseteq U$, 假设 k 和 K 一致连续且有界:

$$|k(t, \lambda)| \leq m, \quad |K(t, x, \lambda)| \leq M, \quad (t, x, \lambda) \in [0, \infty) \times C \times \Lambda, \quad (7-78)$$

且存在控制函数 $\alpha(s)$, 使得

$$|\kappa(s+t, \lambda)| \leq \alpha(s) \quad \text{对 } |t| \leq \varepsilon. \quad (7-79)$$

此外, 假设

$$|K(s, x, \lambda) - K(s, y, \lambda)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in U, \quad (7-80)$$

其中 L 与 λ 无关, 以及

$$L \int_{-\infty}^{\infty} |\kappa(s, \lambda)| ds \leq \theta < 1. \quad (7-81)$$

定理 7.19 假设 K_λ 满足上面的要求式 (7-77) 和式 (7-81). 则不动点方程 $K_\lambda(x) = x$ 有唯一解

$$\bar{x}(t, \lambda) \in C([0, \infty) \times \Lambda, U).$$

此外, 假设 $k(t, \lambda)$, $\kappa(s, \lambda)$ 和 $K(s, x, \lambda)$ 关于 λ 和 x 的所有直到 r 阶的偏导数都连续. 进一步, $\kappa(s, \lambda)$ 关于 λ 的直到 r 阶的所有偏导数存在如式 (7-79) 中的控制函数, 以及当 x 如在式 (7-78) 中限制在紧集上时, $K(s, x, \lambda)$ 关于 λ 和 x 的直到 r 阶的所有偏导数一致连续且有界. 则 $\bar{x}(t, \lambda)$ 关于 λ 的直到 r 阶的所有偏导数都连续.

证明 如同定理 7.17, 不妨假设 $k(t, \lambda) \equiv 0$. 选择

$$\delta = (1 - \theta)^{-1} \|K_\lambda(0)\|, \quad (7-82)$$

则由 $\|x\| \leq \delta$ 得

$$\begin{aligned} \|K_\lambda(x)\| &\leq \int_0^\infty |\kappa(s-t, \lambda)| (|K(s, 0, \lambda)| + |K(s, x(s), \lambda) - K(s, 0, \lambda)|) ds \\ &\leq \|K_\lambda(0)\| + \theta \|x\| \leq \delta, \end{aligned} \quad (7-83)$$

因此, K_λ 映 $C([0, \infty), B_\delta(0))$ 为它自己. 此外, 由假设 K_λ 是压缩, 压缩常数为 θ , 可得知存在唯一解 $\bar{x}(\lambda, t)$.

接下来, 我们要证明 $K_\lambda(x)$ 关于 λ 连续,

$$\begin{aligned} |K_\lambda(x)(t) - K_\eta(x)(t)| &\leq \int_0^\infty |\kappa(s-t, \lambda)| \|K(s, x(s), \lambda) - K(s, x(s), \eta)\| ds \\ &\quad + \int_0^\infty |\kappa(s-t, \lambda) - \kappa(s-t, \eta)| \|K(s, x(s), \eta)\| ds. \end{aligned} \quad (7-84)$$

由 K 的一致连续性, 对每个 $\varepsilon > 0$ 我们有 $|K(s, x, \lambda) - K(s, x, \eta)| \leq \varepsilon$, 只要 $|\lambda - \eta|$ 充分地小, 因此

$$\|K_\lambda(x)(t) - K_\eta(x)(t)\| \leq \frac{\varepsilon\theta}{L} + M \int_{-\infty}^{\infty} |\kappa(s-t, \lambda) - \kappa(s-t, \eta)| ds. \quad (7-85)$$

由于可选取 $|\lambda - \eta|$ 很小使得上面右端任意小 (控制收敛性), 论断得证.

现在我们可以证明 \bar{x} 连续. 按照我们前面的考虑, 当 $(t, \lambda) \rightarrow (s, \eta)$ 时

$$|\bar{x}(t, \lambda) - \bar{x}(s, \eta)| \leq |\bar{x}(t, \lambda) - \bar{x}(t, \eta)| + |\bar{x}(t, \eta) - \bar{x}(s, \eta)| \quad (7-86)$$

中右端的第一项收敛于零, 又由于

$$\begin{aligned} |\bar{x}(t, \eta) - \bar{x}(s, \eta)| &\leq \int_0^\infty |\kappa(r-t, \eta) - \kappa(r-s, \eta)| \|K(r, \bar{x}(r, \eta), \eta)\| dr \\ &\leq M \int_0^\infty |\kappa(r-t, \eta) - \kappa(r-s, \eta)| dr, \end{aligned} \quad (7-87)$$

第二项也收敛于零. 从而对情形 $r=0$ 完成了证明.

现在我们转到第二个论断. 假设 $\bar{x}(t, \lambda) \in C^1$, 则 $\bar{y}(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \bar{x}(t, \lambda)$ 是不动点

方程 $\tilde{K}_\lambda(\bar{x}(\lambda), y) = y$ 的解. 其中

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\lambda(x, y)(t) &= \int_0^\infty \kappa_\lambda(s-t, \lambda) K(s, x(s), \lambda) ds + \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) K_\lambda(s, x(s), \lambda) ds + \\ &\int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) K_x(s, x(s), \lambda) y(s) ds, \end{aligned} \quad (7-88)$$

这里的下标表示偏导数. 余下部分如定理 7.17 的证明得知. 为证明 $\tilde{K}_\lambda(x, y)$ 连续依赖于 x , 需要用 K 和它的导数的一致连续性. \square

问题 7.17 假设 $K: C \subseteq X \rightarrow C$ 是压缩的, 且

$$x_{n+1} = K(x_n) + y_n, \quad \|y_n\| \leq \alpha_n + \beta_n \|x_n\|,$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

问题 7.18 假设 $K(t, x, y)$ 是连续函数, 求证映射

$$K_x(y)(t) = \int_0^t K(s, x(s), y(s)) ds$$

关于 $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ 连续, 以及式 (7-73) 关于 $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ 连续. (提示: 利用控制收敛定理).

第 8 章 平面动力系统

8.1 Poincaré-Bendixson 定理

这一节讨论 M 是 \mathbb{R}^2 的开子集的情形. \mathbb{R}^2 中的流由于有若尔当 (Jordan) 曲线定理[⊙]而特别简单. 这个定理说, 每一条若尔当 (Jordan) 曲线 J (即圆周 S^1 的同胚像) 把 \mathbb{R}^2 分为两个连通区域. 特别地, $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 有两个分支.

我们用的弧 $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ 是指由光滑映射 $t \rightarrow s(t)$ 给出的一维子流形, 其中 $\dot{s} \neq 0$. 利用这个映射, Σ 上的点可以有序. 此外, 对每一个正则点 $x \in M$ (即 $f(x) \neq 0$), 可以找到包含 x 的弧 Σ , 它与 f 横截相交 (即 $\dot{s}_1(t)f_2(s(t)) - \dot{s}_2(t)f_1(s(t)) \neq 0$).

引理 8.1 设 $x_0 \in M$ 是正则点, Σ 是包含 x_0 的横截弧. 以 $x_n = x(t_n)$, $n \geq 1$ 记 $\gamma_\sigma(x_0)$ 与 Σ 的有序 (关于 t_n) 交点序列 (可能有限). 则 x_n (关于 Σ 的次序) 是单调的.

证明 我们仅考虑 $\sigma = +$ 的情形. 如果 $x_0 = x_1$, 这已经是有序的了. 否则, 考虑从 x_0 沿着 $\gamma_+(x_0)$ 到 x_1 , 再从 x_1 沿着 Σ 回到 x_0 . 这条曲线 J 是从 S^1 到 J 的连续双射的像. 由于 S^1 是紧的, 它是一个同胚. 因此, J 是 Jordan 曲线, 且 $M \setminus J = M_1 \cup M_2$.

现在设 $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$ 是沿着 Σ 从 x_0 到 x_1 的弧. 于是 f 的方向总是指向 M_1 或 M_2 , 因为由 Σ 的横截性它不可能改变方向. 因此, 或者 $\gamma_+(x_1) \subset M_1$, 或者 $\gamma_+(x_1) \subset M_2$. 此外, 如果 $x_0 < x_1$, 则 $\gamma_+(x_1)$ 必须停留在包含所有点 $x \in \tilde{\Sigma}$, $x_1 < x$ 的分支内, 如果 $x_0 > x_1$, 则 $\gamma_+(x_1)$ 必须停留在包含所有点 $x \in \tilde{\Sigma}$, $x_1 > x$ 的分支内 (比较图 8-1). 重复这个步骤就证明了我们的论断. \square

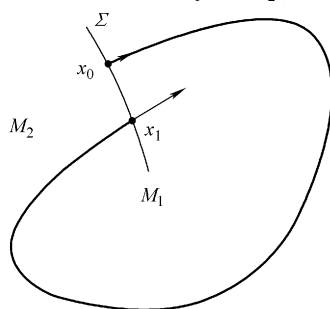


图 8-1 引理 8.1 的证明

接下来, 注意到如果 $y \in \Sigma \cap \omega_\sigma(x)$, 则可以用序列 $x_n \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(x)$ 逼近 y . 事实上, 选择 $t_n \rightarrow \sigma\infty$ 使得 $x_n = \Phi(t_n, x) \rightarrow y$. 于是, 由引理 6.8 (其中 $x = y$, 和 $T = 0$), 我们可以用 $\tilde{t}_n = t_n + \tau(x_n)$ 去得到所求类型的序列 $\Phi(\tilde{t}_n, x) \rightarrow y$.

⊙ 若尔当 (Jordan) 曲线定理看起来似乎很简单, 但是由于圆周的同胚像的形状可以很复杂, 因此严格证明这条定理相当困难. 最近还有人如 Hales 在 2005 年用形式证法花了 600,000 行字证明这条定理, 同年国际数学家团队用 Mizar 系统花了 6,500 行字证明它. 此外还有人用其他方法如拓扑方法证明的. 译者注.

推论 8.2 设 Σ 是横截弧, 则 $\omega_\sigma(x)$ 与 Σ 至多相交于一点.

证明 假设存在两个交点 y_1 和 y_2 . 则分别存在收敛于 y_1, y_2 的序列 $x_{1,n}, x_{2,n} \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(x)$. 但由引理 8.1 知这是不可能的, 因为两个都是单调序列 x_n 的子序列. \square

推论 8.3 假设 $\omega_\sigma(x) \cap \gamma_\sigma(x) \neq \emptyset$. 则 x 是周期的, 因此, $\omega_+(x) = \omega_-(x) = \gamma(x)$.

证明 由假设存在某个 $y \in \omega_\sigma(x) \cap \gamma_\sigma(x)$. 如果 y 是不动点则我们有 $\gamma_\sigma(x) = \{y\}$, 这没有什么要做的. 所以我们假设 y 不是不动点, 取包含 y 的横截弧 Σ 以及收敛于 y 的序列 $x_n \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(x) \subseteq \Sigma \cap \omega_\sigma(x)$. 由上一个推论我们必须有 $x_n = y$, 因此 $\gamma(y) = \gamma(x)$ 是周期的. \square

推论 8.4 极小紧 σ 不变集 C 是周期轨道.

证明 取 $x \in C$. 则由极小性 $\omega_\sigma(x) = C$, 因此 $\omega_\sigma(x) \cap \gamma_\sigma(x) \neq \emptyset$. 从而由上一个推论, x 是周期的. \square

有了这一系列推论以后, 现在我们可以着手研究 ω_\pm 极限集.

引理 8.5 如果 $\omega_\sigma(x) \neq \emptyset$ 是紧的且不包含不动点, 则 $\omega_\sigma(x)$ 是正则周期轨道^①.

证明 设 $y \in \omega_\sigma(x)$. 取 $z \in \omega_\sigma(y) \subseteq \omega_\sigma(x)$, 由假设它不是不动点. 取包含 z 的横截弧 Σ 以及序列 $y_n \rightarrow z$, 其中 $y_n \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(y)$. 由于由推论 8.2 有 $\Sigma \cap \gamma_\sigma(y) \subseteq \Sigma \cap \omega_\sigma(y) = \{z\}$, 故得 $y_n = z$, 因此 $\omega_\sigma(x)$ 是正则周期道. \square

引理 8.6 假设 $\omega_\sigma(x)$ 连通, 且包含一条正则周期轨道 $\gamma(y)$. 则 $\omega_\sigma(x) = \gamma(y)$.

证明 如果 $\omega_\sigma(x) \setminus \gamma(y)$ 非空, 由连通性, 存在点 $\tilde{y} \in \gamma(y)$, 使得我们可以找到任意接近于 \tilde{y} 的点 $z \in \omega_\sigma(x) \setminus \gamma(y)$. 取包含 \tilde{y} 的横截弧 Σ . 由引理 6.8 可以求得 $\tau(z)$, 使得 $\Phi(\tau(z), z) \in \Sigma$. 但是这样一来, 我们甚至有 $\Phi(\tau(z), z) \in \Sigma \cap \omega_\sigma(x) = \{\tilde{y}\}$ (由推论 8.2), 因此 $z \in \gamma(y)$, 但这与假设矛盾. \square

引理 8.7 设 $x \in M$, $\sigma \in \{\pm\}$, 又假设 $\omega_\sigma(x)$ 是紧的. $x_\pm \in \omega_\sigma(x)$ 是两个不同的不动点. 则至多存在一条轨道 $\gamma(y) \subset \omega_\sigma(x)$, 使得 $\omega_\pm(y) = x_\pm$.

证明 假设存在两条轨道 $\gamma(y_{1,2})$. 由于 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi(t, y_{1,2}) = x_\pm$, 我们可以用 $\Phi(\pm\infty, y_{1,2}) = x_\pm$ 将 $\Phi(t, y_{1,2})$ 扩展成在 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 上的连续函数. 因此, 沿着 $\gamma(y_1)$ 从 x_- 到 x_+ , 再沿着 $\gamma(y_2)$ 从 x_+ 回到 x_- 的曲线 J 是若尔当 (Jordan) 曲线. 记 $M \setminus J = M_1 \cup M_2$, 我们可以假定 $x \in M_1$ (因为由推论 8.3, $x \in J$ 是不允许的). 分别取包含 $y_{1,2}$ 的两条横截弧 $\Sigma_{1,2}$ (比较图 8-2). 于是 $\gamma_\sigma(x)$ 分别交 $\Sigma_{1,2}$ 于某两点 $z_{1,2}$. 不失一般性, 可以假设在 z_1 和 z_2 之间不再存在 $\gamma(x)$ 与 Σ_1 和 Σ_2 的进一步的交点. 现在 (沿着 $\Sigma_1, \gamma_\sigma(x)$, $\Sigma_2, \gamma(y_2)$ 和 $\gamma(y_1)$) 考虑从 y_1 依次到 z_1, z_2, y_2 再到 x_+ , 并回到 y_1

① 平面上的孤立周期轨道通常称为极限环. 译者注.

的若尔当(Jordan)曲线. 它把 M 分成两部分 N_1, N_2 , 使得 $\gamma_\sigma(z_1)$ 或者 $\gamma_\sigma(z_2)$ 必须留在 N_1, N_2 之一, 譬如留在 N_2 (如引理 8.1 的证明). 但是现在 $\gamma_\sigma(x)$ 就不能够回来接近于 $\gamma(y_{1,2}) \cap N_1$ 的点, 这与假设矛盾. \square

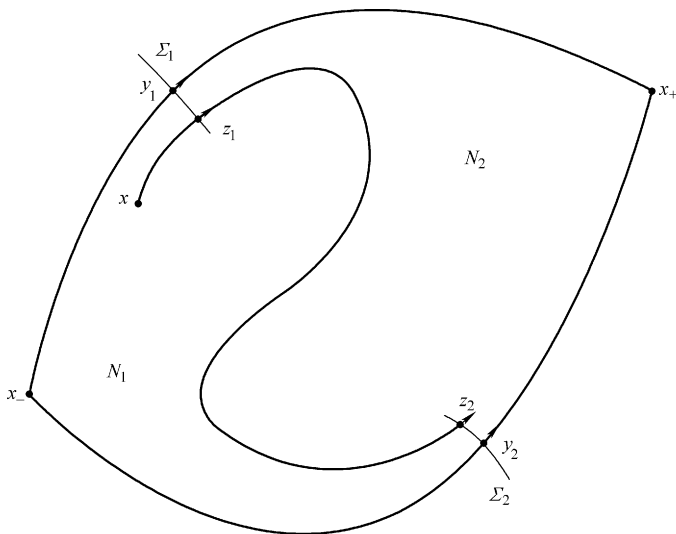


图 8-2 引理 8.7 的证明

有了这些准备工作以后, 我们就可得到下面的定理:

定理 8.8 (Poincaré-Bendixson) 设 M 是 \mathbb{R}^2 的一个开子集, $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$. 固定 $x \in M, \sigma \in \{\pm\}$, 又假设 $\omega_\sigma(x) \neq \emptyset$ 是紧, 连通, 且仅包含有限多个不动点. 则下面情形之一成立:

(1) $\omega_\sigma(x)$ 是不动点轨道.

(2) $\omega_\sigma(x)$ 是正则周期轨道.

(3) $\omega_\sigma(x)$ 是由(有限个)不动点 $\{x_j\}$ 和满足 $\omega_\pm(y) \in \{x_j\}$ 的唯一非闭轨线 $\gamma(y)$ 所组成.

证明 如果 $\omega_\sigma(x)$ 不包含不动点, 由引理 8.5, 它是正则周期轨道. 如果 $\omega_\sigma(x)$ 至少包含一个不动点 x_1 , 但没有正则点, 由于不动点孤立, 而 $\omega_\sigma(x)$ 连通, 故我们有 $\omega_\sigma(x) = \{x_1\}$.

假设 $\omega_\sigma(x)$ 既包含不动点又包含正则点. 设 $y \in \omega_\sigma(x)$ 是正则点. 我们需要证明 $\omega_\pm(y)$ 由一个不动点组成. 因此只需证明它不可能包含正则点. 设 $z \in \omega_\pm(y)$ 是正则点, 取包含 z 的横截弧 Σ , 以及序列 $y_n \rightarrow z, y_n \in \gamma(y) \cap \Sigma$. 由推论 8.2, $\gamma(y)$ 只可能在 y 与 Σ 相交. 因此 $y_n = z, \gamma(y)$ 是正则周期轨道. 现在由引理 8.6, 得 $\gamma(y) = \omega_\sigma(x)$, 这是不可能的, 因为 $\omega_\sigma(x)$ 包含不动点. \square

最后, 我们注意, 由周期轨道所围的区域是不变的. 于是, 由引理 6.7 得

引理 8.9 每一个周期轨道的内部必须含有不动点.

问题 8.1 寻找并证明 \mathbb{R}^1 中的“Poincaré-Bendixson 定理”

问题 8.2 假设在某个单连通区域内有 $\operatorname{div} f = 0$. 证明存在函数 $F(x)$ 使得 $f_1(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}$ 和 $f_2(x) = -\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}$. 求证存在函数 $F(x)$ 满足 $f_1(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}$ 和 $f_2(x) = -\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}$. 并证明对每个轨道 $\gamma(x)$ 满足 $F(\gamma(x)) = \text{常数}$. 应用这个结果到 \mathbb{R} 中的牛顿(Newton)方程 $\ddot{x} = f(x)$.

问题 8.3 (Bendixson 准则) 假设 $\operatorname{div} f$ 在单连通区域 $U \subseteq M$ 内不改变符号, 且不恒等于零. 求证不存在(整个地)含在 U 内的周期轨道. (提示: 假设存在一条周期轨道, 考虑沿着这条曲线 f 的线积分并回忆 \mathbb{R}^2 中的高斯(Gauss)定理).

利用这个结果, 证明当 $p(x) > 0$ 时

$$\ddot{x} + p(x)\dot{x} + q(x) = 0$$

没有正则周期解.

问题 8.4 (Dulac 准则) 求证下面的 Bendixson 准则的推广. 假设存在数量函数 $\alpha(x)$ 使得 $\operatorname{div}(\alpha f)$ 在单连通区域 $U \subseteq M$ 内不改变符号且不恒等于零, 则系统没有(整个地)含在 U 内的周期轨道[⊖].

问题 8.5 如果交 $\omega_+(x) \cap \omega_-(x) \neq \emptyset$ 包含正则点, 则 x 是周期的.

8.2 生态学中的例子

在这一节我们考虑来自生态学中的模型. 它描述两个种群, 一个是捕食种群 y , 另一个是被捕食种群 x . 假设没有捕食者时被捕食者的增长率为 A (比较问题 1.16). 如果出现捕食者, 则被捕食者增长率减少, 假设其减少数与捕食者数量成比例, 就是说

$$\dot{x} = (A - By)x, \quad A, B > 0. \quad (8-1)$$

类似地, 如果没有被捕食者, 捕食者的数量以速率 $-D$ 减少. 如果出现被捕食者, 假设捕食者的增长率正比于被捕食者的数量, 即

$$\dot{y} = (Cx - D)y, \quad C, D > 0. \quad (8-2)$$

尺度化 x, y 和 t 得系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - y)x, \\ \dot{y} &= \alpha(x - 1)y, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (8-3)$$

这是 Volterra 和 Lotka 的捕食-被捕食方程.

⊖ 满足 Dulac 准则的函数 $\alpha(x)$ 通常称为 Dulac 函数. Dulac 准则是证明平面系统不存在极限环的一个重要方法. 译者注.

这个系统有两个不动点. 第一个 $(0, 0)$ 是双曲鞍点, 它的稳定流形是 $x=0$, 不稳定流形是 $y=0$. 特别地, 第一象限 $Q = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 是不变集. 这是一个我们感兴趣的区域. 第二个不动点 $(1, 1)$ 不是双曲的, 因此它的稳定性不能由线性化得到.

因此, 为了求轨道方程我们尝试从我们的微分方程组中消去 t 而得到单个一阶方程. 记轨道方程为 $y = y(x)$, 由链规则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \alpha \frac{(x-1)y}{(1-y)x}. \quad (8-4)$$

这个方程是变量分离的, 求解得轨道的隐式方程

$$L(x, y) = f(y) + \alpha f(x) = \text{常数}, \quad f(x) = x - 1 - \ln(x). \quad (8-5)$$

函数 f 不能用初等函数求其逆. 但是, $f(x)$ 是上凹的, 在 $x=1$ 有大范围极小, 当 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时它趋于 ∞ . 因此等位集是紧的, 且每条轨道都是围绕不动点 $(1, 1)$ 的周期轨道.

定理 8.10 Volterra-Lotka 方程(8-3)在 Q 内的所有轨道都是闭的, 且仅围绕不动点 $(1, 1)$.

相图如图 8-3 所示.

下面, 我们假设在这个模型中, 两个物种的增长受到限制 (再次比较问题 1.15). 对应的系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - y - \lambda x)x, \\ \dot{y} &= \alpha(x - 1 - \mu y)y, \quad \alpha, \lambda, \mu > 0. \end{aligned} \quad (8-6)$$

不动点 $(0, 0)$ 又是双曲鞍点, 它的稳定流形是 $x=0$, 不稳定流形是 $y=0$.

首先看 $\lambda \geq 1$ 的情形, 这时在 \bar{Q} 内另外的不动点只有一个, 即 $(\lambda^{-1}, 0)$. 如果 $\lambda > 1$ 它是双曲汇, 如果 $\lambda = 1$, 则一个特征值是零. 很遗憾, 对轨道这个方程不再是可分离变量, 因此, 我们必须通过更多的研究才能得到轨道的完整图像.

我们的关键思想是将 Q 划分成几个区域, 使得在每个区域内 \dot{x} 和 \dot{y} 有确定的符号, 然后利用下面的基本观察 (问题 8.6).

引理 8.11 设 $\phi(t) = (x(t), y(t))$ 是平面系统的解. 假设 U 是开集, \bar{U} 是紧集. 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 U 内严格单调, 则或者 $\phi(t)$ 在某个有限时间 $t = t_0$ 碰到边界, 或者 $\phi(t)$ 收敛于不动点 $(x_0, y_0) \in \bar{U}$.

现在让我们来看如何将它用到我们的情形. \dot{x} 和 \dot{y} 有固定符号的区域是由两条直线

$$L_1 = \{(x, y) \mid y = 1 - \lambda x\}, \quad L_2 = \{(x, y) \mid \mu y = x - 1\} \quad (8-7)$$

分开. 对 $\alpha = \mu = 1, \lambda = 2$ 的典型情况如图 8-4 所示.

从这个图看, 所有的轨道似乎都收敛于不动点 $(\lambda^{-1}, 0)$. 现在我们尝试去证明

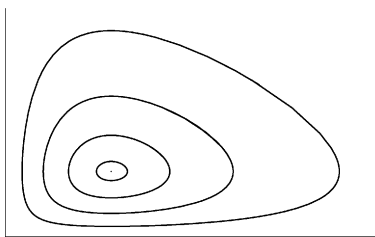


图 8-3 Volterra-Lotka 系统的相图

这点. 由这两条直线将 Q 所分的区域 (从左到右) 记为 Q_1, Q_2 和 Q_3 . 直线 L_2 和 L_1 是横截的, 因此轨线只能分别从 $Q_3 \rightarrow Q_2$ 和 $Q_2 \rightarrow Q_1$ 的方向穿过.

假设我们从点 $(x_0, y_0) \in Q_3$ 开始. 于是, 对 Q_3 加上限制 $x \leq x_0$ 以后, 我们就可应用引理 8.11, 得到进入 Q_2 的轨线或者通过 L_2 , 或者收敛于 \bar{Q}_3 中的不动点. 后者仅当 $(\lambda^{-1}, 0) \in \bar{Q}_3$ 即当 $\lambda = 1$ 时才有可能. 类似地, 从 Q_2 中出发的轨线将通过 L_1 进入 Q_1 , 或者收敛于 $(\lambda^{-1}, 0)$. 最后, 如果从 Q_1 开始, 轨线只可能收敛于 $(\lambda^{-1}, 0)$.

综上所述, 我们已经证明了, 对 $\lambda \geq 1$, Q 中的每条轨线都收敛于 $(\lambda^{-1}, 0)$.

现在考虑剩下情形 $0 < \lambda < 1$. 这时 $(\lambda^{-1}, 0)$ 是双曲鞍点, 存在第二个不动点 $\left(\frac{1+\mu}{1+\mu\lambda}, \frac{1-\mu}{1+\mu\lambda}\right)$, 它是汇. $\alpha = \mu = 1, \lambda = \frac{1}{2}$

时的相图如图 8-5 所示.

又一次看上去中间的所有轨线都收敛于汇. 我们用与前面相同的方法证明. 现在直线 L_1 和 L_2 将 Q 分成四个区域 Q_1, Q_2, Q_3 和 Q_4 (其中 Q_4 是新的). 如前, 可以证明轨线是按照次序 $Q_4 \rightarrow Q_3 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_4$ 通过这些集合, 除非它们被中间的汇吸收. 注意, 由于 $(\lambda^{-1}, 0)$ 的稳定流形仍是 $y = 0$, Q 中没有轨线可收敛于它. 但是现在的情形与前面的情形有很大的区别: 从 Q_4 中开始的轨线可以回到 Q_4 , 因此可能存在周期轨道.

为了排除周期轨道, 我们尝试找李雅普诺夫 (Liapunov) 函数. 由式 (8-5) 的启发, 我们尝试尺度化 x 和 y 使得极小点在不动点 $(x_0, y_0) = \left(\frac{1+\mu}{1+\mu\lambda}, \frac{1-\mu}{1+\mu\lambda}\right)$. 引入函数

$$L(x, y) = \gamma_1 f\left(\frac{y}{y_0}\right) + \alpha \gamma_2 f\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad (8-8)$$

其中常数 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ 待定. 利用

$$\dot{\bar{x}} = (-y - \lambda \bar{x})x, \quad \dot{\bar{y}} = \alpha(\bar{x} - \mu \bar{y})y, \quad \bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0 \quad (8-9)$$

计算得

$$\dot{L} = \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y} = -\alpha \left(\frac{\lambda \gamma_2}{x_0} \bar{x}^2 + \frac{\mu \gamma_1}{y_0} \bar{y}^2 + \left(\frac{\gamma_2}{x_0} - \frac{\gamma_1}{y_0} \right) \bar{x} \bar{y} \right). \quad (8-10)$$

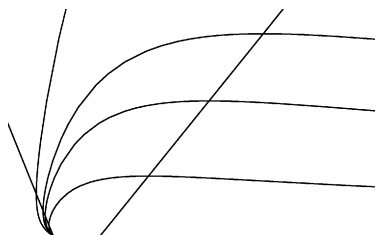


图 8-4 具有极限增长率的捕食被捕食模型的相图

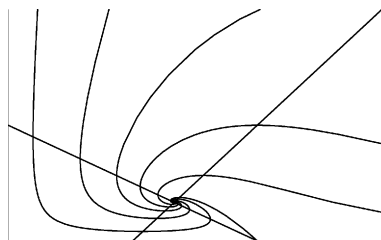


图 8-5 具有极限增长的捕食被捕食模型的相图

如果我们选择 $\gamma_1 = y_0$ 和 $\gamma_2 = x_0$ 使得右端第三项等于零则右端是负的. 因此我们又一次看到, 从 Q 中出发的所有轨道都收敛于 (x_0, y_0) .

定理 8.12 假设 $\lambda \geq 1$, 则方程(8-6)在 Q 中不存在不动点, Q 中的所有轨线都收敛于点 $(\lambda^{-1}, 0)$.

如果 $0 < \lambda < 1$, 在 Q 中只存在一个不动点 $\left(\frac{1+\mu}{1+\mu\lambda}, \frac{1-\mu}{1+\mu\lambda}\right)$. 它是渐近稳定的, 所有轨线都收敛于这点.

对我们原来的模型, 这意味着, 当捕食者的增长率在被捕食者的极限种群 λ^{-1} 是正时捕食者才可幸存.

问题 8.6 证明引理 8.11.

问题 8.7 (Volterra 原理) 求证对 Volterra-Lotka 系统(8-3)的任何轨道, 在一个周期上时间的平均

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 1, \quad \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = 1$$

与轨道无关. (提示: 在一个周期上积分 $\frac{d}{dt} \ln(x(t))$).

问题 8.8 求证坐标变换 $x = \exp(q)$, $y = \exp(p)$ 将 Volterra-Lotka 系统 (8-3) 变成哈密顿 (Hamilton) 系统, 哈密顿 (Hamilton) 函数为 $H(p, q) = L(\exp(q), \exp(p))$.

此外, 利用相同的坐标变换于式(8-6). 再用 Bendixson 准则(问题 8.3)证明它没有周期轨道.

问题 8.9 如果 $\mu\lambda \geq 1$, 求证式(8-6)在情形 $\lambda < 1$ 时没有周期轨道, 证明如下: 如果存在周期轨道, 它必须包含 L_1 上的点 (x_0, y_0) , 此点满足

$$\frac{1+\mu}{1+\mu\lambda} < x_0 < \frac{1}{\lambda}, \quad y_0 = 1 - \lambda x_0. \quad (8-11)$$

进入 Q_1 的轨线在 Q_1 中满足 $x(t) < x_0$, 因为在那里 $x(t)$ 递减. 因此当它与 L_2 相交时必须有 $y(t) < y_1 = \frac{x_0 - 1}{\mu}$. 现在, 我们进入 Q_2 , 那里 $y(t)$ 递减, 当它与 L_1 相交时

必须有 $x(t) < x_1 = \frac{1 - y_1}{\lambda}$. 这个过程进行下去, 最后, 当我们回到 L_1 时, 我们看到

$y(t) > y_2 = \frac{x_1 - 1}{\mu}$. 如果 $y_2 \geq y_0$, 即如果

$$(1 + \mu)(1 - \mu\lambda) \geq (1 - (\mu\lambda)^2)x_0, \quad (8-12)$$

轨线向内盘旋, 这与我们假设它是周期轨道相矛盾. 这是 $\mu\lambda \geq 1$ 的情形.

问题 8.10 (竞争物种) 假设有两个种群 x 和 y , 使得一个抑制另一个的增长. 描述这种情况的简单模型是

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - By)x, \\ \dot{y} &= (C - Dx)y, \quad A, B, C, D > 0.\end{aligned}$$

找出这个系统尽可能多的有关信息.

问题 8.11 (具有极限增长的竞争物种) 考虑上面同样的问题, 但现在种群具有极限增长. 这种方程是

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - y - \lambda x)x, \\ \dot{y} &= \alpha(1 - x - \mu y)y, \quad \alpha, \lambda, \mu > 0.\end{aligned}$$

再次求出这个系统尽可能多的信息.

8.3 电路工程中的例子

这一节我们回到我们曾经在 3.3 节考虑过的电路. 我们仍考虑回路中有一个电感器, 一个电容器和一个电阻器的情形. 但现在考虑的电感具有任意特性

$$V_R = R(I_R). \quad (8-13)$$

由于如果没有电流通过就没有电位差, 故我们必须有 $R(0) = 0$. 对经典电阻我们有 $R(I) = RI$, 其中电阻 R 是常数 (Ohm 定律), 但是对混杂元件如半导体这就不成立. 例如二极管的特征是

$$V = \frac{kT}{q} \ln \left(1 + \frac{I}{I_L} \right), \quad (8-14)$$

其中 I_L 是渗漏电流, q 是电子电荷, k 是波尔兹曼 (Boltzmann) 常数, T 是绝对温度.

在正方向你只需非常小的电压就得到大的电流, 但在另一个方向, 即使有相当大的电压, 你甚至几乎得不到电流. 因此我们说二极管仅让电流按一个方向通过.

基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律告诉我们 $I_R = I_L = I_C$ 以及 $V_R + V_L + V_C = 0$. 应用我们三个元件的性质, 并消去例如 I_C, I_R, V_L, V_R , 得到系统

$$\begin{aligned}L \dot{I}_L &= -V_C - R(I_L), \\ C \dot{V}_C &= I_L, \quad R(0) = 0, \quad L, C > 0.\end{aligned} \quad (8-15)$$

此外, 注意在每个元件中的能量改变是 IV . 由基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律, 我们有

$$I_L V_L + I_C V_C + I_R V_R = 0, \quad (8-16)$$

将它重写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2} I_L^2 + \frac{C}{2} V_C^2 \right) = -I_R R(I_R). \quad (8-17)$$

就是说, 在电阻器中的能量耗散来自电感和电容.

最后, 尺度化 V_C 和 t , 得到李纳 (Lienard) 方程 (比较问题 8.12)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - f(x), \\ \dot{y} &= -x, \quad f(0) = 0.\end{aligned} \quad (8-18)$$

方程(8-17)现在化为

$$\frac{d}{dt}W(x, y) = -xf(x), \quad W(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (8-19)$$

方程(8-18)是我们这一节余下的主题. 首先, 它只有一个不动点 $(0, 0)$. 如果在 $x=0$ 的邻域内有 $xf(x) > 0$, 则 W 是李雅普诺夫(Liapunov)函数, 因此 $(0, 0)$ 稳定. 此外, 我们甚至有:

定理 8.13 假设对一切 $x \in \mathbb{R}$ 有 $xf(x) \geq 0$, 对 $0 < |x| < \varepsilon$ 有 $xf(x) > 0$. 则李纳(Lienard)方程(8-18)的每一条轨线都收敛于 $(0, 0)$.

证明 如果在轨道上 $W(x, y)$ 是常数, 譬如 $W(x, y) = R^2/2$, 则轨道必须是半径为 R 的圆周. 因此对 $0 \leq |x| \leq R$ 我们必须有 $\dot{W} = -xf(x) = 0$, 再由Krasovskii-LaSalle原理(定理6.12)得结论. \square

反之, 注意, 如果对 $0 < |x| < \varepsilon$, 有 $xf(x) < 0$, 则 $(0, 0)$ 不稳定.

我们现在证明, 如果 f 是奇函数, 且若对小的 x , $xf(x)$ 为负, 对大的 x , $xf(x)$ 为正, 则李纳(Lienard)方程有周期轨道. 更确切地说, 我们需要下面的假设.

- (1) f 是奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$.
- (2) 对 $0 < x < \alpha$ 有 $f(x) < 0$ (不妨设 $f(\alpha) = 0$).
- (3) $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$, 特别地, 对 $x > \beta$, $f(x) > 0$ (不妨设 $f(\beta) = 0$).
- (4) 对 $x > \alpha$, $f(x)$ 单调递增(即 $\alpha = \beta$).

f 的典型图像如图8-6所示.

进一步, 记 $Q_{\pm} = \{(x, y) \mid \pm x > 0\}$ 和 $L_{\pm} = \{(x, y) \mid x = 0, \pm y > 0\}$. 我们的对称性要求(1)将允许我们把注意力限制在 Q_{+} , 因为对 Q_{-} 的对应结果可通过变换 $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 得到, 这个变换将 Q_{+} 变为 Q_{-} , 并当 f 是奇函数时微分方程(8-18)不变.

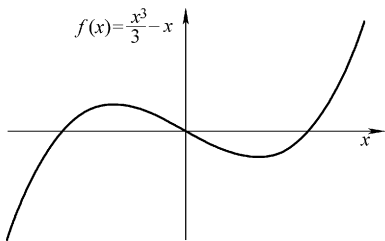


图8-6 李纳(Lienard)方程中的典型 f

首先我们注意到:

引理 8.14 李纳(Lienard)方程(8-18)的每一条轨线在 Q_{+} 中与 $f(x)$ 的图像至多相交一次.

证明 如果 f 可微, 这是显然的, 因为 f 的图像与向量场横截相交, 除了 $(0, 0)$. 在一般情形, 我们可以论证如下:

假设轨线从 f 图像的下方出发, 即 $y_0 < f(x_0)$. 我们需要证明它不可能再到图像上方. 假设在某个时间 t_1 轨线穿过 f 的图像. 则对充分小 $\varepsilon, \delta > 0$ 有 $y(t_1 - \delta) < f(x(t_1 - \delta))$ 和 $y(t_1 + \varepsilon) > f(x(t_1 + \varepsilon))$. 此外, 由我们的微分方程, 必须也有 $x(t_1 - \delta) > x(t_1)$ 和 $x(t_1 + \varepsilon) > x(t_1)$. 特别地, 可以求得 ε 和 δ , 使得 $x(t_1 - \delta) = x(t_1 + \varepsilon)$, 故

$$y(t_1 + \varepsilon) > f(x(t_1 + \varepsilon)) = f(x(t_1 - \delta)) > y(t_1 - \delta). \quad (8-20)$$

这与 $y(t)$ 递减相矛盾 (因为 $x(t) > 0$). □

接下来我们证明:

引理 8.15 假设 f 满足要求(2)和(3). 则 $\overline{Q_+}$ 中在 f 的图像上方开始的每条轨线将在有限正时间最终与该图像相交. 类似地, 从 Q_+ 中 f 图像下方开始的每条轨线将在有限正时间与 L_- 相交. 最后, 从该图像上开始的每条轨线在有限负时间与 L_+ 相交.

证明 假设我们从某点 $(0, y_0)$, $y_0 > 0$ 开始. 选取某个 $C < \min f(x)$ 和 $R > 0$ 充分大使得 (x_0, y_0) 位于圆盘 $x^2 + (y - C)^2 \leq R^2$ 内. 于是由于圆弧 $x^2 + (y - C)^2 = R^2$ 与向量场横截且向量场的向量指向圆内, 由引理 8.11, 轨线必须停留在圆内直到它分别与 f 的图像和 L_- 相交 (因为不动点 $(0, 0)$ 是排斥的故它不可能收敛于唯一不动点). 这就证明了前面两个论断.

为看到最后一个论断, 选择 $M > \max_{x \in [0, x_0 + \varepsilon]} f(x)$ 并考虑由 f 的图像, 水平线 $y = y_0 + \varepsilon$, 圆 $x^2 + (y - M)^2 = (y_0 + \varepsilon)^2$ 以及 L_+ 所围的有界区域, 其他论述如前. □

现在假设 f 满足(1)~(3). 从 $(x(0), y(0)) = (0, y_0) \in L_+$ 出发的轨线与 L_- 的交点记为 $(x(T), y(T)) = (0, P(y_0))$ (参看图 8-7). 于是, 每条周期轨道必须围绕 $(0, 0)$ 且满足 $P(y_0) = -y_0$. 因此, 每条周期轨道对应于函数

$$\begin{aligned} \Delta(y_0) &= W(0, P(y_0)) - W(0, y_0) \\ &= - \int_0^T x(t)f(x(t)) dt \quad (8-20) \end{aligned}$$

的零点. 现在对这个函数我们能够说些什么? 显然, 对 $y_0 < \alpha$, 我们有 $\Delta(y_0) > 0$. 因此, 只需证明当 $y_0 \rightarrow \infty$ 时 $\Delta(y_0)$ 变成负的.

由引理 8.15 的最后部分, 存在数 $r > 0$, 使得从 $(0, r)$ 出发的轨线在 $(\beta, 0)$ 与 f 的图像相交. 故对 $y_0 > r$, 我们的轨线与直线 $x = \beta$ 相交于 t_1 和 t_2 . 进一步, 由于与 f 的交点只对 $t \in (t_1, t_2)$ 才有可能, 故对 $0 \leq t \leq t_1$ 有 $y(t) > f(x(t))$, 和对 $t_2 \leq t \leq T$ 有 $y(t) < f(x(t))$. 现在我们用分开在 t_1 和 t_2 的积分, 把 Δ 分为三个部分. 对第一部分我们有

$$\Delta_1(y_0) = - \int_0^{t_1} x(t)f(x(t)) dt = \int_0^\beta \frac{-xf(x)}{y(x) - f(x)} dx. \quad (8-21)$$

由于当 y_0 增加时 $y(x)$ 增加 (轨道不可能相交), $\Delta_1(y_0)$ 中的积分的绝对值减少. 此外, 由于 $y_0 \rightarrow \infty$ 时 $y(t_1) \rightarrow \infty$, 我们有 $\lim_{y_0 \rightarrow \infty} \Delta_1(y_0) = 0$. 第二部分是

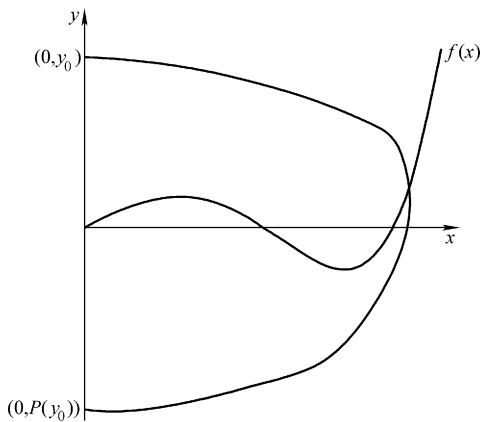


图 8-7 李纳 (Liénard) 方程的庞加莱 (Poincaré) 映射 $P(y_0)$ 的定义

$$\Delta_2(y_0) = - \int_{t_1}^{t_2} x(t)f(x(t)) dt = - \int_{y(t_2)}^{y(t_1)} f(x(y)) dy < 0. \quad (8-22)$$

由(3), 这一部分不可能趋于0. 末了, 最后部分

$$\Delta_3(y_0) = - \int_{t_2}^T x(t)f(x(t)) dt = \int_{\beta}^0 \frac{-xf(x)}{y(x) - f(x)} dx \quad (8-23)$$

中的积分绝对值也递减, 如同对 Δ_1 情形, 可类似论证.

此外, 我们期望 $\Delta(y_0)$ 最终变为负值. 如在 Δ_1 情形, 如果 $y(t_2) \rightarrow -\infty$ 则 $\Delta_3(y_0) \rightarrow 0$, 论断成立. 否则, 如果 $y(t_2) \rightarrow y_2 < 0$, 则通过 (β, y) , $y \leq y_2$ 的每个轨道对所有负时间由引理 8.15 必须位于 f 的下方. 因此我们必须有 $f(x) \rightarrow \infty$ (因为它必须位于任何此种解的上方). 但如果这样, $\Delta_2(y_0) \rightarrow -\infty$ (证明这个), 论断仍成立.

如果另外(4)成立, 不妨假设 $\alpha = \beta$, 对 $y_0 > r$, 我们得知 $\Delta(y_0)$ 单调减少. 由于我们也必须有 $\alpha > r$, 在这情形刚好存在一个零点. 这就证明了

定理 8.16 假设 f 满足要求(1) ~ (3). 则李纳(Liénard)方程(8-18)至少有一条周期轨道围绕 $(0, 0)$.

如果另外(4)成立, 则这个周期轨道唯一, 每一条其他轨线(除了 $(0, 0)$)当 $t \rightarrow \infty$ 时都收敛于这个轨道.

证明 剩下的要证明所有的轨道除了 $(0, 0)$ 都收敛于由上面我们得到的 $\bar{y} = P(y)$ 所确定的唯一周期轨道. 由于由引理 8.15 从任何初始条件出发的轨道都到达 L_+ , 故我们可把我们的注意力限制从 L_+ 开始的轨道. 对 $y < 0$ 令 $P(y) = -P(-y)$ 并考虑点列 $y_n = P^n(y_0)$ (即 y_{2m+1} 是轨道与 L_- 的交点序列, y_{2m} 是轨道与 L_+ 的交点序列). 由于对 $y < \bar{y}$, $\Delta(y)$ 为正, 对 $\bar{y} < y$ 它为负, 序列 $(-1)^n y_n$ 对 $y_0 > \bar{y}$ 为严格递减, 对 $y_0 < \bar{y}$ 严格递增, 因此它收敛于唯一不动点 \bar{y} . 由流的连续性在 y_n 与 y_{n+1} 之间的轨道上的点也必须收敛于 $\gamma(\bar{y})$. □

这个定理的一个经典应用是对 **van der Pol 方程**

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0, \quad (8-24)$$

它模拟三极管电路. 由问题 8.12, 它等价于李纳(Liénard)方程, 其中 $f(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$. 定理 8.16 中的所有要求都满足, 因此范德波尔(van der Pol)方程有唯一周期轨道, 此外, 所有轨线当 $t \rightarrow \infty$ 时都趋于这个轨道.

$\mu = 1$ 时的相图如图 8-8 所示.

考虑 $f_\mu(x) = x^3 - \mu x$ 的李纳(Lienard)方程族也是有兴趣的. 对 $\mu \leq 0$, 它有稳定不动点 $(0, 0)$, 由定理 8.13 它是大范围吸引的. 对 $\mu > 0$ 这个不动点变成不稳定, 这时产生唯一的大范围吸引周期轨道. 这是庞

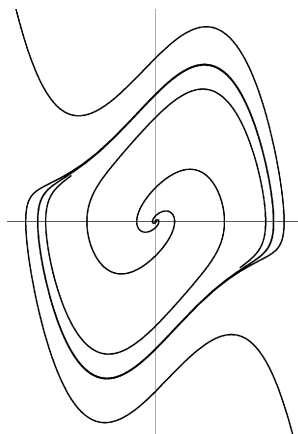


图 8-8 范德波尔(van der Pol)方程的相图

加莱—安德罗诺夫—霍普夫 (Poincare-Andronov-Hopf) 分支的一个典型例子.

问题 8.12 方程

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + x = 0$$

通常也称为李纳 (Lienard) 方程. 求证如果令 $y = \dot{x} + f(x)$, 它等价于 (8-18), 其中

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

问题 8.13 求证方程

$$\dot{z} = z(\mu - (\alpha + i\beta)|z|^2), \quad \mu \in \mathbb{R}, \alpha, \beta > 0$$

在 $\mu = 0$ 具有霍普夫 (Hopf) 分支, 其中 $z(t) = x(t) + iy(t)$. (提示: 用极坐标 $z = re^{i\varphi}$.)

第 9 章 高维动力系统

9.1 吸引集

在大部分应用中,主要兴趣是研究微分方程流的长时间性态(为简单起见,从现在起假设它 σ 完全).在这方面,了解某个集合 X 中所有点的命运是重要的.因此,首先要将我们前面的某些定义推广到集合.

给定一个集合 $X \subseteq M$, 我们总可以考虑

$$\gamma_{\pm}(X) = \bigcup_{\pm t \geq 0} \Phi(t, X) = \bigcup_{x \in X} \gamma_{\pm}(x) \quad (9-1)$$

而得到 σ 不变集. 取闭包 $\overline{\gamma_{\sigma}(X)}$, 由引理 6.4 我们甚至得到闭 σ 不变集. 此外, X 的 ω_{\pm} -极限集 $\omega_{\pm}(X)$ 是所有点 $y \in M$ 的集合, 对此存在序列 $t_n \rightarrow \pm \infty$, 和 $x_n \in X$, 满足 $\Phi(t_n, x_n) \rightarrow y$.

注意我们有

$$\bigcup_{x \in X} \omega_{+}(x) \subseteq \omega_{+}(X), \quad (9-2)$$

但从下面的例子看到, 其中等号一般并不成立.

例 考虑

$$\dot{x} = x(1 - x^2), \quad \dot{y} = -y. \quad (9-3)$$

x 方向上有两个稳定不动点 $x = \pm 1$ 和一个不稳定不动点 $x = 0$. 类似地, y 方向上只有一个稳定不动点 $y = 0$. 因此不难看到

$$\omega_{+}(B_r(0)) = [-1, 1] \times \{0\}, \quad r > 0. \quad (9-4)$$

另一方面,

$$\bigcup_{x \in B_r(0)} \omega_{+}(x) = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}. \quad (9-5)$$

特别地, $\omega_{+}(B_r(0))$ 包含三个不动点加上它们的不稳定流形. 就是说, 所有的轨道整个地位于 $B_r(0)$ 内. 从下面的定理 9.3 看出这在一般情形也成立.

下面的两个引理与引理 6.5 和引理 6.6 类似.

引理 9.1 集合 $\omega_{+}(X)$ 是闭不变集, 它由

$$\omega_{+}(X) = \bigcap_{\sigma t \geq 0} \Phi(t, \overline{\gamma_{\sigma}(X)}) = \bigcap_{\sigma t \geq 0} \bigcup_{\sigma(s-t) \geq 0} \Phi(s, X) \quad (9-6)$$

给出.

证明 由于由引理 6.4 闭不变集的交仍是闭不变集, 故只需证明式(9-6).

我们仅证明 $\sigma = +$ 的情形. 首先注意由于 $\Phi(t, \cdot)$ 是微分同胚, 我们有

$$\Phi(t, \overline{\gamma_+(X)}) = \overline{\Phi(t, \gamma_+(X))} = \bigcup_{s \geq t} \overline{\Phi(s, X)}. \quad (9-7)$$

为了看到 $\bigcap_{t \geq 0} \Phi(t, \overline{\gamma_+(X)}) \subseteq \omega_+(X)$, 我们选择某个 $y \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi(t, \gamma_+(X))}$. 于是对每个 $n \in \mathbb{N}$ 可以找到某个 $y_n = \Phi(n + s_n, x_n) \in \Phi(n, \gamma_+(X))$ 使得 $|y - y_n| < \frac{1}{n}$.

令 $t_n = n + s_n$, 我们找到序列 $t_n \rightarrow \infty$ 和点列 $x_n \in X$ 使得 $\Phi(t_n, x_n) \rightarrow y$, 即 $y \in \omega_\sigma(X)$.

反之, 为了证明 $\omega_+(X) \subseteq \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi(t, \gamma_+(X))}$, 我们选择某个 $y \in \omega_+(X)$. 于是存在 $t_n \rightarrow \infty$ 和点列 $x_n \in X$ 使得 $y_n = \Phi(t_n, x_n) \rightarrow y$. 由此得知对 $t_n > t$ 有 $y_n \in \Phi(t, \gamma_+(X))$, 因此对每个 $t \geq 0$ 有 $y \in \overline{\Phi(t, \gamma_+(X))}$. \square

为记号简单起见从现在起我们仅考虑情形 $\sigma = +1$. 由于式(9-6)中的最后一个等式, 集合 $\Phi(t, \overline{\gamma_\sigma(X)})$ 是递减的, 故我们有

$$\omega_+(X) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi(t, \gamma_+(X))} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\Phi(n, \gamma_+(X))}. \quad (9-8)$$

所以, 如果 $\overline{\gamma_+(X)} \neq \emptyset$ 是紧的, 则 $\omega_+(X)$ 是可数多个非空紧套集的交, 由紧集的有限交性质, 它也是非空紧的.

引理 9.2 假设 X 非空. 若集合 $\overline{\gamma_\sigma(X)}$ 是紧的, 则 $\omega_\sigma(X)$ 是非空且紧. 此外, 若 $\overline{\gamma_\sigma(X)}$ 连通 (例如, 如果 X 连通), 则 $\omega_\sigma(X)$ 也连通.

证明 余下我们证明, $\Lambda = \omega_+(X)$ 连通. 假设它不连通, 则它可分为两个非空的不相交的闭集之并, $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$. 由于 \mathbb{R}^n 是正规的, 存在不相交的开集 U_0 和 U_1 , 使得 $\Lambda_0 \subset U_0$ 和 $\Lambda_1 \subset U_1$. 此外, 集合 $V_n = \overline{\Phi(n, \gamma_+(X))} \setminus (U_0 \cup U_1)$ 是紧的. 因此, 或者 $V = \bigcap_n V_n$ 是非空, 或者 V_n 最终是空集. 在第一个情形, 我们必须有 $V \subset \Lambda$, 这是不可能的, 因为 $V \cap (U_0 \cup U_1) = \emptyset$. 反之, 如果 V_n 最终是空集, 则 $\emptyset(n, \overline{\gamma_+(X)})$ 最终必须在 U_0 或 U_1 之内 (因为 $\emptyset(n, \overline{\gamma_+(X)})$ 连通), 由此分别得知, $\Lambda \subset U_0$ 和 $\Lambda \subset U_1$. 仍得矛盾. \square

定理 9.3 集合 $\omega_+(X)$ 是所有整个位于 $\overline{\gamma_+(X)}$ 中的完全轨道的并.

证明 设 $\gamma(y)$ 是这样的轨道, 则 $\gamma(y) \subseteq \overline{\gamma_+(X)}$, 又由 $\gamma(y)$ 的不变性, 得知对所有的 t 有 $\gamma(y) \subseteq \Phi(t, \overline{\gamma_+(X)})$, 因此 $\gamma(y) \subseteq \omega_+(X)$. 反之, 设 $y \in \omega_+(X)$. 则由 $\overline{\gamma_+(X)}$ 的不变性得 $\gamma(y) \subseteq \omega_+(X) \subseteq \overline{\gamma_+(X)}$. \square

对给定的集合 $\Lambda \subset M$, 集合

$$W^\pm(\Lambda) = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} d(\Phi_t(x), \Lambda) = 0\} \quad (9-9)$$

分别是 Λ 的稳定集与不稳定集. 这里 $d(x, \Lambda) = \inf\{|x - y| \mid y \in \Lambda\}$ 表示 x 和 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ 之间的距离 (参考问题 6.10).

不变集 Λ 称为吸引的, 如果 $W^+(\Lambda)$ 是 Λ 的邻域. 这时集合 $W^+(\Lambda)$ 也称为 Λ 的定义域或吸引盆. 此外, 对任何正不变邻域 U 我们有

$$W^+(\Lambda) = \bigcup_{t < 0} \Phi_t(U). \quad (9-10)$$

但是,我们如何才能找到这样的集合呢?很幸运,利用上面我们的考虑,有一个容易的方法做到这一点.一个其闭包是紧的开连通集 E 称为流的**捕获区域**,如果对 $t > 0$ 有 $\Phi_t(\overline{E}) \subset E$.

引理 9.4 设 E 是捕获区域,则

$$\Lambda = \omega_+(E) = \bigcap_{t \geq 0} \Phi(t, E) \quad (9-11)$$

是非空,紧的连通吸引集.

证明 首先注意,由 $\Phi(t + \varepsilon, \overline{E}) \subset \Phi(t, E) \subset \Phi(t, \overline{E})$ 我们有

$$\bigcap_{t \geq 0} \Phi(t, E) = \bigcap_{t \geq 0} \Phi(t, \overline{E}) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi(t, E)} = \omega_+(E). \quad (9-12)$$

进一步,由引理 9.2 得知 Λ 是非空,紧且连通的.

为了看到 Λ 是吸引的,假设存在 $x \in E$ 以及序列 $t_n \rightarrow \infty$ 使得 $d(\Phi(t_n, x), \Lambda) \geq \varepsilon > 0$. 则由于 $\Phi(t_n, x)$ 保持在紧集 \overline{E} 中,我们可以假设经过取子序列以后有 $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$. 但是由式(9-2)我们有 $y \in \omega_+(x) \subseteq \omega_+(E)$, 矛盾. \square

遗憾的是,吸引集的这个定义并不总够满意.在我们的例子(9-3)中,任何半径为 $r > 1$ 的球 $B_r(0)$ 是捕获区域.但是,那里只有两个不动点 $(\pm 1, 0)$ 是**真正吸引**的,对应的吸引集 Λ 也包含有排斥不动点 $(0, 0)$ 加上它的不稳定流形.特别地,两个吸引不动点的吸引域 $W^+(\{(-1, 0), (1, 0)\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ 与 $W^+(\Lambda) = \mathbb{R}^2$ 只差一个零测度集是相同的.

事实上,吸引集总包含它所有点的不稳定流形.

引理 9.5 设 E 是捕获区域,则

$$W^-(x) \subseteq \omega_+(E), \quad \forall x \in \omega_+(E). \quad (9-13)$$

证明 设 $y \in W^-(x)$, 即 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, y) = x \in E$. 由于 E 是开的存在某个 t_0 使得 $\gamma_-(\Phi(t_0, y)) \subset E$. 又由于 E 是正不变集,我们甚至得到 $\gamma(y) = \gamma(\Phi(t_0, y)) \subset E = \omega_+(E)$, 于是引理结论由定理 9.3 得知. \square

为了排除这些情况,必须保证吸引集不能够分裂为更小的不变集.一种可能是定义**吸引子**为拓扑传递的吸引集.这里,闭不变集 Λ 称为**拓扑传递**的,如果对于任何两个开集 $U, V \subset \Lambda$, 存在某个 $t \in \mathbb{R}$, 使得 $\Phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$. 特别地,一个吸引子不可能分裂为更小的吸引集.注意, Λ 是拓扑传递的,如果它包含稠密轨道(问题 9.1).

对上面的例子,由此得知只有集合 $\{(-1, 0)\}$ 或 $\{(1, 0)\}$ 是吸引子.它们的吸引域是

$$W^+(\{(\pm 1, 0)\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x > 0\}.$$

例 作为另一个例子,我们考虑问题 7.6 中的达芬(Duffing)方程

$$\ddot{x} = -\delta \dot{x} + x - x^3, \quad \delta \geq 0, \quad (9-14)$$

它有汇 $(-1, 0)$, 双曲鞍点 $(0, 0)$, 以及在 $(1, 0)$ 的汇. 汇 $(-1, 0)$ 的吸引盆由双曲鞍点 $(0, 0)$ 的稳定流形所围. 对 $\delta = 0.3$ 的这个情况如图 9-1 所示.

例 对范德波尔 (van der Pol) 方程 (8-24). 唯一的周期轨道是吸引子, 它的吸引盆是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. 但是, 我们将在下一节的例中看到, 所有的吸引子并不都是不动点或周期轨道.

问题 9.1 求证具有稠密轨道的闭不变集是拓扑传递的.

问题 9.2 假设 E 是捕获区域并设 $\Lambda = \omega_+(E)$. 则

$$W^+(\Lambda) = \{x \in M \mid \omega_+(x) \subseteq \Lambda, \omega_+(x) \neq \emptyset\}.$$

(提示: 问题 6.11)

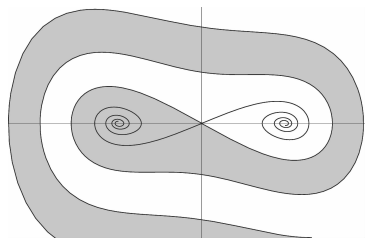


图 9-1 达芬 (Duffing) 方程的不动点 $(-1, 0)$ 的吸引盆

9.2 洛伦兹 (Lorenz) 方程

具有混沌性态的最著名的动力系统之一是 **Lorenz 方程**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (9-15)$$

其中 $\sigma, r, b > 0$. 洛伦兹 (Lorenz) 在模拟两个平板之间在不同温度的二维流元时得到这些方程的. 对应的情形是由复杂的非线性偏微分方程系统所描述. 为了简化这个问题, 他将未知函数关于空间坐标展开成傅里叶 (Fourier) 级数, 并将所有的系数除了三个外都令它们为零, 所得到的三个依赖于时间的系数的方程就是式 (9-15). 变量 x 正比与对流运动的强度, y 正比与气流上升与下降之间的温差, z 正比与铅直温度剖面的线性畸变.

我们开始研究这个系统. 首先看到这个系统在变换

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z) \quad (9-16)$$

下不变. 其次, z 轴是不变流形, 因为

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = z_0 e^{-bt} \quad (9-17)$$

是我们系统的解.

但是现在我们要讨论某些更深入的结果. 我们先说明, 如果 $r \leq 1$, 则这个动力学非常简单. 因为若 $r \leq 1$, 这个向量场只有在原点一个不动点. 它的线性化矩阵是

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad (9-18)$$

对应的特征值是

$$-b, \quad -\frac{1}{2}(1+\sigma \pm \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4(r-1)\sigma}). \quad (9-19)$$

因此, $r < 1$ 时原点渐近稳定. 但是我们甚至可以做得更好一点. 为此, 猜测 Liapunov 函数为

$$L(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad (9-20)$$

直接计算得

$$\dot{L} = -2\alpha\sigma x^2 + 2(\alpha\sigma + \beta r)xy - 2\beta y^2 - 2\gamma z^2 + 2(\gamma - \beta)xyz. \quad (9-21)$$

为了去掉 xyz 项我们选择 $\gamma = \beta$. 由于不可能选择 $\alpha, \beta > 0$ 直接使得 xy 消失, 我们需要利用 $2xy = -(x-y)^2 + x^2 + y^2$ 来吸收它, 于是有

$$\dot{L} = -(\alpha\sigma - \beta r)x^2 - (\alpha\sigma + \beta r)(x-y)^2 - ((2-r)\beta - \alpha\sigma)y^2 - 2\beta z^2. \quad (9-22)$$

因此我们需得选择 $\alpha, \beta > 0$ 使得 $\alpha\sigma - \beta r > 0$ 与 $(2-r)\beta - \alpha\sigma \geq 0$. 例如取 $\alpha = r$ 和 $\beta = \sigma$ 使得第三项为零, 以及对 $0 \leq r \leq 1$ 第一项变为 $2(1-r)\sigma \geq 0$. 总之, 对

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2, \quad (9-23)$$

我们有

$$\dot{L}(x, y, z) = -2\sigma(r(x-y)^2 + (1-r)y^2 + bz^2). \quad (9-24)$$

于是由定理 6.12 容易得到下面的引理(问题 9.3).

引理 9.6 假设 $r \leq 1$, 则洛伦兹(Lorenz)系统只有在原点的一个不动点, 当 $t \rightarrow \infty$ 时所有解都收敛于原点.

如果 r 大于 1, 则存在两个新的不动点

$$(x, y, z) = (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1), \quad (9-25)$$

线性化给出

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp \sqrt{b(r-1)} \\ \pm \sqrt{b(r-1)} & \pm \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}. \quad (9-26)$$

我们可以再次计算特征值, 但其结果几乎要占一整页. 不过, 由式(9-16), 这两个不动点的特征值是相同的. 由式(9-19)得知, 现在出现的一个特征值是正的, 因此原点不再稳定. 可以证明当 $1 < r < 470/19 = 2.74$ 时这两个新不动点渐近稳定.

接下来, 我们尝试用 Mathematica 画出某些解.

In[1]: = $\sigma = 10; r = 28; b = 8/3;$

```
sol = NDSolve[ { x'[t] == -σ(x[t] - y[t]),
                y'[t] == -xz[t] + rx[t] - y[t],
                x[0] == 30, y[0] == 10, z[0] == 40 },
              { x, y, z }, { t, 0, 20 }, MaxSteps -> 5000 ];
```

```
ParametricPlot3D[ Evaluate[ { x[t], y[t], z[t] } /. sol ], { t, 0, 20 }
PlotPoints -> 2000, Axes -> False, PlotRange -> All ];
```


我们看到,所有的轨线先向内运动,然后以优美的不规则方式围绕两个不动点运动.

为了更好地理解解的性态,我们证明存在一个椭球 E_σ , 所有轨线最终进入它并永远不再离开. 为此,考虑上面的李雅普诺夫(Liapunov)函数的一个小修改

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2, \quad (9-27)$$

直接计算显示

$$\dot{L}(x, y, z) = -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2). \quad (9-28)$$

现在令 E 是由 $E = \{(x, y, z) \mid \dot{L}(x, y, z) \geq 0\}$ 定义的

的椭球,并令 $M = \max_{(x,y,z) \in E} L(x, y, z)$. 定义 $E_1 = \{(x, y, z) \mid L(x, y, z) \leq M + 1\}$. 位于 E_1 外的任何点也位于 E 外,因此,对这种点有 $\dot{L} \leq -\delta < 0$. 就是说,对 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus E_1$, L 沿着系统轨线的值严格递减,因此它必须经过有限时间以后进入 E_1 .

此外, E_1 是洛伦兹(Lorenz)系统的捕获区域,并存在对应的吸引集

$$\Lambda = \omega_+(E_1), \quad (9-29)$$

称它为洛伦兹(Lorenz)方程的吸引子. 特别地,我们看到,解对所有正时间都存在. 也注意到, $W^+(\Lambda) = \mathbb{R}^3$. 所有的不动点加上它们的不稳定流形(如果有)也必须包含在 Λ 中. 此外,我们甚至期望 Λ 的勒贝格(Lebesgue)测度为零. 为看到这一点,我们需要刘维尔(Liouville)公式(3-74)的广义形式.

引理 9.7 设 $\dot{x} = f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的动力系统,对应的流是 $\Phi(t, x)$. 设 M 是 \mathbb{R}^n 的有界开子集, $V = \int_M dx$ 是它的体积. 分别简单记 $M(t) = \Phi(t, M)$ 和 $V(t) = \int_{M(t)} dx$, 则

$$\dot{V}(t) = \int_{M(t)} \operatorname{div}(f(x)) dx. \quad (9-30)$$

证明 由变量变换公式,我们有

$$V(t) = \int_{M(t)} dx = \int_M \det(d\Phi_t(x)) dx. \quad (9-31)$$

由于 $\Pi_x(t) = d\Phi_t(x)$ 满足第一变分方程

$$\dot{\Pi}_x(t) = df(\Phi_t(x)) \Pi_x(t), \quad (9-32)$$

由线性系统的 Liouville 公式(3-74)得

$$\det(d\Phi_t(x)) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}(f(\Phi_s(x))) ds\right) \quad (9-33)$$

(回忆 $\operatorname{tr}(df(x)) = \operatorname{div}(f(x))$). 因此

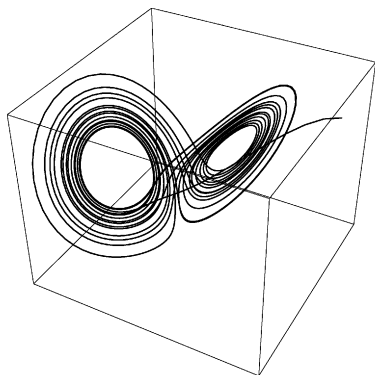


图 9-2

$$\dot{V}(t) = \int_M \operatorname{div}(f(\Phi_t(x))) \det(d\Phi_t(x)) dx, \quad (9-34)$$

再次应用变量变换公式完成引理证明. \square

应用这条引理到洛伦兹(Lorenz)方程, 我们得到

$$V(t) = V_0 e^{-(1+\sigma+b)t}, \quad (9-35)$$

因为

$$\operatorname{div}(f) = -(1+\sigma+b). \quad (9-36)$$

特别地, 我们看到, $\Phi(t, E_1)$ 的测度指数式递减, Λ 的测度必须为零. 注意, 由这个结果也可以得出三个不动点没有一个可为源.

我们上面的数值实验显示, Λ 看上去是很复杂的集合. 这就是为什么称它为 Lorenz 系统的奇怪吸引子.

但是, 这显然没有满足奇怪吸引子的数学定义. 一个集合 Λ 可称得上是奇怪吸引子的, 如果由时间-1 映射

$$\Phi_1: \Lambda \rightarrow \Lambda \quad (9-37)$$

生成的动力系统是混沌的, 且 Λ 是分形集. 按照这个定义的意义我们仍不知道 Lorenz 吸引子是否是奇怪的. 有关结果的综合见 Sparrow 的书[29].

我们不想对这点作进一步详细论述. 在 11.3 和 11.6 节我们将看到这些名词分别是如何定义的. 但是, 我希望从这个例子显示, 即使 \mathbb{R}^3 中一个很简单的系统也可能具有非常复杂的动力学. 我也希望你现在可以好好感谢 Poincare-Bendixson 定理, 它排除了 \mathbb{R}^2 中这样的奇怪性态.

问题 9.3 证明引理 9.6.

问题 9.4 对情形 $\sigma=0$ 求解洛伦兹(Lorenz)方程.

问题 9.5 对洛伦兹(Lorenz)系统的 $r=\infty$ 情形研究如下. 首先引入 $\varepsilon=r^{-1}$. 然后利用坐标变换 $(t, x, y, z) \mapsto (\tau, \xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\tau=\varepsilon^{-1}t$, $\xi=\varepsilon x$, $\eta=\sigma\varepsilon^2 y$, $\zeta=\sigma(\varepsilon^2 z - \varepsilon)$.

求证对 $\varepsilon=0$ 所得系统由

$$\xi' = \eta, \quad \eta' = -\xi\zeta, \quad \zeta' = \eta\xi$$

给出, 它有两个保守量

$$\xi^2 - 2\xi = 2\alpha, \quad \eta^2 + \zeta^2 = \beta.$$

推导对应的单个三阶方程 $\xi''' = -\left(\frac{3}{2}\xi^2 - \alpha\right)\xi'$. 积分这个方程一次, 注意所得结果是牛顿(Newton)型的(见 6.7 节). 现在你对解能说些什么?(提示: 问题 6.22).

9.3 哈密顿(Hamilton)力学

在上面几节, 我们已经看到, 三维中即使看上去一个简单的动力系统也可能是

非常复杂的. 在这一章的余下部分, 我们要证明, 如果系统具有某些特殊结构, 那仍可能得到一些进一步的见识. 为此, 我们再次观察出现在经典力学中的系统.

经典力学的出发点通常是哈密顿 (**Hamilton**) 原理. 假设一个力学系统有由坐标 $q \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ 描述的 n 个自由度. 与这个系统相应的是拉格朗日 (**Lagrange**) 函数

$$L(v, q), \quad v = \dot{q}, \quad (9-38)$$

和积分曲线 $q(t)$, 对此, 满足边值条件 $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$ 的作用积分

$$I(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}(t), q(t)) dt \quad (9-39)$$

取极值.

如果 L 可微, 可令 I 的加托 (Gateaux) 导数为零以求得极值曲线. 即令

$$q_\varepsilon(t) = q(t) + \varepsilon r(t), \quad (9-40)$$

我们看到, 对 q 取极值的必要条件是

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(q_\varepsilon) |_{\varepsilon=0} = 0. \quad (9-41)$$

利用分部积分立刻得到 (问题 9.6) 对应的欧拉—拉格朗日 (Euler - Lagrange) 方程

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \quad (9-42)$$

当质点系在某力系作用下时, 我们有

$$L(v, q) = \frac{1}{2} v M v - U(q), \quad (9-43)$$

其中 M 为元素是质点系质量的正对角矩阵, U 是对应力系的势. 相应的欧拉—拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程正好是牛顿 (Newton) 方程

$$M \ddot{q} = -\mathbf{grad} U(q). \quad (9-44)$$

如果对固定的 q 矩

$$p(v, q) = \frac{\partial L}{\partial v}(v, q) \quad (9-45)$$

是微分同胚, 且因此

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \neq 0, \quad (9-46)$$

则我们可以考虑 L 的勒让德 (**Legendre**) 变换

$$H(p, q) = pv - L(v, q), \quad v = v(p, q), \quad (9-47)$$

这是熟知系统的哈密顿 (**Hamilton**) 函数. 相应的变分原理是满足边界条件 $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$ 的积分

$$I(p, q) = \int_{t_0}^{t_1} (p(t) \dot{q}(t) - H(p(t), q(t))) dt \quad (9-48)$$

取极值. 对应的欧拉—拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程是哈密顿 (Hamilton) 方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}. \quad (9-49)$$

这个形式称为是哈密顿 (**Hamilton**) 力学.

在某些质点的特殊情形, 我们有

$$p = Mv, \quad H(p, q) = \frac{1}{2}pM^{-1}p + U(q), \quad (9-50)$$

以及对应系统总能量的哈密顿 (Hamilton) 函数.

引入辛矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = J^T = -J, \quad (9-51)$$

哈密顿 (Hamilton) 方程也可以写为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -\mathbf{grad}_s H(p, q), \quad (9-52)$$

其中 $\mathbf{grad}_s = -J\mathbf{grad}$ 称为辛梯度.

直接计算显示, H 是常数运动, 即

$$\frac{d}{dt} H(p(t), q(t)) = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0. \quad (9-53)$$

更一般地, 可微函数 $I(p, q)$ 沿着轨线的变化由 Lie 导数 (比较式 (6.42)) 给出

$$\frac{d}{dt} I(p(t), q(t)) = \{H(p(t), q(t)), I(p(t), q(t))\}, \quad (9-54)$$

其中

$$\{H, I\} = \frac{\partial H \partial I}{\partial p \partial q} - \frac{\partial H \partial I}{\partial q \partial p} \quad (9-55)$$

称为泊松 (**Poisson**) 括号. 这应该与问题 3.31 中的海森伯 (Heisenberg) 方程进行比较.

如果函数 $I(p, q)$ 沿着轨线的变化是常数, 即如果

$$\{I, H\} = 0, \quad (9-56)$$

则称 $I(p, q)$ 为首次积分. 但是, 如何能够求首次积分? 一个来源是对称性.

定理 9.8 诺特 (Noether) 设 $\Phi(t, q)$ 是由 $f(q)$ 生成的流. 如果 Φ 使得拉格朗日 (Lagrange) 不变, 则

$$I(v, q) = \frac{\partial L(v, q)}{\partial v} f(q) \quad (9-57)$$

是常数运动.

证明 记 $q^s(t) = \Phi(s, q(t))$. 由 $L(v, q)$ 的不变性得

$$0 = \frac{d}{ds} L(\dot{q}^s(t), q^s(t))|_{s=0}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial v}(\dot{q}(t), q(t)) \frac{\partial f}{\partial q}(q(t)) \dot{q}(t) + \frac{\partial L}{\partial q}(\dot{q}(t), q(t)) f(q(t)), \quad (9-58)$$

因此, 由欧拉—拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\dot{q}(t), q(t)) &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(\dot{q}, q) \right) f(q) + \frac{\partial L}{\partial v}(\dot{q}, q) \frac{\partial f}{\partial q}(q) \dot{q} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(\dot{q}, q) - \frac{\partial L}{\partial v}(\dot{q}, q) \right) f(q) = 0. \end{aligned} \quad (9-59)$$

□

例如, 如果 (9-43) 中的 $L(v, q)$ 与第 j 个坐标 q_j (对固定的 j) 无关, 则它显然在 $\Phi(s, q) = q + s\delta_j$ 作用下不变, 其中 δ_j 是第 j 个方向的单位向量. 因此, 在这情形下, 由诺特 (Noether) 定理, 第 j 个矩

$$p_j = \frac{\partial L(v, q)}{\partial v_j} \quad (9-60)$$

是保守的. 另外的例子见问题 9.11.

哈密顿 (Hamilton) 系统另一个重要性质是它们保持体积. 这由引理 9.7 立刻得知, 因为哈密顿 (Hamilton) 向量场的散度等于零.

定理 9.9 (刘维尔 (Liouville)) 相空间的体积在哈密顿 (Hamilton) 流作用下得到保持.

由庞加莱 (Poincaré) 回归定理, 这个性质通常可给出所考虑运动的重要信息.

定理 9.10 (庞加莱 (Poincaré)) 假设 Φ 是保持有界区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 体积的双射. 则在任何邻域 $U \subseteq D$ 内存在回到 U 的点 x , 即对某 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\Phi^n(x) \in U$.

证明 考虑序列 $\Phi^n(U) \subseteq D$. 存在两个数 l, k , 使得 $\Phi^l(U) \cap \Phi^k(U) \neq \emptyset$, 因为否则, 它们的体积为无穷. 因此, $U \cap \Phi^{k-l}(U) \neq \emptyset$. 如果 y 是交点, 我们就有 $y = \Phi^{k-l}(x)$, 这就证明了我们的论断. □

问题 9.6 推导欧拉—拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程 (9-42).

问题 9.7 (勒让德 (Legendre) 变换) 设 $F(v)$ 满足

$$\det \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(v_0) \neq 0,$$

求证函数 $p(v) = \frac{\partial F}{\partial v}(v)$ 是 v_0 附近的局部微分同胚, 且勒让德 (Legendre) 变换

$$G(p) = pv(p) - F(v(p))$$

有定义. 再证

$$p = \frac{\partial F}{\partial v}(v) \Leftrightarrow v = \frac{\partial G}{\partial p}(p),$$

由此得知, 勒让德 (Legendre) 变换是对合的.

问题 9.8 求证泊松 (Poisson) 括号是满足雅可比 (Jacobi) 恒等式

$$\{I, \{J, K\}\} + \{J, \{K, I\}\} + \{K, \{I, J\}\} = 0$$

和莱布尼茨 (Leibniz) 规则

$$\{I, JK\} = J\{I, K\} + K\{I, J\}$$

的反-对称双线性型.

问题 9.9 假设 D 是在保积流作用下的有界正向不变集. 则 D 属于非游荡点集. (提示: Poincaré 的回归定理和问题 6.9).

问题 9.10 (相对论力学) 爱因斯坦 (Einstein) 方程说, 相对论的质点的动能是

$$T(v) = m(v)c^2, \quad m(v) = m_0 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}},$$

其中 c 是光速, m_0 是质点的(剩余)质量. 利用拉格朗日 (Lagrange) 函数 $L(v, q) = T(v) - U(q)$ 的哈密顿 (Hamilton) 原理推导运动方程. 并推导对应的哈密顿 (Hamilton) 方程.

问题 9.11 考虑 \mathbb{R}^3 中(9-36)的 $L(v, q)$, 其中 $M = mI_3$, 假设 $U(q) = U(|q|)$ 是旋转不变的. 求证在这情形下角动量

$$l = x \wedge p$$

是保守的. 这里 \wedge 表示 \mathbb{R}^3 中的叉积.

9.4 完全可积的哈密顿 (Hamilton) 系统

最后, 我们证明在某些环境下也存在哈密顿 (Hamilton) 系统的典则形式. 为此, 我们需要用一种方法把我们的系统变换成保持哈密顿 (Hamilton) 结构的系统. 确切地说, 如果我们的变换是

$$(P, Q) = \varphi(p, q), \quad (p, q) = \psi(P, Q), \quad (9-61)$$

则我们有

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = d\varphi \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = -d\varphi \mathbf{J} \mathbf{grad} H(p, q) = - (d\varphi \mathbf{J} d\varphi^T) \mathbf{grad} K(P, Q), \quad (9-62)$$

其中 $K = H \circ \varphi$ 是变换后的哈密顿 (Hamilton) 系统. 因此, 我们必须要求 φ 的 Jacobi 矩阵是辛矩阵, 即

$$d\varphi \in Sp(2n) = \{M \in G(2n) \mid \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}\}, \quad (9-63)$$

其中 $Sp(2n)$ 是辛群. 这样的映射称为辛映射. 这时 φ 也称为典则变换. 另外, 它们也可以被描述为这样的变换, 它们允许辛 $\mathbf{2}$ 型

$$\omega((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = (p_1, q_1) \mathbf{J} (p_2, q_2) = p_1 q_2 - p_2 q_1 \quad (9-64)$$

不变.

为了求典则变换, 回忆我们从变分原理式(9-48)推导哈密顿 (Hamilton) 方程的过程. 因此, 我们的变换是典则的, 如果式(9-48)的积分与

$$\dot{I}(P, Q) = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \dot{Q}(t) - K(P(t), Q(t)) dt \quad (9-65)$$

仅差一个全微分. 由 $H(p, q) = K(P, Q)$, 我们得到

$$pdq - PdQ = dS, \quad (9-66)$$

其中 dq 必须理解为对给定曲线 $q(t)$ 有 $dq(t) = \dot{q}(t) dt$. 函数 S 称为生成函数, 它可依赖于四个变量 p, q, P 和 Q . 但是, 一般地, 由于其中只有两个是独立的, 由其中两个表达另外两个更自然.

例如, 我们可以用

$$S = S_1(q, Q) \quad (9-67)$$

和

$$pdq - PdQ = \frac{\partial S_1}{\partial q} dq + \frac{\partial S_1}{\partial Q} dQ \quad (9-68)$$

显示

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}, \quad (9-69)$$

因为上面的方程对所有曲线 $q(t)$ 和 $Q(t)$ 必须成立. 此外, 如果要求

$$\det \frac{\partial S_1}{\partial q \partial Q} \neq 0, \quad (9-70)$$

我们可以对 $Q = Q(p, q)$ 局部地求解 $p = \frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial q}$, 因此, 我们的典则变换由

$$(P, Q) = \left(\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q(p, q)), Q(p, q) \right) \quad (9-71)$$

给出.

类似地, 可选择

$$S = -PQ + S_2(P, q) \quad (9-72)$$

其中

$$pdq - PdQ = -QdP - PdQ + \frac{\partial S_2}{\partial P} dP + \frac{\partial S_2}{\partial Q} dQ, \quad (9-73)$$

由此得知

$$Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial S_2}{\partial Q}. \quad (9-74)$$

如果再次要求

$$\det \frac{\partial S_2}{\partial P \partial Q} \neq 0, \quad (9-75)$$

得到典则变换

$$(P, Q) = (P(p, q), \frac{\partial S_2}{\partial P}(P(p, q), q)). \quad (9-76)$$

剩下的两个情形

$$S = qp + S_3(Q, p) \quad \text{和} \quad S = qp - PQ + S_4(P, p) \quad (9-77)$$

留作练习.

现在回到我们的典则形. 我们将从一维开始, 即如同在式(6-53)中的 $H(p, q)$, $n=1$. 设 q_0 是由周期轨道 γ_E 围绕的 $U(q)$ 的局部极小, 它由轨道上点的能量 E 所唯一确定. γ_E 与 q 轴的两个在 q_0 的左右的交点分别记为 $q_-(E)$ 和 $q_+(E)$. 特别注意 $U(q_{\pm}(E)) = E$.

沿着这样的周期轨道, 动量的积分

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} p dq = \frac{1}{\pi} \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \sqrt{2(E - U(q))} dq \quad (9-78)$$

称为作用变量. 接下来由式(6-48)有

$$I'(E) = \frac{1}{\pi} \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dq}{\sqrt{2(E - U(q))}} = \frac{T(E)}{2\pi} > 0, \quad (9-79)$$

其中 $T(E)$ 是 γ_E 的周期, 因此, 我们可以将 E 表示为 I 的函数, 设 $E = K(I)$. 从而, 如果我们取 I 作为新变量, 新哈密顿(Hamilton)系统 K 将仅依赖于 I . 为了求适当的

第二个变量, 我们将寻找生成函数 $S_2(I, q)$. 由于我们要求 $p = \frac{\partial S_2}{\partial q}$, 令

$$S_2(I, q) = \int_{q_-(K(I))}^q p dq = \int_{q_-(K(I))}^q \sqrt{2(K(I) - U(q))} dq, \quad (9-80)$$

第二个变量为

$$\theta = \frac{\partial S_2}{\partial I} = \int_{q_-(E)}^q \frac{I'(E)^{-1} dq}{\sqrt{2(E - U(q))}} = \frac{2\pi}{T(E)} t, \quad (9-81)$$

其中 t 是从 $q_-(E)$ 到 q 所取的时间(再次比较方程(6-48)), 并注意 $K'(I) = I'(E)^{-1}$. 变量 θ 称为角变量, 它仅按 $\text{mod } 2\pi$ 定义. 运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0, \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial K}{\partial I} = \Omega(I), \end{aligned} \quad (9-82)$$

其中 $\Omega(I) = 2\pi/T(K(I))$.

我们之所以可对作用角变量求这样的典则变换, 其主要理由是为了首次积分, 即哈密顿(Hamilton)函数的存在性. 在一维情形, 单个首次积分足以将常数能量曲面分解为周期轨道. 在高维这不再成立, 除非你能够找到 n 个函数独立的首次积分 L_j , 且对合 $\{L_j, L_k\} = 0$. 这样的系统称为完全可积系统. 如果一个系统可积, 则 n 个首次积分可以用来定义 n 维流形 $\Gamma_c = \{(p, q) \mid L_j(p, q) = c_j, 1 \leq j \leq n\}$. 可以证明,

它们微分同胚于 n 维环面(如果它们紧的话). 在环面 Γ_c 上取环基 $\{\gamma_j(c)\}_{j=1}^n$, 我们就可以如前通过

$$I_j(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j(c)} p dq \quad (9-83)$$

定义作用变量, 并通过生成函数 $S_2(I, q) = \int p dq$ 定义角变量. 我们不想在这里作进一步详细说明, 建议读者查阅阿诺德(Arnold)的优秀著作[2]. 但是, 我们至少可用典型例子阐明这个情况. 在局部极值附近的势 $U(q)$ 的近似是

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} q W q + o(|q|^2), \quad (9-84)$$

其中 W 是正矩阵, 而 $U(q_0)$ 可选择为零. 去掉高阶项, 得模型

$$H(p, q) = \frac{1}{2} (p M p + q W q), \quad (9-85)$$

这是熟知的调和振子. 设 V 是(实)正交矩阵, 它将对称矩阵 $M^{-1/2} W M^{-1/2}$ 化为对角形, 而 ω_j^2 是特征值. 于是辛变换 $(P, Q) = (V M^{1/2} p, V M^{1/2} q)$ (问题 9.13) 给出解耦系统

$$\dot{Q}_j = P_j, \quad \dot{P}_j = -\omega_j^2 Q_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9-86)$$

特别地,

$$K(P, Q) = \sum_{j=1}^n K_j, \quad K_j = \frac{1}{2} (P_j^2 + Q_j^2), \quad (9-87)$$

其中诸 K_j 是 n 个对合的首次积分(验证). 对应的作用-角变量是(问题 9.15)

$$I_j = \frac{1}{2} \left(\frac{P_j^2}{\omega_j} + \omega_j Q_j^2 \right), \quad \theta_j = \operatorname{arccot} \frac{P_j}{\omega_j Q_j}. \quad (9-88)$$

例如, 考虑下面的哈密顿(Hamilton)系统

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{2m} + U_0(q_{j+1} - q_j), \quad q_0 = q_{n+1} = 0, \quad (9-89)$$

它描述 n 个相同(质量 m)质点的格点, 其最邻近点的相互作用由势 $U_0(x)$ 描述. 第 0 个和第 n 个质点考虑为固定, q_j 是第 j 个质点到它平衡位置的位移. 如果我们假定质点之间由弹簧连接, 势为 $U_0(x) = \frac{k}{2} x^2$, 其中 $k > 0$ 称为弹性系数, 于是我们有调和振子. 运动被分解为 n 个对应于势的雅可比(Jacobi)矩阵的特征向量的模式. 物理学家长期相信, 力的非线性扰动将导致热能化. 就是说, 如果系统是以某种线性化系统模式开始, 能量最终将平等地分散在所有的模式上. 但是, Fermi, Pasta 和 Ulam 用计算机实验证明这是不对的(问题 9.16). 这与孤立子的存在性有关, 例如见文献[21].

问题 9.12 (辛群) 求证 $Sp(2n)$ 事实上是一个群. 假设 $M \in Sp(2n)$, 求证

$\det(M)^2 = 1$ 且 $X_M(z) = z^{2n} X_M(z^{-1})$.

问题 9.13 求证线性变换 $(P, Q) = (Up, (U^{-1})^T q)$ 是典则的, 其中 U 是任意矩阵.

问题 9.14 用直接证明 $d\varphi$ 是辛变换, 来求证由函数 S 生成的变换是典则的. (提示: 用

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} = - \left(\frac{\partial p}{\partial q} \right)^T$$

和类似的其他关系式证明 $-Jd\varphi = Jd\psi^T$).

问题 9.15 考虑一维调和振子

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2,$$

并证明 $S_1(q, \theta) = \frac{\omega}{2}q^2 \cot(\theta)$ 生成作用-角变量的典则变换.

问题 9.16 (Fermi-Pasta-Ulam 实验) 考虑具有交互作用势 $U_0(x) = \frac{k}{2}(x^2 + \alpha x^3)$ 的哈密顿(Hamilton)系统(9-82). 注意, 不妨利用 $m = k = 1$ (为什么?)

计算线性化系统 $\alpha = 0$ 的特征值和特征向量. 在特征空间选择初始条件并(数值)计算时间发展. 研究状态关于作为时间 t 的函数的特向量是如何分布的. (选择 $N = 32, \alpha = 1/6$).

问题 9.17 (拉克斯(Lax)偶) 设 $L(p, q)$ 和 $P(p, q)$ 是 $n \times n$ 矩阵. 称它们组成哈密顿(Hamilton)系统的拉克斯(Lax)偶, 如果运动方程(9-49)等价于拉克斯(Lax)方程

$$\dot{L} = [P, L].$$

证明量

$$\text{tr}(L^j), \quad 1 \leq j \leq n$$

是首次积分(比较问题 3.31).

9.5 Kepler 问题

最后, 作为我们所得结果的应用, 我们将证明如何求解 1.1 节的方程(1.11). 事实上, 我们甚至可考虑更为一般的情形, 即二体问题. 假设有两个质量集中在 $x_1 \in \mathbb{R}^3$ 和 $x_2 \in \mathbb{R}^3$ 上的质点. 它们在仅依赖于它们之间的距离, 并位于两个质点的连线上的力 F 的作用下. 动能是

$$T(\dot{x}) = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2, \quad (9-90)$$

势能是

$$U(x) = U(|x_1 - x_2|). \quad (9-91)$$

拉格朗日 (Lagrange) 函数是两者之差

$$L(\dot{x}, x) = T(\dot{x}) - U(x). \quad (9-92)$$

显然它在变换 $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + sa, x_2 + sa)$, $a \in \mathbb{R}^3$ 下不变, 故定理 9.7 告诉我们, 总矩

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \quad (9-93)$$

的三个分量是首次积分. 因此, 我们可将新坐标选择为

$$q_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad q_2 = x_1 - x_2. \quad (9-94)$$

在这新坐标下, 拉格朗日 (Lagrange) 函数化为

$$L(\dot{q}, q) = \frac{M}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{\mu}{2} \dot{q}_2^2 - U(q_2), \quad M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (9-95)$$

特别地, 这是解耦系统, 第一部分的解是 $q_1(t) = q_1(0) + \dot{q}_1(0)t$. 为了解第二部分, 注意它在旋转下不变, 再次利用定理 9.8, 我们得到角矩

$$l = \mu q_2 \wedge \dot{q}_2, \quad (9-96)$$

它是另一个首次积分. 因此找到了三个首次积分, 我们猜想, 我们的系统可积. 但是, 由于

$$\{l_1, l_2\} = l_3, \quad \{l_1, l_3\} = -l_2, \quad \{l_2, l_3\} = l_1, \quad (9-97)$$

它们不是对合的. 不过, 利用 $\{l, |l|^2\} = 0$, 不难看出

定理 9.11 二体问题是完全可积的. 首次积分的完全集是函数独立的, 其对合为

$$p_{11}, \quad p_{12}, \quad p_{13}, \quad \frac{\mu}{2} p_2^2 + U(q_2), \quad |l|^2, \quad l_3 \quad (9-98)$$

其中 $p_1 = M \dot{q}_1$ 和 $p_2 = \mu \dot{q}_2$.

下一步我们要计算作用角变量. 但是由于这是非常麻烦的事, 我们将用更直接的方法去解运动方程. 由于运动是限制在垂直于 l 的平面内 (一旦初始条件选定), 这建议我们在这个平面内选择极坐标 (r, φ) . 角动量现在为

$$l_0 = |l| = \mu r^2 \dot{\varphi}, \quad (9-99)$$

由能量守恒定律, 得

$$\frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{\mu^2 r^2} \right) + U(r) = E. \quad (9-100)$$

因此, 由

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2(E - U(r))}{\mu} - \frac{l_0^2}{\mu^2 r^2}}, \quad (9-101)$$

通过分离变量可 (隐式) 求得 r . 在开普勒 (Kepler) 问题 (万有引力) 情形

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r}. \quad (9-102)$$

可计算积分,但不能把 r 解为 t 的函数. 不过,如果我们仅仅对轨道形状感兴趣,则可以视 r 为 $r=r(\varphi)$, 它满足

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu(E-U(r))}{l_0^2} - \frac{1}{r^2}}. \quad (9-103)$$

求解(问题 9.18)得

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \frac{l_0^2}{\gamma\mu}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El_0^2}{\mu\gamma^2}}, \quad (9-104)$$

由此,当 $\varepsilon < 1$ 时轨道是椭圆, $\varepsilon = 1$ 时是抛物线, 以及 $\varepsilon > 1$ 时是双曲线.

问题 9.18 求解方程(9-103). (提示: 利用变换 $\rho = r^{-1}$).

9.6 KAM 定理

在上一节,我们非常成功地求解了二体问题. 但是,如果我们要研究行星围绕太阳在万有引力作用下的运动,这就得考虑一般的 n -体问题,这时动能为

$$T(\dot{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2, \quad (9-105)$$

势能为

$$U(x) = \sum_{1 \leq j < k \leq N} U_{jk}(|x_j - x_k|). \quad (9-106)$$

在万有引力情形下,我们有

$$U_{jk}(|x_j - x_k|) = \frac{m_j m_k}{|x_j - x_k|}. \quad (9-107)$$

不过,我们可容易地对 $N=2$ 求解这个问题,对 $N \geq 3$ 就不再可能了. 事实上,尽管经过许多天文学家和数学家的努力,这后一个情形仍知道得甚少.

理由当然是 N -体问题对 $N \geq 3$ 不再可积. 事实上,可以证明,即使(具多于一个自由度)一般哈密顿(Hamilton)系统也是不可积的. 因此,按照惯例可积系统是个例外. 但是,许多有趣的物理系统接近于可积系统. 就是说,它们是可积系统的小扰动. 例如,如果我们忽略行星之间的引力而仅考虑太阳的吸引力,所得的系统是可积的. 此外,由于太阳的质量远远大于行星的质量,忽略的项可看作小扰动.

这引导我们去研究系统

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q), \quad (9-108)$$

其中 H_0 完全可积. ε 是小数. 由于 H_0 可积,我们可以选择对应的作用角变量 (I, θ) , 故只需考虑如下类型的系统

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta), \quad (9-109)$$

其中 $I \in \mathbb{R}^n$, θ 所有的分量必须按 $\text{mod } 2\pi$ 取, 就是说 θ “生活” 在环面 \mathbb{T}^n 上.

由式(9-82), 对 $\varepsilon = 0$ 未被扰动运动是

$$I(t) = I_0, \quad \theta(t) = \theta_0 + \Omega(I_0)t. \quad (9-110)$$

因此解曲线是围绕不变环面 $\Gamma_{I_0} = \{I_0\} \times \mathbb{T}^n$ 的曲线. 具有线性流的这样的环面称为 **Kronecker 环面**. 可出现两种情形.

如果频率 $\Omega(I_0)$ 非共振或者有理独立,

$$k\Omega(I_0) \neq 0, \quad \text{对所有 } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \quad (9-111)$$

则每一个轨道稠密. 另一方面, 如果频率 $\Omega(I_0)$ 共振,

$$k\Omega(I_0) = 0, \quad \text{对某 } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \quad (9-112)$$

则环面可分解为与前面环面有相同性质的更小环面.

对应的解称为**拟周期解**. 它们是周期的, 当且仅当 $\Omega(I_0)$ 中的所有频率有理相关, 即

$$\Omega(I_0) = k\omega, \quad \text{对某个 } k \in \mathbb{Z}^n, \omega \in \mathbb{R}. \quad (9-113)$$

在数量系统情形, 这种拟周期解对应于稳定运动(行星既不相碰也不跑向无穷远), 因此问题是它们在小扰动下是否还保持. 这个问题因此也称为数量系统的“稳定性问题”.

正如柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)指出的, 大部分其频率是非共振的环面, 它们在小扰动下都得到保持. 更严格地说, 设 $I \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, 以 $\Omega(D)$ 记我们系统所有可能频率的集合. 设 $\Omega_\alpha(D)$ 是满足下面丢番图 Diophantine 条件

$$|k\Omega| \geq \frac{\alpha}{|k|^n}, \quad \text{对一切 } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \quad (9-114)$$

的频率 Ω 集合. 则下面由柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov), 阿诺德(Arnold), 以及 Moser 得到的著名结果成立:

定理 9.11 (KAM) 假设 H_0, H_1 在 $D \times \mathbb{T}^n$ 上解析, 且 H_0 是非退化的, 即

$$\det\left(\frac{\partial H_0}{\partial I}\right) \neq 0. \quad (9-115)$$

则存在常数 $\delta > 0$, 使得对

$$|\varepsilon| < \delta\alpha^2, \quad (9-116)$$

满足 $I \in \Omega_\alpha(D)$ 的未被扰动系统的所有克罗内克(Kronecker)环面 Γ_I 在环面稍微变形时仍将保持. 它们连续依赖于 I , 并构成相空间 $D \times \mathbb{T}^n$ 的测度为 $O(\alpha)$ 的子集.

这个结果的证明包含所谓“小除数”问题, 它超出了本书的范围. 不过, 我们将至少可考虑一个较简单的玩具问题, 用它阐明某些思想, 特别, 解释丢番图(Diophantine)条件(9-107)的由来. 更进一步的详细情形和参考文献见阿诺德(Arnold) [2] 或者 Moser [20].

现在考虑我们的玩具问题. 我们从系统

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} i\omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\omega_n \end{pmatrix}, \quad \omega_j \in \mathbb{R} \quad (9-117)$$

开始, 其中的解是拟周期的, 且由

$$x_j(t) = (e^{At}c)_j = c_j e^{i\omega_j t} \quad (9-118)$$

给出. 接下来, 对这个系统按照

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad (9-119)$$

进行扰动, 其中 $g(x)$ 是收敛幂级数

$$g(x) = \sum_{|k| \geq 2} g_k x^k, \quad k \in \mathbb{N}_0^n, \quad (9-120)$$

其中 $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, 以及 $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$. 对扰动系统的解, 我们作猜测

$$x(t) = \sum_{|k| \geq 1} c_k e^{i\omega_k t}, \quad (9-121)$$

或等价地

$$x(t) = u(e^{At}c), \quad (9-122)$$

其中

$$u(x) = x + \sum_{|k| \geq 2} u_k x^k. \quad (9-123)$$

将这个猜测代入式(9-119), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)Ax = Au(x) + g(u(x)), \quad (9-124)$$

即

$$\sum_{|k| \geq 2} (\omega k - A) u_k x^k = g\left(x + \sum_{|k| \geq 2} u_k x^k\right). \quad (9-125)$$

比较 x^k 的系数得

$$(\omega k - A) u_k = \text{包含 } |l| < |k| \text{ 的项 } u_l, \quad (9-126)$$

因此, 只要

$$\omega k - \omega_j \neq 0 \quad \text{对所有 } |k| \geq 2, 1 \leq j \leq n, \quad (9-127)$$

u_k 的系数可递归地确定.

接下来我们需要证明, 对应的级数收敛, 显然, 如果除数 $\omega k - \omega_j$ 不太快趋于零, 这是收敛的. 事实上, 可以证明, 如果存在正常数 δ, τ 使得

$$|\omega k - \omega_j| \geq \frac{\delta}{|k|^\tau} \quad (9-128)$$

成立, 则级数收敛. 此外, 可以证明对某些常数, 满足式(9-128)的频率 ω 的集合稠密, 并在 \mathbb{R}^n 中有满的勒贝格(Lebesgue)测度.

下面问题 9.19 中的例子显示, 如果频率共振, 则系统不稳定.

问题 9.19 考虑

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 = 0,$$

证明相应的系统不稳定. (提示: 伯努利(Bernoulli)方程).

第 3 部分 混 沌

第 10 章 离散动力系统

10.1 逻辑斯谛(Logistic)方程

在这一章我们简短地介绍离散动力系统. 其中大部分结果类似于我们在连续动力系统所得到的. 此外, 直到第 12 章我们暂时还不需要它. 现在就从简单的例子开始.

设 $N(t)$ 是某个物种在时间 t 时的大小, 它的增长率与当前的数量成比例, 就是说,

$$\dot{N}(t) = \kappa N(t). \quad (10-1)$$

显然这个方程的解是 $N(t) = N_0 \exp(\kappa t)$. 因此, 当 $\kappa > 0$ 时种群指数式增长, $\kappa < 0$ 时指数式减少. 类似地, 我们可用差分方程

$$N(n+1) - N(n) = kN(n), \quad (10-2)$$

或者, 等价地用

$$N(n+1) = (1+k)N(n) \quad (10-3)$$

模拟这个情况, 其中 $N(n)$ 现在是经过 n 个时间间隔(年)以后的种群数. 其解为 $N(n) = N_0(1+k)^n$, 它按照 $k (> -1)$ 的符号而分别指数式增长或者指数式衰减. 特别, 在连续情形与离散情形之间没有太大的差别, 尤其如果我们令 $\kappa = \ln(1+k)$, 则在 $t = n$ 得到相同的结果.

但是, 正如下面例子显示, 上面的结果会引起很大误解. 上面增长模型的更精确形式是

$$\dot{N}(t) = \kappa N(t)(L - N(t)), \quad (10-4)$$

其中种群最大极限量是 L . 在 1.5 节我们已经看到, 对任何正初始值 N_0 , 物种最终趋于极限种群 L . 这个方程的离散形式为

$$N(n+1) - N(n) = kN(n)(L - N(n)), \quad (10-5)$$

或者, 等价地

$$N(n+1) = kN(n)(\tilde{L} - N(n)), \quad \tilde{L} = L + \frac{1}{k}. \quad (10-6)$$

引入 $x_n = N(n)/\tilde{L}$, $\mu = k\tilde{L}$, 我们看到, 只需考虑

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad (10-7)$$

这是熟知的逻辑斯谛 (**Logistic**) 方程. 引入二次函数

$$L_\mu(x) = \mu x(1 - x), \quad (10-8)$$

可把它的解写为这个映射的 n 次迭代, $x_n = L_\mu^n(x_0)$. 但是, 如果当你尝试对这些迭代作出封闭的表达式时, 你就会立刻感觉到这没有连续情形那么容易. 此外, 上面的差分方程所导致的非常复杂的动力学, 至今仍还没有完全被人们了解清楚.

为了得到这个结构的第一印象, 我们作些数值实验. 考虑 $0 \leq \mu \leq 4$, 这时区间 $[0, 1]$ 被 f 映为它自己.

首先, 我们用下面 Mathematic 编码

```
In[1] := ShowWeb[f-, xstart-, nmax-] :=
  Block[{x, xmin, xmax, graph, web},
    x[0] := xstart;
    x[n-] := x[n] = f[x[n-1]];
    web = Flatten[Table[{x[n], x[n]}, {x[n], x[n+1]}],
      {n, 0, nmax}], 1];
    xmax = Max[web]; xmin = Min[web];
    graph = plot[{f[x], x}, {x, xmin, xmax},
      DisplayFunction->Identity];
    Show[graph, Graphics[Line[web]],
      DisplayFunction->$DisplayFunction]
  ];
```

从 $xstart$ 开始, 对函数 $f(x)$ 的形象化 $nmax$ 迭代. 如果 μ 小, 譬如取 $\mu = 1$,

```
In[2] := ShowWeb[1#(1 - #) &, 0.4, 20];
```

我们看到, 在 $(0, 1)$ 中的所有初始值收敛于 0, 它是不动点方程 $x = L_\mu(x)$ 的一个解. 如果 μ 增加到超过 1, 则所有初始条件收敛于不动点方程的第二个解 $1 - \frac{1}{\mu}$.

```
In[3] := ShowWeb[2#(1 - #) &, 0.2, 20];
```

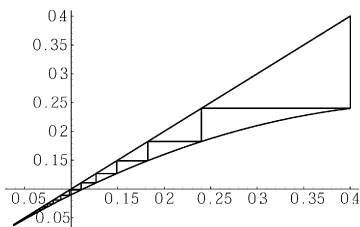


图 10-1

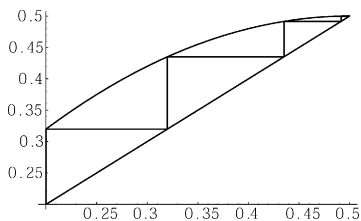


图 10-2

在 $\mu = 3$ 性态又改变了, 所有的初始条件最终在方程 $L_\mu^2(x) = x$ 的两个解之间来回跳动, 它们不是 $L_\mu(x) = x$ 的解.

In[4]: = ShowWeb[3.1#(1-#)&,0.4,20];

显然, 对系统来说采取这个研究方法很麻烦. 我们将在 11 节回到这个问题.

问题 10.1 如果这个迭代收敛, 极限是否永远是不动点?

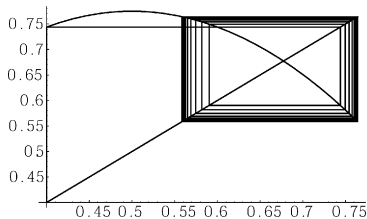


图 10-3

问题 10.2 考虑 m 阶差分方程

$$x_{n+m} = F(n, x_n, \dots, x_{n+m-1}). \quad (10-9)$$

证明它可以化为单个映射的迭代.

10.2 不动点和周期点

现在我们引入对后面有用的一些记号. 作为基础, 令 M 是距离空间, $f: M \rightarrow M$ 连续. 我们对相应的迭代

$$f^n(x) = f^{n-1}(f(x)), \quad f^0(x) = x \quad (10-10)$$

的动力系统的研究感兴趣. 在大多数情形下, M 将是 \mathbb{R}^n 的子集. 更抽象的选取后面用到时再给出.

称满足

$$f(p) = p \quad (10-11)$$

的点 $p \in M$ 为 f 的不动点. f 的不动点集记为 $\text{Fix}(f)$. 类似地, f^n 的不动点

$$f^n(p) = p \quad (10-12)$$

称为周期 n 的周期点. 通常将假设 n 是 p 的原始周期, 就是说, 对所有 $1 \leq m < n$, 我们有 $f^m(p) \neq p$.

x 的向前轨道定义为

$$\gamma_+(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}. \quad (10-13)$$

显然它是(正)不变集. 这里集合 $U \subseteq M$ 称为(正)不变集, 如果 $f(U) \subseteq U$. x 的轨道是点集

$$\gamma(x) = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}, \text{ 满足 } x_0 = x, x_{n+1} = f(x_n)\}. \quad (10-14)$$

一个重要的事实是, 点 $x_n, n \in \mathbb{N}$ 不是唯一确定的, 除非 f 是一对一的. 此外, 有可能这种点根本不存在 (如果对某个 $x_n, f^{-1}(x) = \emptyset$). 轨道是不变的, 即, $f(\gamma(x)) = \gamma(x)$. 点列 $x_n \in \gamma(x), n < 0$ 也称为 x 的过去历史.

如果 p 是周期 n 的周期点, 则 $\gamma_+(p)$ 是有限的, 它刚好由 n 个点

$$\gamma_+(p) = \{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\} \quad (10-15)$$

组成. 其逆不真, 因为点可能是最终周期的(不动点), 即, 可能 $f^k(x)$ 对某个 k 是周期的(不动点).

例 如果 $M = \mathbb{R}$ 且 $f=0$, 则 $p=0$ 是仅有的一个不动点, 且每个其他点是最终不动点.

点 $x \in M$ 称为向前渐近于周期 n 的周期点 p , 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p. \quad (10-16)$$

使得式(10-16)成立的所有 $x \in M$ 的集合称为稳定集 $W^+(p)$. 显然, 如果 p_1, p_2 是不同的周期点, 则它们的稳定集不相交. 事实上, 如果 $x \in W^+(p_1) \cap W^+(p_2)$, 则我们有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_1 n_2 k}(x) = p_1 = p_2$, 矛盾. 我们称 p 是吸引的, 如果存在 p 的开邻域 U , 使得 $U \subseteq W^+(p)$. 集合 $W^+(\gamma(p)) = \bigcup_{q \in \gamma(p)} W^+(p)$ 显然是正向不变的(如果 f 可逆, 它甚至是不变的, $f(W^+(\gamma(p))) = W^+(\gamma(p))$).

类似地, 点 $x \in M$ 称为向后渐近于周期 n 的周期点, 如果存在 x 的过去历史 x_k 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{-nk}(x) = p$. 不稳定集 $W^-(p)$ 是满足这个条件的所有 $x \in M$ 的集合. 同样, 不同周期点的不稳定集也是不相交的. 我们称 p 是排斥的, 如果存在 p 的开邻域 U , 使得 $U \subseteq W^-(p)$.

注意, 如果 p 是排斥点, 则每个 $x \in U$ 在迭代下最终将离开 U (问题 10.5).

进一步, 如果周期点 p 的轨道 $\gamma_+(p)$ 上的一个点是吸引(排斥)的, 则它上面所有其他的点也是吸引(排斥)的(证明它).

现在考虑 $M = [0, 1]$ 上的逻辑斯谛(logistic)映射 $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$. 我们已经看到, 如果 $\mu = 0$, 则只有一个不动点 0 , 它的 $W^+(0) = [0, 1]$, $(0, 1]$ 中的所有点都是最终周期点.

下面我们转到情形 $0 < \mu < 1$. 这时有 $L_\mu(x) \leq \mu x$, 因此, $L_\mu^n(x) \leq \mu^n x$, 故每一点指数式收敛于 0 . 特别地, 我们有 $W^+(0) = [0, 1]$.

注意, 这可局部地得到, 因为 $L'_\mu(0) = \mu < 1$. L_μ 在不动点的邻域内是压缩的, 因此, 在此邻域内的所有点都收敛于不动点.

这个结果可容易地推广到可微映射 $f: C^1(U, U)$, 其中 $U \subset \mathbb{R}^n$.

定理 10.1 假设 $f \in C^1(U, U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. 则当 $d(f^n)_p$ 所有的特征值在单位圆内时, 周期 n 的周期点 p 是吸引的, 如果所有特征值在单位圆外, 则是排斥的.

证明 在第一个情形, 对任何固定且大于所有特征值的 θ , 存在适当的范数, 使得 $\|d(f^n)_p\| < \theta < 1$ (问题 3.41). 此外, 由于范数连续, 存在围绕 p 的开球, 使得对所有的 $x \in B$ 有 $\|d(f^n)_x\| \leq \theta$. 因此, 我们有 $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \theta |x - p|$, 得第一个结论.

考虑 p 附近 f 的局部逆, 就可将第二个情形化为第一个情形. □

如果 $d(f^n)$ 在周期点 p 的特征值没有一个在单位圆上, 则 p 称为双曲的. 注意,

由微分的链规则得

$$d(f^n)(p) = \prod_{x \in \gamma_+(p)} df_x = df_{f^{n-1}(p)} \cdots df_{f(p)} df_p. \quad (10-17)$$

最后, 周期点的稳定性可如微分方程情形定义. $f(x)$ 的周期轨道 $\gamma_+(p)$ 称为是稳定的, 如果对任给的邻域 $U(\gamma_+(p))$, 存在另外的邻域 $V(\gamma_+(p)) \subseteq U(\gamma_+(p))$, 使得 $V(\gamma_+(p))$ 中的任何点在所有迭代下都停留在 $U(\gamma_+(p))$ 中. 注意, 这等价于下面的事实, 对任何给定的邻域 $U(p)$, 存在另外的邻域 $V(p) \subseteq U(p)$, 使得对任何点 $x \in V(p)$ 和所有 $m \in \mathbb{N}_0$, 满足 $f^m(x) \in U(p)$.

类似地, $f(x)$ 的周期轨道 $\gamma_+(p)$ 称为渐近稳定, 如果它稳定且吸引.

取 f 的周期点 p , $f^n(p) = p$, 以及 p 的开邻域 $U(p)$. 李雅普诺夫 (Liapunov) 函数是连续函数

$$L: U(p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (10-18)$$

它在 p 为零, 对 $x \neq p$ 它为正, 且满足

$$L(x) \geq L(f^n(x)), \quad x, f^n(x) \in U(p) \setminus \{p\}. \quad (10-19)$$

称它为严格李雅普诺夫 (Liapunov) 函数, 如果式 (10-19) 中的等号永不出现.

如同微分方程情形, 我们有下面类似的李雅普诺夫 (Liapunov) 定理 (问题 10.6).

定理 10.2 假设 p 是 f 的周期点. 如果存在李雅普诺夫 (Liapunov) 函数 L , 则 p 稳定. 此外, 如果 L 是严格的, 则 p 渐近稳定.

问题 10.3 对 $\mu = 1$, 考虑逻辑斯谛 (logistic) 映射 $L_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$. 求证 $W^+(0) = [0, 1]$.

问题 10.4 对 $0 \leq \mu \leq 4$, 由线性化确定逻辑斯谛 (logistic) 映射 $L_\mu(x)$, $x \in [0, 1]$ 所有不动点的稳定性.

问题 10.5 对 $\mu = 4$, 考虑逻辑斯谛 (logistic) 映射 L_μ . 求证 0 是排斥不动点. 求证向前轨道和向后轨道都是渐近于 0 的轨道.

问题 10.6 证明定理 10.2.

问题 10.7 定义回归点集 $\text{Rec}(f) := \{x \in M \mid \text{对每个邻域 } U(x) \text{ 存在某个 } n > 0 \text{ 满足 } f^n(x) \in U(x)\}$ 以及非游荡点集 $\text{Nwa}(f) := \{x \in M \mid \text{对每个邻域 } U(x) \text{ 存在 } n > 0 \text{ 和 } y \in U(x) \text{ 满足 } f^n(y) \in U(x)\}$. 求证:

(1) $\text{Per}(f) \subseteq \text{Rec}(f) \subseteq \text{Nwa}(f)$.

(2) $\text{Per}(f)$, $\text{Rec}(f)$ 和 $\text{Nwa}(f)$ 都是 (正) 不变集.

(3) $\text{Rec}(f) = \{x \in M \mid \text{存在序列 } n_k \text{ 满足 } f^{n_k}(x) \rightarrow x\}$.

(4) $\text{Nwa}(f)$ 是闭集.

(也见问题 11.7).

10.3 线性差分方程

如同在微分方程情形, 非线性映射在不动点(周期点)附近的性态也可以由其线性化来研究. 我们从研究一阶线性齐次差分方程

$$x(m+1) = \mathbf{A}(m)x(m), \quad x(m_0) = x_0 \quad (10-20)$$

开始, 其中 $\mathbf{A}(m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. 显然, 对应 $x(m_0) = x_0$ 的解是

$$x(m, m_0, x_0) = \mathbf{H}(m, m_0)x_0, \quad (10-21)$$

其中 $\mathbf{H}(m, m_0)$ 是主解矩阵,

$$\mathbf{H}(m, m_0) = \prod_{j=m_0}^{m-1} \mathbf{A}(j), \quad m \geq m_0. \quad (10-22)$$

特别地, 解的线性组合仍是解, 所有解的集合构成 n 维向量空间.

主解矩阵是矩阵初值问题

$$\mathbf{H}(m+1, m_0) = \mathbf{A}(m)\mathbf{H}(m, m_0), \quad \mathbf{H}(m_0, m_0) = \mathbf{I} \quad (10-23)$$

的解, 且满足

$$\mathbf{H}(m, m_1)\mathbf{H}(m_1, m_0) = \mathbf{H}(m, m_0). \quad (10-24)$$

此外, 如果 $\mathbf{A}(m)$ 对所有 m 可逆, 我们可以令

$$\mathbf{H}(m, m_0) = \left(\prod_{j=m}^{m_0-1} \mathbf{A}(j) \right)^{-1}, \quad m < m_0. \quad (10-25)$$

在这情形下, $\mathbf{H}(m, m_0)$ 与逆 $\mathbf{H}(m, m_0)^{-1} = \mathbf{H}(m_0, m)$ 同构, 且对所有 m , 上面所有的公式都成立.

刘维尔(Liouville)公式的类似, 就是通常的行列式的积规则

$$\det(\mathbf{H}(m, m_0)) = \prod_{j=m_0}^{m-1} \det(\mathbf{A}(j)). \quad (10-26)$$

最后, 我们回到非齐次系统

$$x(m+1) = \mathbf{A}(m)x(m) + \mathbf{g}(m), \quad x(m_0) = x_0, \quad (10-27)$$

其中 $\mathbf{A}(m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{g}(m) \in \mathbb{R}^n$. 由于非齐次系统(10-27)的两个解之差满足对应的齐次系统(10-20), 故只需求一个特解. 事实上, 可直接验证, 系统的解由下面公式给出.

定理 10.3 非齐次初值问题的解由

$$x(m) = \mathbf{H}(m, m_0)x_0 + \sum_{j=m_0}^{m-1} \mathbf{H}(m, j)\mathbf{g}(j) \quad (10-28)$$

给出. 其中 $\mathbf{H}(m, m_0)$ 是对应齐次系统的主解矩阵.

如果 $A(m)$ 可逆, 且若令

$$x(m) = H(m, m_0)x_0 - \sum_{j=m-1}^{m_0} H(m, j)g(j), \quad m < m_0. \quad (10-29)$$

则上面公式对 $m < m_0$ 也成立.

问题 10.8 求由

$$x(m) = x(m-1) + x(m-2), \quad x(1) = x(2) = 1$$

确定的斐波那契 (Fibonacci) 数的明显公式.

10.4 不动点附近的局部性态.

这一节我们研究在不动点 p 附近可微映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的局部性态. 不妨假设 $p = 0$, 并将系统写为

$$f(x) = Ax + g(x), \quad (10-30)$$

其中 $A = df_0$. 对周期点的类似结果容易用 f^n 代替 f 来得到.

首先我们证明映射的 Hartman-Grobman 定理 (比较定理 7.10)

定理 10.4 (Hartman-Grobman) 假设 f 是具有双曲不动点 0 的局部微分同胚.

则存在同胚 $\varphi(x) = x + h(x)$, 其中 h 有界, 使得在 0 的充分小邻域内有

$$\varphi \circ A = f \circ \varphi, \quad A = df_0. \quad (10-31)$$

证明 设 ϕ_δ 是满足 $|x| \leq \delta$ 时 $\phi_\delta(x) = 0$, $|x| \geq 2\delta$ 时 $\phi_\delta(x) = 1$ 的光滑截断函数. 于是, 对充分小的 δ , 函数 $g_\delta = (1 - \phi_\delta)(f - A)$ 满足引理 7.8 的条件 (证明之). 由于对 $|x| \leq \delta$, f 与 f_δ 重合, 在 x 的邻域 $\varphi^{-1}(\{x \mid |x| \leq \delta\})$ 内, f_δ 的同胚与 f 的同胚重合. \square

我们强调, 同胚 φ 一般不可微! 特别地, 这表明稳定集 $W^+(0)$ 和不稳定集 $W^-(0)$ (由 10.2 节定义) 分别由对应的线性子空间 $E^+(A)$ 和 $E^-(A)$ 的同胚像 (局部) 给出. 事实上, 我们马上看到, 我们甚至可以证明 (与 φ 对照的不同) 它们是微分流形.

在这一节的余下部分将假设 f 是局部微分同胚.

我们分别定义不动点 p 的**稳定流形**和**不稳定流形**为, 在 f 与 f^{-1} 迭代下指数式收敛于 p 的所有点的点集, 即

$$M^\pm(p) = \{x \in M \mid \sup_{\pm m \in \mathbb{N}_0} \alpha^{\mp m} |f^m(x) - p| < \infty, \quad \text{对某 } \alpha \in (0, 1)\}, \quad (10-32)$$

这两个集合显然在流的作用下是不变的, 称它们为 p 的**稳定流形**和**不稳定流形**.

不妨假设 $p = 0$. 在线性情形, 显然, 我们有 $M^+(0) = E^+(A)$.

我们的目的是证明, 集合 $M^+(x_0)$ 实际上是与 $E^+(A)$ 相切的 (光滑) 流形. 如同在连续情形, 关键思想是把我们的问题叙述为可以用迭代求解的不动点方程.

现在用定理 10.3 将

$$f(x) = Ax + g(x) \quad (10-33)$$

改述为差分方程

$$x(m) = A^m x_0 + \sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j} g(x(j)). \quad (10-34)$$

接下来, 用 P^\pm 记在稳定, 不稳定子空间 $E^\pm(A)$ 上的投影. 此外, 记 $x_\pm = P^\pm x_0$ 和 $g_\pm(x) = P^\pm g(x)$.

关于 $x_0 = x_+ + x_-$ 使得 $x(m)$ 保持有界所需的条件是什么. 如果我们把和式方程的不稳定部分投影掉:

$$x_- = A^{-m} x_-(m) - \sum_{j=0}^{m-1} A^j g_-(x(j)), \quad (10-35)$$

并假设 $|x(m)|$ 对 $m \geq 0$ 有界, 可令 $m \rightarrow \infty$, 于是

$$x_- = - \sum_{j=0}^{\infty} A^{-j} g_-(x(j)), \quad (10-36)$$

其中和式收敛, 因为和式指数式衰减. 将它代回我们的方程, 并分别引入 $P(m) = P^+$, $m > 0$ 和 $P(m) = -P^-$, $m \leq 0$, 得到

$$x(m) = K(x)(m), \quad K(x)(m) = A^m x_+ + \sum_{j=0}^{\infty} A^{m-j} P(m-j) g(x(j)). \quad (10-37)$$

为了用迭代求解这个方程, 假设 $|x(m)| \leq \delta$, 则由于 g 的雅可比 (Jacobian) 矩阵在 0 为零, 我们有

$$\sup_{m \geq 0} |g(x(m)) - g(\tilde{x}(m))| \leq \varepsilon \sup_{m \geq 0} |x(m) - \tilde{x}(m)|, \quad (10-38)$$

其中, 可选择 δ 充分小使得 ε 为任意小. 由定理 2.1 解的存在性得知

$$\|A^{m-j} P(m-j)\| \leq C \alpha^{|m-j|}, \quad \alpha < 1. \quad (10-39)$$

如同微分方程情形, 我们得到

定理 10.5 (稳定流形) 假设 $f \in C^k$ 有不动点 p , 对应的雅可比 (Jacobian) 矩阵可逆. 则存在邻域 $U(p)$ 和函数 $h^\pm \in C^k(E^\pm(A), E^\mp(A))$ 使得

$$M^\pm(p) \cap U(p) = \{p + a + h^\pm(a) \mid a \in E^\pm \cap U\}. \quad (10-40)$$

两个 h^\pm 以及它们的雅可比 (Jacobian) 矩阵在 p 为零, 即, $M^\pm(p)$ 在 p 分别切于它们的线性像 $E^\pm(A)$. 此外, 对任何 $\alpha < \min\{|\alpha| \mid \alpha \in \sigma(A_+) \cup \sigma(A_-)^{-1}\}$, 以及某个依赖于 α 的 $C > 0$ 有

$$|f^m(x) - p| \leq C \alpha^{|m|}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad x \in M^\pm(p). \quad (10-41)$$

证明 证明类似于微分方程情形. 详细情形留给读者. \square

在双曲情形我们甚至可以稍微“多说几句”.

定理 10.6 假设 $f \in C^k$ 有双曲不动点 p , 在该点有可逆雅可比 (Jacobi) 矩阵. 则存在邻域 $U(p)$, 使得 $\gamma_{\pm}(x) \subset U(p)$, 当且仅当 $x \in M^{\pm}(p)$. 特别地,

$$W^{\pm}(p) = M^{\pm}(p). \quad (10-42)$$

证明 证明又一次如同微分方程情形. □

会发生从不动点 p_0 的不稳定流形出发的轨道终止于另一个不动点 p_1 的稳定流形的情况. 如果 $p_0 \neq p_1$, 这样的轨道称为**异宿轨道**, 如果 $p_0 = p_1$ 则称为**同宿轨道**.

注意, 如果我们用 f^n 代替 f , 同样考虑可用于不动点.

第 11 章 一维离散动力系统

11.1 倍周期

现在我们回到逻辑斯谛 (logistic) 方程, 并对 10.1 节开始的问题进行数值研究. 我们尝试对不同的 μ 值迭代一个给定的初值条件, 以便得到更完整的图像. 由于我们仅对渐近性态有兴趣, 故先迭代 200 次, 然后进行接下来的 100 次迭代.

```
In[1]: = BifurcationList[f - , x0 - , {μ - , μ0 - , μ1 - } , opts _ _ _ ] :=  
Block[ { Nmin , Nmax , Steps } ,  
Nmin , Nmax , Steps = { Nmin , Nmax , Steps } /. { opts } /.  
{ Nmin → 200 , Nmax → 300 , Steps → 300 } ;  
Flatten[  
Table[ Module[ { x } ,  
x = Nest[ f , x0 , Nmin ] ;  
Map[ { μ , # } & , NestList[ f , x , Mmax - Nmin ] ] ] ,  
{ μ , μ0 , μ1 , ( μ1 - μ0 ) / Steps } ] ,  
1 ] ] ;
```

结果显示在下面.

```
In[2]: = ListPlot[  
BifurcationList[ μ ( 1 - ) & , 0 , 4 , { μ , 2.95 , 4 } ] ,  
PlotStyle → { PointSize[ 0.002 ] } , PlotRange → All ,  
Axes → False ] ;
```

我们看到, 在某点吸引集刚好加倍, 且越来越复杂. 对这个图像我并不想讲得过多, 但是希望你确信这个简单系统的动力学事实上是十分复杂的. 按照上面的编码你可自由计算并尝试画出上面图像的某些更详细的部分.

特别我们看到, 存在 μ 的某些点, 那里动力系统的动力学定性改变. 这样的点称为系统的分支点.

第一个点是 $\mu = 1$, 在这点第二个不动点进入我们的区间 $[0, 1]$. 现在要问这种情况什么时候才会发生? 首先, 不动点是函数

$$g(x) = f(x) - x \tag{11-1}$$

的零点. 如果 f 可微, 则 g 可微, 由隐函数定理, 零点的个数只可能在 g 的零点, 使得 $g'(x) = 0$ 时才局部地改变. 在我们的逻辑斯谛 (logistic) 方程情形, 这导致

下面的系统

$$\begin{aligned} L_{\mu}(x) &= x + \mu x(1-x), \\ L'_{\mu}(x) &= 1 + \mu(1-2x). \end{aligned} \quad (11-2)$$

该系统仅有解 $x=0$ 和 $\mu=1$. 于是问在 $\mu=1$ 确切地会发生什么? 显然, 第二个不动点 $p=1-1/\mu$ 进入我们的区间. 由于 $L'_{\mu}(0)=\mu>1$, 不动点 0 不再是吸引的. 但是对 $1<\mu<3$, 由于 $L'_{\mu}(p)=2-\mu$, p 是吸引的. 此外, 对 $1<\mu\leq 3$, 我们期望 $W^s(0)=\{0,1\}$ 和 $W^s(p)=(0,1)$. 为了证明这一点, 首先我们有

$$\frac{L_{\mu}(x)-p}{x-p} = 1 - \mu x. \quad (11-3)$$

如果 $1<\mu\leq 2$, 对 $x\in(0,1)$, 上式右端在 $(-1,1)$

图 11-1

内. 因此 $x\in(0,1)$ 收敛于 p . 如果 $2<\mu\leq 3$, 右端仅对 $x\in\left(0, \frac{2}{\mu}\right)$ 在 $(-1,1)$ 内. 如果 x 对所有的迭代都位于这个区域, 则它将收敛于 p . 否则, 经几次迭代后有 $x\in\left[\frac{2}{\mu}, 1\right]$. 接着一次迭代将在 $\left[0, 2-\frac{4}{\mu}\right]$ 内, 特别在 p 的下面. 再下一个迭代我们还在 p 的下面直到达 $\left[\frac{1}{\mu}, p\right]$. 在这种情形下, 考虑二次迭代, 它满足

$$\frac{L_{\mu}^2(x)-p}{x-p} = (1-\mu x)(1-\mu L_{\mu}(x)). \quad (11-4)$$

对 $x\in\left(\frac{1}{\mu}, p\right)$ 右端在 $(-1,1)$ 内, 得知 $L_{\mu}^{2n}(x)\rightarrow p$. 因此, 我们也有 $L_{\mu}^{2n+1}(x)\rightarrow L_{\mu}(p)=p$, 从而对所有的 $x\in(0,1)$ 有 $L_{\mu}^n(x)\rightarrow p$.

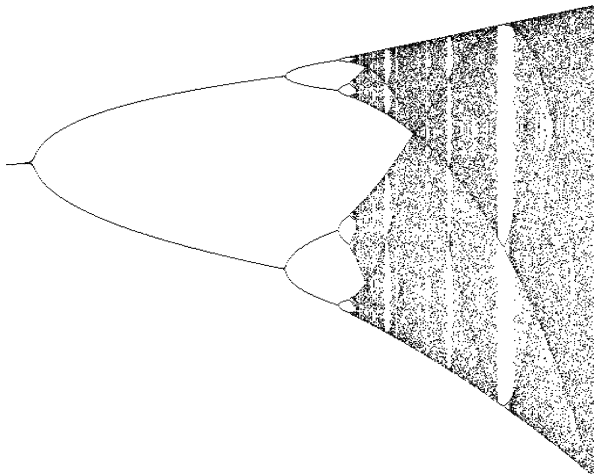
现在对 $\mu>3$ 会发生什么情况? 由于对 $\mu>3$ 我们有 $L'_{\mu}(p)=2-\mu<-1$, 不动点 p 不再是吸引的. 此外, 由我们的数值研究显示, 应该存在周期为 2 的周期轨道. 事实上求解方程

$$L_{\mu}^2(x) = x \quad (11-5)$$

得知, 对 $\mu>3$, 除了不动点还存在周期轨道

$$p_{\pm} = \frac{1+\mu \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}. \quad (11-6)$$

此外, 对 $3<\mu<1+\sqrt{6}$, 我们有 $(L_{\mu}^2)'(p_{\pm}) = L'_{\mu}(p_{+})L'_{\mu}(p_{-}) = 4+2\mu-\mu^2$ 在 $(-1,$



1) 内. 因此, 吸引不动点 p 被吸引周期轨道 p_+, p_- 所代替. 这个现象就是熟知的倍周期. 我们的数值分支图显示这个过程可继续. 吸引的周期 2 轨道在 $\mu = 1 + \sqrt{6}$ 被吸引的周期 4 轨道所代替 (f^2 的倍周期分支) 等. 显然, 由于出现的多项式的次数太高, 对所有这些点我们没有可能再解析地进行计算.

因而, 为了尝试更好地理解倍周期分支. 假设我们有依赖于参数 μ 的映射 $f: I \rightarrow I$. 假设在 μ_0 , $f^2(x) - x$ 零点个数在 p 局部地改变, 即假设存在两个新零点 $p_{\pm}(\mu)$, 使得 $p_{\pm}(\mu_0) = p$ 和 $f(p_{\pm}(\mu_0)) = p_{\mp}(\mu)$. 由 f 的连续性, 必须有 $f([p_-(\mu), p_+(\mu)]) \supseteq [p_-(\mu), p_+(\mu)]$, 因此必须存在不动点 $p(\mu) \in [p_-(\mu), p_+(\mu)]$. 所以不动点 p 保持. 这应该仅在 $f'(p) \neq 1$ 时才发生. 但由于我们必须有 $(f^2)'(p) = f'(p)^2 = 1$, 由此得知 $f'(p) = -1$.

综上所述, 周期为 2 的轨道, 一般仅在使得 $f'(p) = -1$ 的不动点处才出现.

注意, 在上面的论述中我们证明了周期 2 轨道的存在导致周期 1 轨道的存在. 事实上, 下一节我们将说明更强的结果也成立.

11.2 Sarkovskii 定理

这一节我们要证明对连续映射 $f: I \rightarrow I$, 有某些周期将导致有其他周期, 其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是某个紧区间. 作为第一个结果, 我们将证明周期 3 将导致其他一切周期.

引理 11.1 假设 $f: I \rightarrow I$ 是连续映射, 且有周期 3 轨道. 则对所有 $n \in \mathbb{N}$, 它也有 (原始) 周期 n 轨道.

证明 证明基于下面两个基本事实 (问题 11.1):

(1) 如果 I, J 是两个满足 $f(J) \supseteq I$ 的紧区间, 则存在 J 的子区间 J_0 , 使得 $f(J_0) = I$.

(2) 如果 $f(J) \supseteq I$, 则在 J 中存在不动点.

设 $a < b < c$ 是周期 3 轨道. 假设 $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ 的情形类似). 记 $I_0 = [a, b], I_1 = [b, c]$, 注意到, $f(I_0) \supseteq I_1, f(I_1) \supseteq I_0 \cup I_1$.

令 $J_0 = I_1$ 并回忆 $f(J_0) = f(I_1) \supseteq I_1 = J_0$. 由 (1) 我们可以找到子区间 $J_1 \subseteq J_0$ 使得 $f(J_1) = J_0$. 此外, 由于 $f(J_1) = J_0 \supseteq J_1$, 我们可以按此过程迭代, 得套集序列 $J_k, k = 0, \dots, n$, 使得 $f(J_k) = J_{k-1}$. 特别, 有 $f^n(J_n) = J_0 \supseteq J_n$, 因此, 由 (2) f^n 在 J_n 中有不动点. 唯一问题是这个点的原始周期是否是 n ? 很遗憾, 由于所有的迭代在 I_1 内, 我们可能永远得到 f 相同的不动点. 为了保证这种情形不会发生, 需要对在第 $(n-1)$ 步到 I_0 然后再回到 I_1 作仔细分析.

所以令 $n > 1$, 并如前定义 $J_0 \supseteq \dots \supseteq J_{n-2}$. 现在看到, $f^{n-1}(J_{n-2}) = f(f^{n-2}(J_{n-2})) = f(I_1) \supseteq I_0$. 因此, 我们可以选择子区间 $J_{n-1} \subseteq J_{n-2}$ 使得 $f^{n-1}(J_{n-1}) = I_0$, 从而 $f^n(J_{n-1}) = f(I_0) \supseteq I_1$. 又存在子区间 $J_n \subseteq J_{n-1}$ 使得 $f^n(J_n) = I_1$. 因此存在 f^n 的

不动点 $x \in J_n$, 使得对 $j \neq n-1$ 有 $f^j(x) \in I_1$ 和 $f^{n-1}(x) \in I_0$. 此外, 如果对一切 j 有 $f^j(x) \in I_1$, 则 $f^{n-1}(x) = b$ 与 $a = f^{n+1}(x) = f(x) \in I_1$ 矛盾. x 的原始周期不可能是 $n-1$, 因为 $f^{n-1}(x) \in [a, b)$, 且如果它小于 $n-1$, 则所有的迭代将停留在 I_1 的内部, 矛盾. 故原始周期为 n , 这是我们要证明的. \square

逻辑斯谛 (logistic) 映射 L_μ 的第一个周期 3 轨道什么时候出现? 对 $\mu = 4$, 用 Mathematica 求解方程 $L_\mu^3(x) = x$, 显示存在两个周期 3 轨道. 其中一个是

$$\left\{ \frac{1}{2}(1+c), 1-c^2, 4c^2(1-c^2) \right\}, \quad c = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right), \quad (11-7)$$

另一个有点复杂. 由于对 $0 \leq \mu \leq 3$ 没有周期 3 轨道, $L_\mu^3(x) - x$ 的零点集必须局部变更. 因此, 我们需要研究方程系统 $L_\mu^3(x) = x, (L_\mu^3)'(x) = 1$ 的解. 将这个方程输入 Mathematica 得出的轨道解有点复杂, 但是对 $\mu = 1 + 2\sqrt{2} = 3.828$ 得到的解比较简单. 由于这是对 $\mu \in \mathbb{R}$ 异于 $x = 0, \mu = 1$ 的仅有的解, 我们知道对 $\mu \geq 1 + 2\sqrt{2}$, 逻辑斯谛 (logistic) 方程有所有周期的轨道.

事实上, 这个结果只不过是 Sarkovskii 的更一般定理的特殊情形. 为此, 我们首先引入一个自然数很不常用的次序如下. 首先我们指出, 所有的整数可以写为 $2^m(2n+1)$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. 现在对所有的 $m \in \mathbb{N}_0$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 我们先就 m 对它们排列, 然后对相同 m 按照 n 增加一个次序排列. 就是说, 如果由 $>$ 记 Sarkovskii 次序, 我们有

$$3 > 5 > \dots > 2 \cdot 3 > 2 \cdot 5 > \dots > 2^m(2n+1) > \dots > 2^2 > 2 > 1 \quad (11-8)$$

利用这个记号下面的结果成立.

定理 11.2 (Sarkovskii) 假设 $f: I \rightarrow I$ 连续且有周期 m 的轨道. 则对所有 $m > n$, 它也有原始周期为 n 的轨道.

证明的精神与引理 11.1 相似, 但十分冗长乏味. 因此, 我们在这里就省略了. 你可以在 (例如) 参考文献 [24] 中找到其证明.

问题 11.1 从引理 11.1 的证明求证事实 (1) 和 (2).

11.3 关于混沌的定义.

这一节我们要确定, 什么时候我们考虑的离散动力系统是混沌的. 我们回到我们的抽象方法, 在距离空间 M 中考虑连续映射 $f: M \rightarrow M$.

从一开始我们就很清楚, 定义混沌是件困难的事. 因此, 就不奇怪不同的作者用不同的定义. 但是在给出定义之前, 我们对这个问题先反省一下.

首先, 你当然同意, 混沌系统应该具有对初始条件的敏感性. 就是说, 应该存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $x \in M$ 和任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in M$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $d(x, y) < \varepsilon$ 和 $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

但是, 例子

$$M = (0, \infty), \quad f(x) = (1 + \mu)x, \quad \mu > 0 \quad (11-9)$$

具有对初始条件的敏感性, 但是明确地说, 这不应该认为是混沌的, 因为上面例子的所有迭代都趋于无穷. 为了排除这个情况就得引入另一个条件.

如上的映射 f 称为是**拓扑传递**的, 如果对任何给定的开集 $U, V \subseteq M$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. 注意, 如果系统含有稠密轨道, 那它是传递的 (问题 11.2).

在 Robinson 的书^[24]中, 称具有这两个性质的系统为混沌的. 但是, 我们仍将考虑另外的定义, 因为这个定义有点倒退. 它包括 M 的距离结构, 因此拓扑等价性下的性质不保持. 两个动力系统 $(M_j, f_j), j = 1, 2$, 称为**拓扑等价**, 如果存在同胚 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, 使得下面的图可交换:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_2 \end{array} \quad (11-10)$$

显然, $p_2 = \varphi(p_1)$ 是 f_2 的周期 n 的周期点, 当且仅当 p_1 是 f_1 的周期点. 此外, 我们有 $W^s(p_2) = \varphi(W^s(p_1))$, 且所有的拓扑性质 (例如传递性) 对一个系统成立, 当且仅当它们对另一个系统也成立.

另一方面, 含有距离结构的性质可能不保持. 例如, 取 $\varphi = x^{-1}$, 则上面的例子映为系统

$$M = (0, \infty), \quad f(x) = (1 + \mu)^{-1}x, \quad \mu > 0, \quad (11-11)$$

它不再对初始条件具有敏感性. (注意, 这里的问题是 M 不是紧的. 如果 M 是紧的, 则 f 一致连续, 且对初始条件的敏感依赖性得到保持.)

因此, 我们将用下面属于 Devaney^[7]的混沌定义. 一个 f 连续, M 如上为无限的离散动力系统 (M, f) 称为**混沌**的, 如果它是传递的且周期轨道稠密. 如果 M 是有限且传递, 不难看到, 它是由单个周期轨道组成.

下面的引理指出, 混沌动力系统具有对初始条件的敏感依赖性.

引理 11.3 假设 $f: M \rightarrow M$ 是混沌的, 则它具有对初始条件的敏感依赖性.

证明 首先我们看到存在数 8δ , 使得对所有 $x \in M$ 存在周期点 $q \in M$, 它的轨道与 x 的距离至少是 4δ . 事实上, 由于 M 不是有限的, 我们可以取不相交轨道的两个周期点 q_1 和 q_2 . 设 8δ 是这两个轨道之间的距离. 于是由三角不等式, 至少从一个轨道到 x 的距离必须大于 4δ .

固定 $x \in M$ 和 $\varepsilon > 0$, 令 q 是具有距离至少是 4δ 的周期轨道. 不妨假设 $\varepsilon < \delta$. 由于周期轨道稠密, 存在周期 n 的周期点 $p \in B_\varepsilon(x)$.

我们的思路如下. 由传递性存在接近于 x 的 y , 它经 k 次迭代接近于 q . 现在另外迭代 j 次使得 $k+j$ 是 n 的倍数. 由于 $0 \leq j < n$ 是小数, $f^{k+j}(y) = p$ 仍接近于 q 的

轨道. 因此, $f^{k+j}(y)$ 离开 x 而 $f^{k+j}(p) = p$ 接近于 x . 由于 $f^{k+j}(x)$ 不能彼此接近, 我们有对初始条件的敏感依赖性.

现在来详细说明. 令 $V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$ (即由 $z \in V$ 得知, 对 $0 \leq i < n$ 有 $f^i(z) \in B_\delta(f^i(q))$). 由传递性, 存在 $y \in B_\varepsilon(x)$ 使得 $f^k(y) \in V$, 因此 $f^{k+j}(y) \in B_\delta(f^j(q))$. 现在由三角不等式和 $f^{k+j}(p) = p$ 我们有

$$\begin{aligned} d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(y)) &\geq d(x, f^j(q)) - d(f^j(q), f^{k+j}(y)) - d(p, x) \\ &> 4\delta - \delta - \delta = 2\delta. \end{aligned} \quad (11-12)$$

因此, 或者 $d(f^{k+j}(y), f^{k+j}(x)) > \delta$, 或者 $d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(x)) > \delta$, 这就是我们要证的. \square

现在我们已经定义了什么是混沌动力系统, 但是我们还没有看到它! 事实上, 我们期望在 $\mu = 4$ 的逻辑斯谛 (logistic) 映射是混沌的.

为看到这一点, 利用拓扑等价性通过帐篷映射

$$M = [0, 1], \quad T_\mu(x) = \frac{\mu}{2}(1 - |2x - 1|) \quad (11-13)$$

取便道. 由同胚 $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2$, 帐篷映射 T_2 等价于逻辑斯谛 (logistic) 映射 L_4 (问题 11.3). 因此, 一旦我们证明 T_2 是混沌的, 就得知 L_4 是混沌的.

T_2 的主要好处是它的迭代容易计算. 利用

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (11-14)$$

不难验证

$$T_2^n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2j, & \frac{2j}{2^n} \leq x \leq \frac{2j+1}{2^n} \\ 2(j+1) - 2^n x, & \frac{2j+1}{2^n} \leq x \leq \frac{2j+2}{2^n} \end{cases}_{0 \leq j \leq 2^{n-1}-1}. \quad (11-15)$$

此外, 每一个区间 $I_{n,j} = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$ 在 T_2^n 作用下映到 $[0, 1]$. 因此, 每一个区间 $I_{n,j}$ (确切地) 包含 $T_2^n(x) = x$ 的一个解, 故周期点稠密. 对给定的 $x \in [0, 1]$ 以及 $\varepsilon > 0$, 我们可以找到 n, j , 使得 $I_{n,j} \subset B_\varepsilon(x)$. 从而, $T_2^n(B_\varepsilon(x)) = [0, 1]$, 这证明 T_2 是传递的. 因而, 这个系统是混沌的. 也不难直接证明, T_2 对初始条件的敏感依赖性 (练习).

假设 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 并设 f 分别在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增, 递减. 我们要问是不是任何这样的映射都有类似的性质? 是不是这样的映射总是混

沌的?

问题 11.2 求证具有稠密轨道的闭不变集是拓扑传递的.

问题 11.3 求证 T_2 和 L_4 通过映射 $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2$ 拓扑等价. (即, 证明 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是同胚, 且 $\varphi \circ T_2 = L_4 \circ \varphi$).

11.4 康托尔 (Cantor) 集与帐篷映射

现在我们进一步研究 $\mu > 2$ 时的帐篷映射. 遗憾的是, 这时 T_μ 不再将 $[0, 1]$ 映为它自己. 因此必须考虑它作为 \mathbb{R} 上的映射,

$$M = \mathbb{R}, \quad T_\mu(x) = \frac{\mu}{2}(1 - |2x - 1|). \quad (11-16)$$

不难证明, 如果 $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, 则 $T_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. 从而, 大部分点将跑向 $-\infty$. 不过, 在 $[0, 1]$ 上仍有一些点在所有的迭代下仍停留在 $[0, 1]$ (例如 0 和 1). 但问题是我们如何才能够找到这些点?

设 $\Lambda_0 = [0, 1]$. 于是在一次迭代下映为 Λ_0 的点由 $\left(\frac{1}{\mu}\Lambda_0\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\mu}\Lambda_0\right)$ 给出, 记这个集合为

$$\Lambda_1 = \left[0, \frac{1}{\mu}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\mu}, 1\right]. \quad (11-17)$$

因为在 $\left(\frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu}\right)$ 中的点经一次迭代都映到 $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, 故 $\mathbb{R} \setminus \Lambda_1$ 中所有的点都跑向 $-\infty$.

类似地, 在一次迭代下映到 Λ_1 的点是 $\left(\frac{1}{\mu}\Lambda_1\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\mu}\Lambda_1\right)$. 因此, 相应的集合

$$\Lambda_2 = \left[0, \frac{1}{\mu^2}\right] \cup \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}, \frac{1}{\mu}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\mu^2}, 1\right] \quad (11-18)$$

具有从这个集合开始的点经两次迭代仍留在 $[0, 1]$ 中的性质. 由归纳法, 我们得到集合 $\Lambda_n = \left(\frac{1}{\mu}\Lambda_{n-1}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\mu}\Lambda_{n-1}\right)$, 它有从其中开始的点至少经 n 次迭代仍留在 $[0, 1]$ 中的性质. 此外, 每一个集合 Λ_n 是由 2^n 个长度为 μ^{-n} 的闭子区间所组成.

现在, 如果我们要求它们留在 $[0, 1]$ 中, 就必须取所有这些集合的交, 就是说, 定义

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n \subset [0, 1]. \quad (11-19)$$

由于集合 Λ_n 构成紧集套序列, 集合 Λ 也是紧且非空的. 由 Λ 的构造它是不变的, 因为我们有

$$T_\mu(\Lambda) = \Lambda, \quad (11-20)$$

且在开集 $\mathbb{R} \setminus \Lambda$ 中的所有点都收敛于 $-\infty$.

此外, 由于 Λ_n 的子区间的端点就是 $f^{-n}(\{0, 1\})$, 且我们看到这些点在 Λ 内. 现在集合 Λ 有两个更有趣的性质. 首先它是**全不连通的**, 即它不包含开区间. 事实上, 这是容易得知的, 因为它的勒贝格 (Lebesgue) 测度 $|\Lambda| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (2/\mu)^n = 0$ 为零. 第二, 它是**完满的**, 即它的每一点都是聚点. 这也不难看出, 因为由 $x \in \Lambda$ 得知, 对每一个 n , x 必须位于 Λ_n 的某个子区间内. 由于这些子区间的端点在 Λ 内 (如前指出的) 且收敛于 x , 故点 x 是聚点.

全不连通的完满紧集称为**康托尔 (Cantor) 集**. 因此我们证明了:

引理 11.4 集合 Λ 是康托尔 (Cantor) 集.

这个结论也并不奇怪, 因为它的这个结构很像你从分析教程中知道的三分集的结构. 此外, 如果我们选择 $\mu = 3$, 我们就确切地得到康托尔 (Cantor) 三分集. 也许你还会想到, 这时如果我们将 x 写为三进制系统, 就可很方便地刻画它. 为此, 固定 $\mu = 3$, 将 x 写为

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0, 1, 2\}. \quad (11-21)$$

回想这个表达式不是唯一的, 因为我们有, 例如, $\frac{1}{3} = 0.1 = 0.0\bar{2}$, 或者 $\frac{2}{3} = 0.2 \dots = 0.1\bar{2} \dots$. 这里的 \bar{x} 表示对应的数字重复无限多次. 对我们来说, 较方便的是排除以 1 和 $1\bar{2}$ 结尾的表达式. 于是, 我们有 $\Lambda_n = \{x | x_j \neq 1, 1 \leq j \leq n\}$ (问题 11.5), 从而

$$\Lambda_n = \{x | x_j \neq 1, j \in \mathbb{N}\}. \quad (11-22)$$

此外, T_3 的作用也可以用记号

$$\begin{cases} x_1 = 0 & \Rightarrow T_3(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_{n+1}}{3^n}, \\ x_1 = 1 & \Rightarrow T_3(x) \notin [0, 1], \\ x_1 = 2 & \Rightarrow T_3(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x'_{n+1}}{3^n} \end{cases} \quad (11-23)$$

明显地刻画, 其中 $x'_n = 2 - x_j$ (即 $0' = 2, 1' = 1, 2' = 0$). 遗憾的是, 这个刻画仍有些退却. 首先, 我们不可能从观察前面 n 个数位就分辨两个很接近的点 x, y , 其次有一点烦的是 T_3 并不是简单地调换了序列 x_n 的次序. 最后, 它仅仅对 $\mu = 3$ 有效.

为此, 我们仍回到任意 $\mu > 2$, 并看看是否可以做得更好一点. 设 $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$

是只取 0 和 1 值的序列集.

令 $I_0 = \left[0, \frac{1}{\mu}\right]$, $I_1 = \left[1 - \frac{1}{\mu}, 1\right]$, 定义旅程映射

$$\varphi: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$$

$$x \mapsto x_n = j \quad \text{如果} \quad T_\mu^n(x) \in I_j. \quad (11-24)$$

于是, φ 有定义且 T_μ 对 x_n 的作用刚好是简单的移位. 就是说, 如果我们引入移位映射 $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, $(x_0, x_1, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots)$, 则有 $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ T_\mu$, 这看上去好像 (Λ, T_μ) 和 (Σ_2, σ) 之间有拓扑等价性. 但在验证它之前我们还需要一些进一步的定义.

首先, 我们需要确认 (Σ_2, σ) 是一个动力系统. 因此需要在 Σ_2 上引入距离. 我们取的距离如下:

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \quad (11-25)$$

(证明这事实上是距离). 其次, 需要确认 σ 连续. 不过由于

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq 2d(x, y), \quad (11-26)$$

立刻得知 σ 甚至是一致连续的.

因而, 余下的我们只需证明 φ 是同胚.

现在开始回到 Λ_n 的构造. 如果令 $I = [0, 1]$, 我们看到, Λ_1 是由两个子区间 $I_0 = \frac{1}{\mu}I$ 和 $I_1 = 1 - \frac{1}{\mu}I$ 组成. 用归纳法我们得到, 集合 Λ_n 是由 2^n 个子区间 $I_{s_0, \dots, s_{n-1}}$,

$s_j \in \{0, 1\}$ 组成, 它们由 $I_{0, s_0, \dots, s_n} = \frac{1}{\mu}I_{s_0, \dots, s_n}$ 和 $I_{1, s_0, \dots, s_n} = 1 - \frac{1}{\mu}I_{s_0, \dots, s_n}$ 递归定义. 注意,

$$T_\mu(I_{s_0, \dots, s_n}) = I_{s_1, \dots, s_n}.$$

由构造我们有 $x \in I_{s_0, \dots, s_n}$, 当且仅当对 $0 \leq i \leq n$, 有 $\varphi(x)_i = s_i$. 现在取序列 $s \in \Sigma_2$, 并考虑区间套的交

$$I_s = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_{s_0, \dots, s_n}. \quad (11-27)$$

由紧集的有限交性质, 它是非空的区间, 因此, φ 是映上的. 由 $|I_{s_0, \dots, s_n}| = \mu^{-n-1}$, 它的长度是零, 因此它只能包含一点, 这就是说, φ 是一个单射.

如果 x 和 y 接近, 则由 T_μ 的连续性, $T_\mu(x)^n$ 和 $T_\mu(y)^n$ 也接近. 因此, 对充分接近 x 的 y , 前 n 次迭代也将充分接近, 使得对 $0 \leq j \leq n$, 有 $x_j = y_j$. 但是由此得知, $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 接近, 因此 φ 连续. 类似地, 由 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 接近, 得知前 n 项相等. 因此 $x, y \in I_{x_0, \dots, x_n} = I_{y_0, \dots, y_n}$ 接近, 故 φ^{-1} 连续.

综上所述, 我们得到:

定理 11.5 两个动力系统 (Λ, T_μ) , $\mu > 2$ 和 (Σ_2, σ) 通过同胚 $\varphi: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ 是拓扑等价的.

因此, 为了了解 $\mu > 2$ 时的帐篷映射, 所有需要做的是研究在 Σ_2 上的移位映射 σ . 事实上, 我们将在下一节证明 (Σ_2, σ) , 从而, (Λ, T_μ) , $\mu > 2$ 是混沌的.

问题 11.4 求证两个不同的三进制展开式定义同一个数 $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n 3^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n 3^{-n}$, 当且仅当存在某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得对 $n < n_0$ 有 $x_j = y_j$, 对 $n = n_0$ 有 $x_j = y_j \pm 1$ 以及对 $n > n_0$ 有 $x_j = y_j \mp 2$. 求证如果展开式排除以 1 或者 $1\bar{2}$ 结尾, 则每个 $x \in [0, 1]$ 有唯一展开式.

问题 11.5 求证对 $\mu = 3$ 我们有 $\Lambda_n = \{x \mid x_j \neq 1, 1 \leq j \leq n\}$, 其中 x_j 是如上一个问题中的三进制展开式中的数字.

11.5 符号动力学

上一节的考虑已经显示, 有限多个符号的序列空间上的移位映射隐含着帐篷映射. 这对其他系统也成立. 因此, 这值得进一步研究, 现在我们就来做这件事.

设 $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, 定义 N 个符号的空间

$$\Sigma_N = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}_0} \quad (11-28)$$

为仅取值 $0, \dots, N-1$ 的序列集. 注意 Σ_N 是不可数的 (为什么?)

定义

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{|x_n - y_n|}{N^n}, \quad (11-29)$$

于是 Σ_N 变成一个距离空间. 注意到两点 x 和 y 接近, 当且仅当它们前面的 n 个值重合. 更确切地说:

引理 11.6 如果对所有 $j \leq n$ 有 $x_j = y_j$, 则我们有 $d(x, y) \leq N^{-n}$, 以及, 如果至少对一个 $j \leq n$ 有 $x_j \neq y_j$, 则我们有 $d(x, y) \geq N^{-n}$.

证明 假设对所有 $j \leq n$ 有 $x_j = y_j$, 则

$$d(x, y) = \sum_{j > n} \frac{|x_j - y_j|}{N^j} \leq \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{j \geq 0} \frac{N-1}{N^j} = \frac{1}{N^n}. \quad (11-30)$$

反之, 如果至少对一个 $j \leq n$ 有 $x_j \neq y_j$, 则我们有

$$d(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{N^k} \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^n}. \quad (11-31)$$

□

首先我们证明 Σ_N 是康托尔 (Cantor) 集, 就是说它是紧的, 完满的以及全不连通的. 这里一个拓扑空间 M 称为全不连通, 如果对任何两点 x 和 y , 存在互不相交的开邻域 U 和 V , 使得 $U \cup V = M$. 我们把它留作练习, 让你证明这个定义等价于我们前面对实直线子集的有关定义 (问题 11.6).

引理 11.7 集合 Σ_N 是康托尔 (Cantor) 集.

证明 首先证明 Σ_N 是紧的. 我们需要证明每一个序列 x_n 包含收敛的子序列.

给定 x^n , 可找子序列 $x^{0,n}$, 使得对所有 n , $x^{0,n}$ 是相同的. 归纳地, 我们得到子序列 $x^{m,n}$, 使得, 若 $0 \leq k \leq j \leq m$, 则 $x_k^{j,n} = x_k^{m,n}$ 对所有 n 是相同的. 现在看到 $x^{m,n}$ 是收敛子序列, 因为对所有 $j \leq \min(m, n)$ 有 $x_j^{j,n} = x_j^{m,m}$.

为了看到 Σ_x 是丰满的, 固定 x 并定义 x^n , 使得对 $0 \leq j \leq n$, 有 $x_j^n = x_j$, 和 $x_{n+1}^n \neq x_{n+1}$. 因此, $x \neq x^n$ 且 x^n 收敛于 x .

为了看到 Σ_N 是全不连通的, 注意到映射 $\delta_{j_0}: \Sigma_N \rightarrow \{0, \dots, N-1\}$, $x \mapsto x_{j_0}$ 连续. 因此, 对固定的 j_0 和 c , 集合 $U = \{x \mid x_{j_0} = c\} = \delta_{j_0}^{-1}(c)$ 是开的, 故 $V = \{x \mid x_{j_0} \neq c\}$ 也是开的. 现在令 $x, y \in \Sigma_N$, 如果 $x \neq y$, 则存在 j_0 , 使得 $x_{j_0} \neq y_{j_0}$. 取 $c = x_{j_0}$, 于是由上面的讨论知道, U 和 V 是互不相交的开集, 其并是 Σ_N , 它分别包含 x 和 y . \square

在 Σ_N 上我们有移位映射

$$\begin{aligned} \sigma: \Sigma_N &\rightarrow \Sigma_N \\ (x_0, x_1, \dots) &\mapsto (x_1, x_2, \dots), \end{aligned} \quad (11-32)$$

它是一致连续的, 因为

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq Nd(x, y). \quad (11-33)$$

进一步, 我们现在将证明它是混沌的. 注意到, 点 x 是 σ 的周期点, 当且仅当它是一个周期序列.

引理 11.8 移位映射有可数多个稠密的周期点.

证明 由于满足 $\sigma^n(x) = x$ 的序列由它前面 n 个系数唯一确定, 从而这个方程恰有 N^n 个解. 因此存在可数多个周期轨道. 此外, 如果 x 给定, 我们可以用 x 的前面 n 个系数然后周期地重复它们定义 x^n . 于是 x^n 是收敛于 x 的周期点序列. 从而周期点稠密. \square

引理 11.9 移位映射有稠密轨道.

证明 轨道构造如下. 以值 $0, \dots, N-1$ 开始作为前面的系数. 现在加入 $0, \dots, N-1$ 的所有 N^2 个两个数字的组合. 接下来加入所有 N^3 个三个数字的组合. 归纳地我们得到序列 x , 例如对 $N=2$ 我们必须取 $0, 1; 00, 01, 10, 11; \dots$, 即 $x = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots)$. 我们期望 x 的轨道是稠密的. 事实上, 设 y 给定. 由构造 y 的前面 n 个系数作为 x 的某处的一段出现. 因此, 可将 x 移位 k 次直到这段到达开始位置, 从而我们有 $d(y, \sigma^k(x)) \leq N^{-n}$, 因而这个轨道稠密. \square

结合这两个引理, 我们看到 (Σ_N, σ) 是混沌的. σ 对初始条件有敏感依赖性的直接证明留给读者作为练习.

在上一节我们已经看到, 可以证明许多动力系统 (或者某些子系统) 都拓扑等价于移位映射. 因此, 它是混沌映射的典型例子.

但是有时候也有必要只考虑 Σ_N 的某些子集, 因为它可能给出所给问题中仅允许的某些传递性. 例如, 上一节考虑的情形. 那里我们有 Σ_2 , 且对 $x \in \Sigma_2$, x_n 告诉我们或者 n 次迭代在 I_0 内, 或者在 I_1 内. 现在对不同的系统, 从 I_1 中出发的点

一旦进入 I_0 可能就永远回不到 I_1 . 换句话说, 0 永远不可能被 1 跟随. 这种情形可以用引入传递矩阵方便地说明.

传递矩阵 A 是 $N \times N$ 矩阵, 它所有的元素是 0 或 1. 如果 $A_{j,k} = 1$, 假设有偶 j, k 在序列 x 中只可能作为邻近元素出现. 则对应的子集记为

$$\Sigma_N^A = \{x \in \Sigma_N \mid A_{x_n, x_{n+1}} = 1 \text{ 对所有的 } n \in \mathbb{N}_0\}. \quad (11-34)$$

显然 σ 映 Σ_N^A 为它自身, 这时动力系统 (Σ_N^A, σ) 称为**有限型子移位**. 不难看出, Σ_N^A 是 Σ_N 的闭子集, 因此是紧的. 此外, 作为连续映射的限制, σ 在 Σ_N^A 上连续. 我们用 σ_A 记这个限制.

现在回到我们的例子. 在这里有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11-35)$$

很显然, 只允许先含有有限个 1 (可能没有), 然后仅有 0 的序列. 特别地, 除了 $x = (1, 1, 1, \dots)$, 所有点都是最终不动点, 并收敛于点 $x = (0, 0, 0, \dots)$. 故这个系统确定不是混沌系统. 所有其他可能性同样成立, 除了

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11-36)$$

在这种情形我们有 $\Sigma_N^A = \Sigma_2$. 因此, 我们需要另外的条件以保证子移位是混沌的.

转移矩阵称为**传递的**, 如果存在整数 $l \in \mathbb{N}$, 使得对一切 $0 \leq j, k \leq N-1$ 有 $(A^l)_{j,k} \neq 0$.

设 A 是转移矩阵. 我们称 (x_1, \dots, x_k) 是长度为 k 的**可允许段**, 如果对 $1 \leq j \leq k-1$ 有 $A_{x_j, x_{j+1}} = 1$. 下面的引理解释 A^l 的重要性.

引理 11.10 A^l 的 (j, k) 元素等于长度为 $l+1$ 的可允许段 (x_0, \dots, x_l) 的个数, 其中 $x_0 = j$ 和 $x_l = k$.

特别地, 长度为 l 的周期轨道的个数等于 $\text{tr}(A^l)$.

证明 注意到, A^l 的 (j, k) 元素是

$$(A^l)_{j,k} = \sum_{x_1, \dots, x_{l-1}} A_{j, x_1} A_{x_1, x_2} \cdots A_{x_{l-2}, x_{l-1}} A_{x_{l-1}, k}, \quad (11-37)$$

上面的乘积等于 1, 当且仅当段 $(j, x_1, \dots, x_{l-1}, k)$ 是可允许的. \square

特别地, 对传递的 A , 我们得到下面的简单结论, 它是证明传递子移位是混沌的关键因素.

推论 11.11 如果 A 是传递的, l 如上, 则存在可允许段 (x_1, \dots, x_{l-1}) , 使得对一切 $0 \leq j, k \leq N-1$, $(j, x_1, \dots, x_{l-1}, k)$ 是可允许段.

这条引理确保, 如果 A 是传递的, 则存在长度为 $l-1$ 的可允许段, 使得我们可以用可允许段的两端粘合的方法, 得到的段还是可允许的!

作为它的第一个应用, 我们证明:

引理 11.12 假设 A 是传递的, 则 Σ_N^A 是康托尔 (Cantor) 集.

证明 如我们先前指出的, Σ_N^A 是紧的. 此外, 作为全不连通集的子集是全不连通的. 现在令 $x \in \Sigma_N^A$ 已给定. 为了证明存在任意接近于 x 的点, 开始取前面 n 个系数并从推论 11.11 将长度为 $l-1$ 的可允许段加到末尾. 接下来将单个系数加到末尾, 使得所得的段不同于 x 对应的段. 最后, 将长度为 $l-1$ 的可允许段递归地填满这个序列. 选择大 n 使得所构造的点任意接近于 x , 证明完毕. \square

作为第二个应用, 我们证明 (Σ_N^A, σ) 是混沌的.

引理 11.13 假设 A 是传递的, 则在 Σ_N^A 上的移位映射有稠密的可数多个周期点.

证明 证明类似于上面证明的最后部分. 首先证明周期点是稠密的. 设 x 给定, 取前 n 个系数并从推论 11.11 将长度为 $l-1$ 的可允许段加到末尾. 现在取这个元素段并周期地重复它. 余下的证明是直接的. \square

引理 11.14 假设 A 是传递的, 则在 Σ_N^A 上的移位映射有稠密轨道.

证明 证明如同满移位的情形. 取长度为 $1, 2, 3, \dots$ 的所有可允许段, 并从推论 11.11 将它们中长度为 $l-1$ 的可允许段粘合在一起. \square

最后, 我们注意, 如果用 \mathbb{N} 代替 \mathbb{N}_0 , 类似的结论也成立. 设 $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, 并定义

$$\Sigma_N = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{Z}} \quad (11-38)$$

为仅取值 $0, \dots, N-1$ 的双向无穷序列. 定义

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{|x_n - y_n| + |x_{-n} - y_{-n}|}{N^n}, \quad (11-39)$$

于是 Σ_N 变成一个距离空间. 我们又一次有:

引理 11.15 如果对所有 $|j| \leq n$, 有 $x_j = y_j$, 则我们有 $d(x, y) \leq N^{-n}$, 以及, 如果对至少一个 $|j| \leq n$, 有 $x_j \neq y_j$, 则我们有 $d(x, y) \geq N^{-n}$.

移位映射 σ 的定义如前. 但是, 注意, 在这种情形 σ 可逆. 所有其他结果不用进一步修改而成立. 详细情形留给读者.

问题 11.6 求证这一节给出的全不连通集的定义与上一节对 \mathbb{R} 的子集给出的定义是相同的. (提示: 如果 $x, y \in M \subset \mathbb{R}$ 且 M 不包含开区间, 则在 x 和 y 之间存在 $z \notin M$).

问题 11.7 对两个符号的移位映射 (参看问题 10.7) 求证: 所有的点都是非游荡的, $Nwa(\sigma) = \Sigma_2$. 存在回归点不是周期点以及存在非游荡点不是回归点.

问题 11.8 离散动力系统 $f: M \rightarrow M$ 的 (阿廷 (Artin-Mazur)) ζ 函数定义为

$$\zeta_f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} |\text{Fix}(f^n)|\right),$$

其中 $|\text{Fix}(f^n)|$ 是 f^n 的不动点集的基数 (只要对每个 n 这个数有限). 等价地,

$|\text{Fix}(f^n)|$ 是周期为 n 的周期轨道的数目.

求证

$$\zeta_{\sigma_A}(z) = \frac{1}{\det(I - zA)}, \quad |z| < \|A\|.$$

(提示: 3.17)).

11.6 奇怪吸引子/奇怪排斥子与分形集

紧不变集 Λ , $f(\Lambda) = \Lambda$ 称为吸引的, 如果存在 Λ 的邻域 U , 使得对所有 $x \in U$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0$. 紧不变集 Λ , $f(\Lambda) = \Lambda$ 称为排斥的, 如果存在 Λ 的邻域 U , 使得对所有 $x \in U \setminus \Lambda$, 存在 n 满足 $f^n(x) \notin U$.

例如, 设 $f(x) = x^3$, 则 $\{0\}$ 是吸引集, $[-1, 1]$ 是排斥集. 为了排除上面例子中像 $[-1, 1]$ 的集合, 我们将引入另外的条件. 一个吸引集 (对应的排斥集) 称为吸引子 (对应的排斥子), 如果它是拓扑传递的.

如果 f 可微, 则存在判断什么时候不变集是吸引的 (对应的排斥的) 的简单准则.

定理 11.16 假设 $f: I \rightarrow I$ 连续可微, Λ 是紧不变集. 如果存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对所有 $x \in \Lambda$ 有 $|d(f^{n_0})_x| < 1$, 则 Λ 是吸引的. 类似地, 如果存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对所有的 $x \in \Lambda$ 有 $|d(f^{n_0})_x| > 1$, 则 Λ 是排斥的.

证明 我们仅证明第一个论断. 第二个类似. 选择 α 使得 $\max_{x \in \Lambda} |d(f^{n_0})_x| < \alpha < 1$. 对 Λ 中的每一个 y , 存在包含 y 的 (非空) 开区间 I_y , 使得对所有 $x \in I_y$ 有 $|d(f^{n_0})_x| \leq \alpha$. 现在令 U 是所有这些区间的并. 固定 $x \in U$, 而令 $y \in \Lambda$, 使得 $d(x, \Lambda) = |x - y|$. 于是, 由中值定理,

$$d(f^{n_0}(x), \Lambda) \leq |f^{n_0}(x) - f^{n_0}(y)| \leq \alpha |x - y| = \alpha d(x, \Lambda).$$

因此 $d(f^{n_0}(x), \Lambda) \rightarrow 0$, 又由 f 的连续性和 Λ 的不变性, 对 $0 \leq j \leq n_0$, 我们也有 $d(f^{n_0+j}(x), \Lambda) \rightarrow 0$. 从而, 论断得证. \square

上面的排斥集, 吸引集分别称为双曲排斥集和双曲吸引集.

吸引子和排斥子 Λ 称为是奇怪的, 如果动力系统 (Λ, f) 是混沌的, 且 Λ 是分形的.

我们已经知道第一个条件是什么意思, 但你或许还不知道什么是分形. 简短的回答是, 一个集合称为是分形的, 如果它的豪斯多夫 (Hausdorff) 维数不是整数. 但是, 由于你也许还不知道什么是豪斯多夫 (Hausdorff) 维数, 让我们给你详细回答.

首先我们略去所有的技术细节 (例如可在参考文献 [26] 中找到) 来解释什么是豪斯多夫 (Hausdorff) 测度.

回忆 \mathbb{R}^n 的 (非空) 子集 U 的直径定义为 $d(U) = \sup_{x, y \in U} |x - y|$. U 的覆盖 $\{V_j\}$ 称为 δ -覆盖, 如果它可数且对所有 j 有 $d(V_j) \leq \delta$.

对 \mathbb{R}^n 的子集 U 以及 $\alpha \geq 0, \delta > 0$ 我们定义

$$h_\delta^\alpha = \inf \left\{ \sum_j d(V_j)^\alpha \mid \{V_j\} \text{ 是 } \delta \text{ 的 } U \text{ 覆盖} \right\} \in [0, \infty] \quad (11-40)$$

当 δ 减少时允许覆盖的个数减少, 因此, 作为 δ 的函数 $h_\delta^\alpha(U)$ 增加. 从而极限

$$h^\alpha(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} h_\delta^\alpha(U) = \sup_{\delta > 0} h_\delta^\alpha(U) \quad (11-41)$$

存在. 此外, 不难证明, 如果 $U \subseteq V$, 则 $h^\alpha(U) \leq h^\alpha(V)$. 对可数并我们有

$$h^\alpha(\cup_j U_j) \leq \sum_j h^\alpha(U_j). \quad (11-42)$$

因此, h^α 是外测度, 所得的在博雷尔 (Borel) σ 代数[⊖]上的测度称为 α 维豪斯多夫 (Hausdorff) 测度. 对任何不相交集 U_j 的可数并, 如同任何测度, 它满足

$$h^\alpha(\phi) = 0,$$

$$h^\alpha(\cup_j U_j) = \sum_j h^\alpha(U_j). \quad (11-43)$$

例如, 考虑情形 $\alpha = 0$. 假设 $U = \{x, y\}$ 由两个点组成. 则对 $\delta \geq |x - y|$ 有 $h_\delta^0(U) = 1$, 对 $\delta < |x - y|$ 有 $h_\delta^0(U) = 2$. 特别地, $h^0(U) = 2$. 类似地, 不难看出, $h^0(U)$ 刚好是 U 中的点数. 在另一个极端, 可以证明 $h^n(U) = c_n / 2^n |U|$, 其中 $|U|$ 表示 U 的 Lebesgue 测度, $c_n = \pi^{n/2} / \Gamma(n/2 + 1)$ 是 \mathbb{R}^n 中的单位球的体积.

利用对 $\lambda > 0$ 映射 $\lambda: x \mapsto \lambda x$ 是 δ -覆盖和 (δ/λ) -覆盖之间的双射的事实, 容易得到关于豪斯多夫 (Hausdorff) 测度的标度化性质:

引理 11.17 设 $\lambda > 0$ 以及 U 是 \mathbb{R}^n 的博雷尔 (Borel) 集, 则

$$h^\alpha(\lambda U) = \lambda^\alpha h^\alpha(U). \quad (11-44)$$

此外, 豪斯多夫 (Hausdorff) 测度在赫尔德 (Holder) 一致连续映射下也具有很好的性质.

引理 11.18 假设 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 关于指数 $\gamma > 0$ 是赫尔德 (Holder) 一致连续, 即

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\gamma, \text{ 对所有 } x, y \in U, \quad (11-45)$$

则

$$h^\alpha(f(U)) \leq c^\alpha h^{\alpha\gamma}(U). \quad (11-46)$$

证明 一个简单的事实是, 对博雷尔 (Borel) 集 U 的每一个 δ -覆盖 $\{V_j\}$, 集合 $\{f(U \cap V_j)\}$ 是博雷尔 (Borel) 集合 $f(U)$ 的 $(c\delta^\gamma)$ -覆盖. \square

现在我们准备好了来定义豪斯多夫 (Hausdorff) 维数. 首先注意, h_δ^α 对 $\delta < 1$ 关于 α 不增, 因此对 h^α 也不增. 此外, 对 $\alpha \leq \beta$, 我们有 $\sum_j d(V_j)^\beta \leq \delta^{\beta-\alpha} \sum_j d(V_j)^\alpha$, 因此

⊖ 例如, 可参看张恭庆编写的泛函分析下册. 译者注.

$$h_{\delta}^{\beta}(U) \leq \delta^{\beta-\alpha} h_{\delta}^{\alpha}(U) \leq \delta^{\beta-\alpha} h^{\alpha}(U). \quad (11-47)$$

因而, 如果 $h^{\alpha}(U)$ 有限, 则对每一个 $\beta > \alpha$, 有 $h^{\beta}(U) = 0$. 故必须存在 α 的一个值, 在这个值, 集合的豪斯多夫 (Hausdorff) 测度从 ∞ 跳到 0. 这个值就称为豪斯多夫 (Hausdorff) 维数

$$\dim_H(U) = \inf \{ \alpha \mid h^{\alpha}(U) = 0 \} = \sup \{ \alpha \mid h^{\alpha}(U) = \infty \}. \quad (11-48)$$

可以证明, \mathbb{R}^n 的 m 维子流形的豪斯多夫 (Hausdorff) 维数仍是 m . 此外, 我们也不难看出, 有 $\dim_H(U) \leq n$ (问题 11.10).

当计算豪斯多夫 (Hausdorff) 维数时下面的观察是有用的. 首先, 豪斯多夫 (Hausdorff) 维数是单调的, 就是说, 对 $U \subseteq V$ 我们有 $\dim_H(U) \leq \dim_H(V)$. 此外, 如果 U_j 是博雷尔 (Borel) 集的 (可数) 序列, 则我们有

$$\dim_H(\cup_j U_j) = \sup_j \dim_H(U_j) \text{ (证明之).}$$

利用引理 11.18, 我们也可直接证明:

引理 11.19 假设 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 关于指数 γ 是赫德尔 (Holder) 一致连续, 即

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\gamma}, \quad \text{对一切 } x, y \in U, \quad (11-49)$$

则

$$\dim_H(f(U)) \leq \frac{1}{\gamma} \dim_H(U). \quad (11-50)$$

类似地, 如果 f 是双向利普希茨 (Lipschitz) 连续, 即

$$a|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq b|x - y|, \quad \text{对所有的 } x, y \in U, \quad (11-51)$$

则

$$\dim_H(f(U)) = \dim_H(U). \quad (11-52)$$

我们用计算帐篷映射 T_{μ} 的排斥子的豪斯多夫 (Hausdorff) 维数来结束本节.

定理 11.20 帐篷映射 T_{μ} 的排斥子 Λ 的豪斯多夫 (Hausdorff) 维数是

$$\dim_H(\Lambda) = \frac{\ln(2)}{\ln(\mu)}, \quad \mu \geq 2. \quad (11-53)$$

特别地, 它是奇怪吸引子.

证明 设 $\delta = \mu^{-n}$. 利用 δ 覆盖 $I_{s_0, \dots, s_{n-1}}$, 我们看到, $h_{\delta}^{\alpha}(\Lambda) \leq \left(\frac{2}{\mu^{\alpha}}\right)^n$. 因此, 对 $\alpha = d = \ln(2)/\ln(\mu)$ 有 $h_{\delta}^d(\Lambda) \leq 1$, 故 $\dim_H(\Lambda) \leq d$.

反向不等式的证明有点困难. 设 $\{V_j\}$ 是一个覆盖. 假设 $\mu > 2$ (因为对 $\mu = 2$ 我们刚好有 $\Lambda = [0, 1]$), 以及 $\delta < 1 - 2\mu^{-1}$. 显然, 不妨假设所有的 V_j 是开区间. 此外由紧性, 有限个这样的集合覆盖了 Λ . 去掉所有其他区间并固定 j . 进一步, 增大每个区间 V_j 至多 ε .

对 V_j 存在 k , 使得

$$\frac{1 - 2\mu^{-1}}{\mu^k} \leq |V_j| < \frac{1 - 2\mu^{-1}}{\mu^{k-1}}. \quad (11-54)$$

由于 Λ_k 中两个区间之距离至少是 $\frac{1-2\mu^{-1}}{\mu^{k-1}}$, 我们至多可以与这样的一个区间相交.

对 $n \geq k$, 我们看到, V_j 至多与 Λ_n 的 $2^{n-k} = 2^n (\mu^{-k})^d \leq 2^n (1-2\mu^{-1})^{-d} |V_j|^d$ 个区间相交.

现在选择 n 大于所有的 k (对所有 V_j). 由于 $\{V_j\}$ 覆盖了 Λ , 它们必须与 Λ_n 中的所有 2^n 个区间相交, 因此, 最后得到

$$2^n \leq \sum_j \frac{2^n}{(1-2\mu^{-1})^d} |V_j|^d, \quad (11-55)$$

它与我们第一个估计一起, 得

$$\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)^d \leq h^d(\Lambda) \leq 1. \quad (11-56)$$

□

注意到, 我们也可通过对 α 求解下面等式

$$\begin{aligned} h^\alpha(\Lambda) &= h^\alpha(\Lambda \cap I_0) + h^\alpha(\Lambda \cap I_1) = 2h^\alpha(\Lambda \cap I_0) \\ &= \frac{2}{\mu^\alpha} h^\alpha(T_\mu(\Lambda \cap I_0)) = \frac{2}{\mu^\alpha} h^\alpha(\Lambda), \end{aligned} \quad (11-57)$$

从豪斯多夫 (Hausdorff) 测度的标度化性质形式地推导这个结果. 但是, 这只有我们已经知道了对某 α 有 $0 < h^\alpha(\Lambda) < \infty$ 时才有可能.

问题 11.9 设 $C = [0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. 证明 $h^1(C) = 1$.

问题 11.10 求证, 对每一个 $U \subseteq \mathbb{R}^n$, 有 $\dim_H(U) \leq n$. (提示: 对 U 只需取单位立方体. 现在将 U 分解成边长为 $1/k$ 的 k^n 个立方体).

11.7 作为混沌源的同宿轨道

在这一节我们要证明, 对其他映射可与帐篷映射类似地考虑. 我们从对 $\mu > 4$ 的逻辑斯谛 (logistic) 映射开始. 如同对帐篷映, 不难证明, 如果 $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, 则 $L_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. 因此, 大部分点将跑向 $-\infty$, 我们要找对所有迭代都停留在 $[0, 1]$ 中的点.

令 $A_0 = [0, 1]$, 则 $A_1 = L_\mu^{-1}(A_0)$ 是由

$$A_1 = I_0 \cup I_1 = [0, G_\mu(1)] \cup [1 - G_\mu(1), 1] \quad (11-58)$$

给出, 其中

$$G_\mu(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{\mu}}, \quad L_\mu(G_\mu(x)) = x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (11-59)$$

为使我们的工作变得容易些, 将作额外假设

$$L'_\mu(x) = \mu(1-2x) \geq \alpha > 1, \quad \text{对 } x \in I_0. \quad (11-60)$$

由于我们有

$$\sqrt{\mu(4-\mu)} = L'_\mu(G_\mu(1)) \leq |L'_\mu(x)| \leq L'_\mu(0) = \mu, \quad x \in I_0 \cup I_1, \quad (11-61)$$

故 $\mu > 2 + \sqrt{5} = 4.236$. $\mu > 4$ 的一般情形可在 Robinson 的书^[23]中找到.

现在, 如同对帐篷映射情形的讨论, 我们看到, 存在包含 2^n 个通过 $I_{0, s_0, \dots, s_n} = G_\mu(I_{s_0, \dots, s_n})$ 和 $I_{1, s_0, \dots, s_n} = 1 - G_\mu(I_{s_0, \dots, s_n})$ 递归定义的子区间 $I_{s_0, \dots, s_{n-1}}$, $s_j \in \{0, 1\}$ 组成的嵌套集序列 Λ_n . 唯一的区别是, 由于 L_μ 不是 (逐段) 线性, 我们并不知道区间 $I_{s_0, \dots, s_{n-1}}$ 的长度. 但是, 由假设 (11-60) 我们知道, $G'_\mu(x) \leq \alpha^{-1}$, 因此, $|I_{s_0, \dots, s_{n-1}}| \leq G_\mu(1) \alpha^{-n}$. 但这是我们已经对帐篷映射所用过的一切, 因此通过同样的证明可得:

定理 11.21 假设 $\mu > 2 + \sqrt{5}$. 则逻辑斯谛 (logistic) 映射 L_μ 使得集合

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n \subset [0, 1] \quad (11-62)$$

不变. 所有的点 $x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} L_\mu^n(x) = -\infty$. 集合 Λ 是康托尔 (Cantor) 集, 动力系统 (Λ, L_μ) 拓扑等价于通过旅程映射

$$\begin{aligned} \varphi: \Lambda \rightarrow \Sigma_2 \\ x \mapsto x_n = j \quad \text{如果 } L_\mu^n(x) \in I_j \end{aligned} \quad (11-63)$$

的两个符号 (Σ_2, σ) 上的移位映射. 特别地, (Λ, L_μ) 是混沌的.

显然, 我们也要知道逻辑斯谛 (logistic) 映射的排斥子 Λ 是否是奇怪的.

定理 11.22 逻辑斯谛 (logistic) 映射的排斥子 Λ 的豪斯多夫 (Hausdorff) 维数满足

$$d(\mu) \leq \dim_H(\Lambda) \leq \begin{cases} 1, & \mu \leq 2 + \sqrt{8}, \\ d(\sqrt{\mu(4-\mu)}), & \mu > 2 + \sqrt{8} \end{cases} \quad d(x) = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}. \quad (11-64)$$

特别地, 如果 $\mu > 2 + \sqrt{8} \approx 4.828$, 则它是奇怪的.

证明 证明类似于定理 11.20. 只有一点不同, 那就是对 L'_μ 我们必须用上下不同估计

$$\sqrt{\mu(4-\mu)} = \alpha \leq |L'_\mu(x)| \leq \beta = \mu, \quad x \in I_0 \cup I_1. \quad (11-65)$$

利用 δ -覆盖 $I_{s_0, \dots, s_{n-1}}$, 我们看到, $h^{d(\alpha)}(\Lambda) \leq (a/\alpha)^{d(\alpha)}$, 其中 $a = |I_0| = |I_1| = G_\mu(1)$.

类似地, 利用 Λ_k 中两个区间的距离至少是 $\frac{b}{\beta^{k-1}}$, 其中 $b = d(I_0, I_1) = 1 - 2G_\mu(1)$, 我们得到

$$b^{d(\beta)} \leq h^{d(\beta)}(\Lambda), \quad (11-66)$$

这就完成了我们的证明. \square

如果你看一下这个证明, 你将会看到, 逻辑斯谛 (logistic) 映射的性质在证明中很少被用到. 且容易看到, 同样的证明可以应用到下面更一般的情形.

定理 11.23 设 $f: M \rightarrow M$ 是连续可微的区间映射. 假设存在两个不相交的紧区间 I_0, I_1 , 使得 $I_0 \cup I_1 \subseteq f(I_0), I_0 \cup I_1 \subseteq f(I_1)$, 且对所有 $x \in I_0 \cup I_1$, 有 $1 < \alpha \leq |f'|$

$(x) | \leq \beta$. 令

$$\Lambda = \{x \in I_0 \cup I_1 \mid f^n(x) \in I_0 \cup I_1 \text{ 对一切 } n \in \mathbb{N}\}, \quad (11-67)$$

旅程映射定义为

$$\begin{aligned} \varphi: \Lambda \rightarrow \Sigma_2 \\ x \mapsto x_n = j \text{ 如果 } f^n(x) \in I_j. \end{aligned} \quad (11-68)$$

那么集合 Λ 是康托尔 (Cantor) 集, 而且动力系统 (Λ, f) 拓扑等价于两个符号 (Σ_2, σ) 上的移位. Λ 的豪斯多夫 (Hausdorff) 维数满足

$$d(\beta) \leq \dim_H(\Lambda) \leq d(\alpha), \quad d(x) = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}, \quad (11-69)$$

且如果 $\alpha > 2$ 则它是奇怪的.

证明 由假设, 限制映射 $f: I_0 \rightarrow f(I_0)$ 和 $g: I_1 \rightarrow f(I_1)$ 可逆. 分别以 $g_0: f(I_0) \rightarrow I_0$ 和 $g_1: f(I_1) \rightarrow I_1$ 记它们的逆. 现在如通常进行, 我们看到, 存在 2^n 个由 $I_{s_0, \dots, s_n} = g_0(I_{s_0, \dots, s_{n-1}})$ 和 $I_{1, s_0, \dots, s_{n-1}} = g_1(I_{s_0, \dots, s_{n-1}})$ 递归定义的子区间 $I_{s_0, \dots, s_n}, s_j \in \{0, 1\}$ 组成的嵌套集序列 Λ_n . 由假设我们也知道至少有 $|I_{s_0, \dots, s_n}| \leq \alpha^{-n} |I_{s_0}|$, 因此, 如前, 定理得证.

你应该尝试画出上面定理中 f 的图像. 此外, 显然只要假设 f 在 $I_0 \cup I_1$ 上绝对连续就够了.

下面, 设 f 是定理 11.23 中的映射, 注意, 由 $I_0 \subseteq f(I_0)$ 得知, 存在 (唯一) 不动点 $p \in I_0$. 由于 $I_0 \subseteq f(I_1)$, 存在点 $q \in I_1$ 使得 $f(q) = p$. 此外, 用 $g: f(I_0) \rightarrow I_0$ 记 $f: I_0 \rightarrow f(I_0)$ 的逆, 我们看到, 存在整个序列 $g_0^n(q)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时它收敛于 p . 在逻辑斯谛 (logistic) 映射情形, 我们可以取 $q = G_\mu(1)$.

$$\ln[3] := \mu = 5;$$

$$x_0 = \text{Nest}\left[\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\#}{\mu}}\right) \&, 1., 5\right]$$

$$\text{ShowWeb}[\mu \# (1 - \#) \&, x_0, 6];$$

经有限多次迭代后 x_0 到达不动点 0 (不仅是渐近地) 的事实与维数是 1 有关. 由于不动点 0 是排斥的 ($T'_\mu(0) = \mu > 1$), 它不可能收敛于 0, 除非经有限多步后到达它.

一般地, 设 $f: I \rightarrow I$ 连续可微. 不动点 p 称为双曲排斥子, 如果 $|f'(p)| > 1$. 因此, 存在包含 p , 使得对所有 $x \in W$ 有 $|f'(x)| \geq \alpha > 1$ 的闭区间 W . 此外, 由反函数定理存在局部逆 $g: f(W) \rightarrow W$, 使得 $g(f(x)) = x, x \in W$. 注意, 由于 f 在 W 上是扩张的, 我们有 $W \subseteq f(W)$, 故 g 是压缩的. 点 $q \in W$ 称为同宿点, 如果存在 $l \in \mathbb{N}_0$ 使得 $f^l(q) = p$. 集合

$$\gamma(q) = \{f^j(q) \mid j \in \mathbb{N}_0\} \cup \{g^j(q) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

称为对应的同宿轨道. 称它为非退化的, 如果 $(f^l)'(q) \neq 0$ (由此得知, 对所有 x

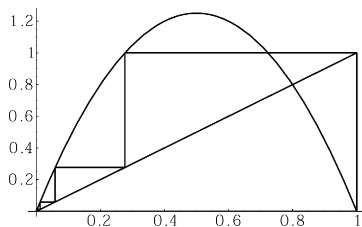


图 11-2

$\in \gamma(q)$ 有 $f'(x) \neq 0$). 具同宿轨道的双曲排斥子也称为**迅速跳回排斥子**.

定理 11.24 假设 $f \in C^1(I, I)$ 有排斥的双曲不动点 p , 以及对应的非退化同宿点 q .

对 p 的每一个充分小邻域 U , 存在 $n \in \mathbb{N}$, 以及 f^n 的不变康托尔 (Cantor) 集 $A \subset U$ (即 $f^n(A) = A$), 使得 (A, f^n) 拓扑等价于两个符号 (Σ_2, σ) 上的移位.

证明 我们需要如定理 11.23, 对映射 $F = f^n$ (n 为适当整数) 构造两个互不相交的区间 $I_j \subset U \cap W, j = 0, 1$. 由 W 的收缩性, 不妨假设 $W \subseteq U$.

证明思路是取包含 p 的紧区间 I_0 和包含 q 的紧区间 I_1 . 由于 $f^l(q) = p$, 区间 $f^l(I_1)$ 又一次包含 p . 取充分多次的迭代, 我们可以放大两个区间, 使得迭代的像包含原来的两个区间. 仅仅比较难处理的部分是, 确认迭代映射的导数大于 1.

所以从包含 $q \in W$ 的区间 $I_1 \subset W$ 开始. 由于 q 是非退化的, 我们可以选择 I_1 , 使得对所有 $x \in I_1$ 有 $|(f^l)'(x)| \geq \varepsilon > 0$. 此外, 由 I_1 的收缩性, 如有必要我们也可以假设 $f^l(I_1) \cap I_1 = \emptyset$. 接下来取 m 足够地大, 使得 $g^m(I_1) \subseteq f^l(I_1)$ (如上 g 是 f 的局部逆) 以及 $\alpha^m \varepsilon > 1$. 令 $n = m + 1$. 接下来选择 $\check{I}_1 \subseteq I_1$, 使得 $g^m(I_1) \subseteq f^l(\check{I}_1)$, 但 $f^l(\check{I}_1) \subseteq g^m(W)$. 于是我们有 $g^m(\check{I}_1) \subseteq g^m(I_1) \subseteq f^l(\check{I}_1)$, 以及我们可以用 \check{I}_1 代替 I_1 . 由构造, $f^l(I_1) \subseteq g^m(W)$, 即 $f^n(I_1) \subseteq W$, 因此, 对 $x \in I_1$ 有 $|(f^n)'(x)| \geq \varepsilon \alpha^m > 1$.

下面我们选择 $I_0 = g^l(f^l(I_1))$. 于是由于 $I_0 \subseteq f^l(I_1)$, 我们有 $I_0 \cap I_1 = \emptyset$ 和 $I_0 \subseteq f^n(I_1)$. 进一步, 由 $p \in I_0$ 我们有 $I_0 \subseteq f^n(I_0)$, 以及由 $g^m(I_1) \subseteq f^l(I_1) = f^l(I_0)$, 我们有 $I_1 \subseteq f^n(I_0)$. 最后, 因为 $I_0 \subseteq g^n(W)$, 对 $x \in I_0$ 我们有 $|(f^n)'(x)| \geq \alpha^N > 1$, 证明完毕. \square

问题 11.11 为什么定理 11.24 中的退化性条件是必要的? 你能不能给出反例?

第 12 章 周 期 解

12.1 周期解的稳定性

在 6.5 节我们已经定义了不动点的稳定性. 这一节我们要将这个概念推广到周期解.

一个轨道 $\gamma(x_0)$ 称为是**稳定的**, 如果对任意给定的邻域 $U(\gamma(x_0))$, 存在另外的邻域 $V(\gamma(x_0)) \subseteq U(\gamma(x_0))$, 使得从 $V(\gamma(x_0))$ 内开始的任何解, 对所有 $t \geq 0$ 都停留在 $U(\gamma(x_0))$ 内.

类似地, 轨道 $\gamma(x_0)$ 称为**渐近稳定**, 如果它稳定且存在邻域 $U(\gamma(x_0))$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, x), \gamma(x_0)) = 0, \quad \text{对所有 } x \in U(x_0), \quad (12-1)$$

其中 $d(x, U) = \sup_{y \in U} |x - y|$.

注意, 这个定义忽略了轨道的时间参数化. 特别地, 如果 x 接近于 $x_1 \in \gamma(x_0)$, 我们并不要求 $\Phi(t, x)$ 也接近于 $\Phi(t, x_1)$ (我们仅要求它接近于 $\gamma(x_0)$). 为了看到这个定义的恰当性, 考虑数学摆 (6.49). 那里所有的轨道都是周期的, 但是它们的周期并不相同. 因此, 如果固定点 x_0 , 任何从靠近它的点 $x \neq x_0$ 开始的轨道, 对应较小周期的轨道附近将有较大周期的轨道, 因此 $\Phi(t, x)$ 并不接近于 $\Phi(t, x_0)$. 尽管如此, 它仍接近于 x_0 的轨道.

现在我们转到对周期解的稳定性研究. 假设微分方程

$$\dot{x} = f(x) \quad (12-2)$$

有周期为 $T = T(x_0)$ 的周期解 $\Phi(t, x_0)$.

由于对不动点的线性化问题是成功的, 因此我们将尝试用类似的方法处理周期点. f 沿着周期轨道的线性化简单记为

$$A(t) = df_{\Phi(t, x_0)}, \quad A(t+T) = A(t), \quad (12-3)$$

或者, 这个问题也可以研究**第一变分方程**

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (12.4)$$

我们已经在式 (2.52) 遇见过它. 注意, 选择周期轨道的不同点 $x_0 \rightarrow \Phi(s, x_0)$ 相当于 $A(t) \rightarrow A(t+s)$.

我们的目的是证明周期轨道 $\gamma(x_0)$ 的稳定性与第一变分方程的稳定性有关. 作为第一个有用的观察, 注意, 对应的主解矩阵 $\mathbf{II}(t, t_0)$ 可以沿着周期轨道线性化流得到.

引理 12.1 第一变分方程的主解矩阵由

$$\mathbf{II}_{x_0}(t, t_0) = \frac{\partial \Phi_{t-t_0}}{\partial x}(\Phi(t_0, x_0)) \quad (12-5)$$

给出, 此外, $f(\Phi(t, x_0))$ 是第一变分方程

$$f(\Phi(t, x_0)) = \mathbf{II}_{x_0}(t, t_0)f(\Phi(t_0, x_0)) \quad (12-6)$$

的解.

证明 记 $J(t, x) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial x}(x)$, 于是 $J(0, x) = \mathbf{I}$, 交换对 t 和 x 的导数, 得 $\dot{J}(t, x) = df_{\Phi(t, x)}J(t, x)$. 因此, $J(t-t_0, \Phi(t_0, x_0))$ 是第一变分方程的主解矩阵. 剩下的要证明式 (12-6) 满足第一变分方程, 这直接计算即得.

由于 $A(t)$ 是周期的, 3.5 节所有考虑的都可应用. 特别地, 主解矩阵有形式

$$\mathbf{II}_{x_0}(t, t_0) = P_{x_0}(t, t_0) \exp((t-t_0)Q_{x_0}(t_0)), \quad (12-7)$$

单值矩阵 $M_{x_0}(t_0) = \exp(TQ_{x_0}(t_0)) = \frac{\partial \Phi_{T-t_0}}{\partial x}(\Phi(t_0, x_0))$ 的特征值与轨道上点的选择无关. 注意, 它有一个特征值是 1, 因为

$$M_{x_0}(t_0)f(\Phi(t_0, x_0)) = f(\Phi(t_0, x_0)). \quad (12-8)$$

12.2 庞加莱 (Poincaré) 映射

回忆 6.3 节介绍的庞加莱 (Poincaré) 映射

$$P_{\Sigma}(y) = \Phi(\tau(y), y) \quad (12-9)$$

是研究周期轨道的主要工具之一. 周期轨道 $\gamma(x_0)$ 的稳定性直接与 P_{Σ} 的不动点 x_0 的稳定性有关.

引理 12.2 周期轨道 $\gamma(x_0)$ 是 (渐近) 稳定轨道, 当且仅当 x_0 是 P_{Σ} 的 (渐近) 稳定不动点.

证明 假设 x_0 是 P_{Σ} 的稳定不动点. 设 U 是 $\gamma(x_0)$ 的邻域. 选择 x_0 的邻域 $\tilde{U} \subseteq U \cap \Sigma$, 使得 $\Phi([0, T], \tilde{U}) \subseteq U$. 如果 x_0 是 P_{Σ} 的稳定不动点, 则存在 x_0 的另外邻域 $\tilde{V} \subseteq \Sigma$, 使得对一切 n 有 $P^n(\tilde{V}) \subseteq \tilde{U}$. 现在设 V 是 $\gamma(x_0)$ 的邻域, 使得 $V \subseteq \Phi([0, T], \tilde{V})$. 于是, 如果 $y \in V$, 则存在最小的 $t_0 \geq 0$, 使得 $y_0 = \Phi(t_0, y) \in \tilde{V}$. 因此, $y_n = P_{\Sigma}^n(y_0) \in \tilde{U}$, 从而, 对所有 $t \geq 0$ 有 $\varphi(t, V) \subseteq U$.

此外, 如果 $y_n \rightarrow x_0$, 则由 Φ 的连续性和 $[0, T]$ 的紧性, 有 $\Phi(t, y) \rightarrow \gamma(x_0)$. 因此若 x_0 是渐近稳定, 则 $\gamma(x_0)$ 也是. 反之是显然的. \square

作为这个结果和定理 10.1 的直接推论, 我们得到

推论 12.3 假设 $f \in C^k$ 有周期轨道 $\gamma(x_0)$. 如果它的 Poincaré 映射的所有特征值位于单位圆内, 则周期轨道渐近稳定.

下面我们说明, 这个方法如何与第一变分方程相联系.

定理 12.4 庞加莱 (Poincaré) 映射在 x_0 的导数 dP_Σ 的特征值加上单个值 1 与单值矩阵 $M_{x_0}(t_0)$ 的特征值重合.

特别地, 庞加莱 (Poincaré) 映射的特征值与基点 x_0 和横截弧段 Σ 的选择无关.

证明 经线性变换后, 不妨假设 $f(x_0) = (0, \dots, 0, 1)$. 记 $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. 则 Σ 局部地是函数 $s: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像, 且我们可以取 y 作为庞加莱 (Poincaré) 映射的局部坐标. 由于

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\tau(x), x) \right|_{x=x_0} = f(x_0) d\tau_{x_0} + \frac{\partial \Phi_T}{\partial x}(x_0), \quad (12-10)$$

由引理 12.1, 对 $1 \leq j, k \leq n-1$, 我们得到 $dP_\Sigma(x_0)_{j,k} = M_{x_0}(t_0)_{j,k}$. 此外, $M_{x_0}(0)f(x_0) = f(x_0)$, 因此

$$M_{x_0}(0) = \begin{pmatrix} dP_\Sigma(x_0) & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}. \quad (12-11)$$

□

由此, 定理的论断是显然的.

作为这个定理的推论, 我们有:

推论 12.5 庞加莱 (Poincaré) 映射在 x_0 的导数的行列式与单值矩阵的行列式相等

$$\det(dP_\Sigma(x_0)) = \det(M_{x_0}(t_0)). \quad (12-12)$$

特别地, 由于单值矩阵的行列式不为零, $P_\Sigma(y)$ 是在 x_0 的局部微分同胚.

由刘维尔 (Liouville) 公式 (3-74), 我们有

$$\begin{aligned} \det(M_{x_0}(t_0)) &= \exp\left(\int_0^T \text{tr}(A(t)) dt\right) \\ &= \exp\left(\int_0^T \text{div}(f(\Phi(t, x_0))) dt\right). \end{aligned} \quad (12-13)$$

在二维情形, 我们只有一个特征值, 它等于这个行列式, 因此, 我们得到:

引理 12.6 假设 f 是平面向量场. 如果

$$\int_0^T \text{div}(f(\Phi(t, x_0))) dt < 0, \quad (12-14)$$

则周期点 x_0 渐近稳定, 如果积分为正, 则它是不稳定的.

作为庞加莱 (Poincaré) 映射的另一个应用, 我们将证明, 双曲周期轨道在小扰动下得到保持.

引理 12.7 设 $f(x, \lambda)$ 是 C^k , 并假设 $f(x, 0)$ 有双曲周期轨道 $\gamma(x_0)$. 则在 0 的充分小邻域内存在 C^k 映射 $\lambda \mapsto x_0(\lambda)$, 使得 $x_0(0) = x_0$, 且 $\gamma(x_0(\lambda))$ 是 $f(x, \lambda)$ 的周期轨道.

证明 固定 $f(x, 0)$ 在 x_0 的横截弧 Σ . 对充分小 λ , 它也是 $f(x, \lambda)$ 的横截弧. 因此, 存在对应的庞加莱 (Poincaré) 映射 $P_\Sigma(x, \varepsilon)$ (它是 C^k 的). 由于 $P_\Sigma(x_0, 0) =$

$x_0, P_{\Sigma}(x, 0)$ 的特征值没有一个在单位圆上, 由隐函数定理得引理结论.

12.3 稳定流形和不稳定流形

为了证明周期点 x_0 的稳定性可从第一变分方程得出. 首先利用某些变换简化我们的问题.

利用 $y(t) = x(t) - \Phi(t, x_0)$, 可以把我们的问题化为

$$\dot{y} = \hat{f}(t, y), \quad \hat{f}(t, y) = f(y + \Phi(t, x_0)) - f(\Phi(t, x_0)), \quad (12-15)$$

其中 $\hat{f}(t, 0) = 0$ 和 $\hat{f}(t + T, x) = \hat{f}(t, x)$. 这个方程可重写为

$$\dot{y} = A(t)y + \tilde{g}(t, y), \quad (12-16)$$

其中 \tilde{g} 是 T -周期的, $\tilde{g}(t, 0) = 0$ 和 $(\partial \tilde{g} / \partial y)(t, 0) = 0$.

我们将看到, 双曲周期轨道非常像双曲不动点. (请你证明这个定义与我们前面对不动点情形的特殊情形 $T=0$ 的定义相同).

此外, 由推论 3.15, 变换 $z(t) = P(t)^{-1}y(t)$ 将上述系统化为

$$\dot{z} = Qz + g(t, z). \quad (12-17)$$

因此, 可如 7.2 节证明在 x_0 定义的稳定流形和不稳定流形

$$M^{\pm}(x_0) = \{x \in M \mid \sup_{\pm t \geq 0} |\Phi(t, x) - \Phi(t, x_0)| < \infty, \text{ 对某个 } \gamma > 0\} \quad (12-18)$$

的存在性. 在我们的周期轨道上的不同点 $\Phi(t_0, x_0)$ 作这个流形, 并令

$$M_{t_0}^{\pm}(x_0) = M^{\pm}(\Phi(t_0, x_0)). \quad (12-19)$$

注意, 它们的线性像是对应于 $M_{x_0}(t_0)$ 的稳定和不稳定子空间的线性子空间

$$E^{\pm}(t_0) = \Pi_{x_0}(t_1, 0)E^{\pm}(0) \quad (12-20)$$

(比较式 (3.95)).

定理 12.8 (周期轨道的稳定流形) 假设 $f \in C^k$ 有双曲周期轨道 $\gamma(x_0)$, 对应的单值矩阵是 $M(t_0)$. 则存在邻域 $U(\gamma(x_0))$ 和函数 $h^{\pm} \in C^k([0, T] \times E^{\pm}, E^{\mp})$, 使得

$$M_{t_0}^{\pm}(x_0) \cap U(\gamma(x_0)) = \{\Phi(t_0, x_0) + a + h^{\pm}(t_0, a) \mid a \in E^{\pm}(t_0) \cap U\}. \quad (12-21)$$

两个 $h^{\pm}(t_0, \cdot)$ 以及它们在 x_0 的雅可比 (Jacobi) 矩阵为零, 就是说, $M_{t_0}^{\pm}(x_0)$ 在 $\Phi(t_0, x_0)$ 切于它们相应的线性像 $E^{\pm}(t_0)$. 此外, 对任何 $\gamma < \min\{|\operatorname{Re}(\gamma_j)|\}_{j=1}^m$ 和某个依赖于 γ 的 $C > 0$, 我们有

$$|\Phi(t, x) - \Phi(x_0, t + t_0)| \leq Ce^{\mp t\gamma}, \quad \pm t > 0, \quad x \in M_{t_0}^{\pm}(x_0). \quad (12-22)$$

其中 γ_j 是 $Q(t_0)$ 的特征值.

证明 正如我们在前面已经指出的, 应用如 7.2 节相同的证明. 唯一的差别是 g 现在依赖于 t . 但是, 由于 g 是周期的, 我们对所有的估计可以毫无问题限制 t 在

紧区间 $[0, T]$ 上. 因此, 对轨道上的每一点, 我们得到 M_0^\pm .

用 $t_0 \in [0, T]$ 参数化每一点, 不难看到, g 作为这个参数的函数是 C^k 的. 此外, 由式 (12-20) 得单值矩阵 $M(t_0)$ 的稳定和不稳定子空间.

现在我们可以对所有的 t_0 取并, 并分别定义稳定流形和不稳定流形为

$$\begin{aligned} M^\pm(\gamma(x_0)) &= \{x \mid \sup_{\pm t \geq 0} e^{\pm \gamma t} |\Phi(t, x) - \Phi(t + t_0, x_0)| < \infty \text{ 对某 } t_0, \gamma > 0\} \\ &= \bigcup_{t_0 \in [0, T]} M_{t_0}^\pm(x_0). \end{aligned} \quad (12-23)$$

它们显然在流作用下是不变的, 并局部地由

$$\begin{aligned} &M^\pm(\gamma(x_0)) \cap U(\gamma(x_0)) \\ &= \{\Phi(t_0, x_0) + \Pi_{x_0}(t_0, 0)a + h^\pm(t_0, \Pi_{x_0}(t_0, 0)a) \mid a \in E^\pm(0) \cap U, t_0 \in [0, T]\} \end{aligned} \quad (12-24)$$

给出.

说 $M^\pm(\gamma(x_0))$ 中的点有渐近相, 就是说, 存在 t_0 使得

$$\Phi(t, x) \rightarrow \Phi(t + t_0, x_0), \text{ 当 } t \rightarrow \infty \text{ 或 } t \rightarrow -\infty. \quad (12-25)$$

如同在不动点情形, 如果轨道是双曲的, 则 (不) 稳定流形与 $\gamma(x_0)$ 的 (不) 稳定集

$$W^\pm(\gamma(x_0)) = \{x \mid \lim_{t \rightarrow \pm \infty} d(\Phi(t, x), \gamma(x_0)) = 0\} \quad (12-26)$$

重合.

定理 12.9 假设 $f \in C^k$ 有双曲周期轨道 $\gamma(x_0)$. 则存在邻域 $U(x_0)$, 使得 $\gamma_\pm(x) \subset U(\gamma_0(x_0))$, 当且仅当 $x \in M^\pm(\gamma(x_0))$. 特别地,

$$W^\pm(\gamma(x_0)) = M^\pm(\gamma(x_0)). \quad (12-27)$$

证明 假设 $t \rightarrow \infty$ 时 $d(\Phi(t, x), \gamma(x_0)) \rightarrow 0$. 注意, 不妨假设 x 充分接近 $\gamma(x_0)$. 选择包含 x 的横截弧 Σ , 并考虑对应的庞加莱 (Poincaré) 映射 P_Σ . 于是 $M^\pm(\gamma(x_0)) \cap \Sigma$ 必须是这个庞加莱 (Poincaré) 映射的稳定和不稳定流形. 由流的 Hartman-Grobman 定理, x 必须位于庞加莱 (Poincaré) 映射的稳定流形上, 因此它在 $M^\pm(\gamma(x_0))$ 内.

此外, 如果 f 依赖于参数 λ , 则由引理 12.7, 我们已经知道双曲周期轨道在小扰动下得到保持, 且光滑依赖于参数. 此外, 对稳定和不稳定流形同样也成立 (这可如定理 7.7 证明).

定理 12.10 设 $f(x, \lambda)$ 是 C^k 的, 又假设 $f(x, 0)$ 有双曲周期轨道 $\gamma(x_0)$. 则在 0 的充分小邻域内存在 C^k 映射 $\lambda \mapsto x_0(\lambda)$, 使得 $x_0(0) = x_0$, 且 $\gamma(x_0(\lambda))$ 是 $f(x, \lambda)$ 的周期轨道. 此外, 对应的稳定和不稳定流形局部地由

$$\begin{aligned} &M^\pm(\gamma(x_0(\lambda))) \cap U(\gamma(x_0(\lambda))) \\ &= \{\Phi(t_0, x_0(\lambda), \lambda) + a(\lambda) + h^\pm(t_0, a(\lambda)) \mid a \in E^\pm(0) \cap U, t_0 \in [0, T]\} \end{aligned} \quad (12-28)$$

给出, 其中 $a(\lambda) = \prod_{x_0(\lambda)}(t_0, 0, \lambda)P^\pm(\lambda)a$, $h^\pm \in C^k$.

问题 12.1 (Hopf 分支) 作为参数 μ 的函数, 研究对 $\sigma = 1$ 和 $\sigma = -1$ 的系统

$$\dot{x} = -y + (\mu + \sigma(x^2 + y^2))x, \quad \dot{y} = x + (\mu + \sigma(x^2 + y^2))y.$$

计算在这两个情形的稳定流形和不稳定流形 (提示: 利用极坐标).

12.4 自治扰动的 Melnikov 方法

在引理 12.7 中我们已经看到, 双曲周期轨道在小扰动下是稳定的. 但是, 对于应用中经常出现的许多情况, 这个结果还不够满意! 在 6.7 节我们已经看到许多物理模型是哈密顿 (Hamilton) 系统. 显然这样的系统是理想化的, 更现实的模型可对原来的模型经少许扰动得到. 但这通常将导致方程不可求解. 二维哈密顿 (Hamilton) 系统的典型情形是存在由周期轨道围绕的不动点. 如我们在问题 6.24 中看到的, 加上 (任意小) 摩擦力项以后将导致不动点渐近稳定, 而所有的周期轨道将消失. 特别地, 周期轨道在小扰动下是不稳定的, 因此不可能是双曲的. 另一方面, van der Pol 方程 (8.24) 当 $\mu = 0$ 时也是哈密顿 (Hamilton) 的, 当 $\mu > 0$ 时, 由定理 8.16 可证明有一个周期轨道得到保持.

所以, 我们考虑哈密顿 (Hamilton) 系统

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + U(q), \quad (12-29)$$

对应的运动方程是

$$\dot{p} = -U'(q), \quad \dot{q} = p. \quad (12-30)$$

此外, 设 q_0 是被周期轨道围绕的平衡点. 不妨选择 $q_0 = 0$. 我们对这些周期轨道在小扰动

$$\dot{p} = -U'(q) + \varepsilon f(p, q), \quad \dot{q} = p + \varepsilon g(p, q) \quad (12-31)$$

下的命运感兴趣. 这不一定是哈密顿 (Hamilton) 的. 选择截线 $\Sigma = \{(0, q) \mid q > 0\}$, 对应的庞加莱 (Poincaré) 映射为

$$P_\Sigma((0, q), \varepsilon) = \Phi(\tau(q, \varepsilon), (0, q), \varepsilon), \quad (12-32)$$

其中 $\tau(q, \varepsilon)$ 是第一次回复时间. 从 $(0, q)$ 出发的轨道是周期的, 当且仅当 q 是位移函数

$$\Delta(q, \varepsilon) = \Phi_1(\tau(q, \varepsilon), (0, q), \varepsilon) - q \quad (12-33)$$

的零点. 由于 $\Delta(q, 0)$ 恒等于零, 因此关于 q 的导数为零, 故不能应用隐函数定理. 当然, 这正好反映了周期轨道不是双曲的事实, 这是我们开始就想到的.

摆脱这个困境的方法是考虑简化位移函数 $\tilde{\Delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \Delta(q, \varepsilon)$ (这对达到我们目的来说与原来的一样好). 现在 $\tilde{\Delta}(q, 0) = \Delta_\varepsilon(q, 0)$ 以及 $\tilde{\Delta}_q(q, 0) = \Delta_{\varepsilon, q}(q, 0)$. 因此, 如果我们找到了 $\Delta_\varepsilon(q, 0)$ 的简单零点, 对 $\tilde{\Delta}(q, \varepsilon)$ 应用隐函数定理, 得知对应的周期轨道在小扰动下保持.

这可能是个漂亮结果, 但仍没有什么用处, 除非我们能够计算 $\Delta_\varepsilon(q, 0)$. 记

$$(p(t, \varepsilon), q(t, \varepsilon)) = \Phi(t, (0, q), \varepsilon), \quad (12-34)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Delta(q, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} q(\tau(q, \varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \dot{q}(T(q), 0) \tau_\varepsilon(q, 0) + q_\varepsilon(T(q), 0) \\ &= p(T(q), 0) \tau_\varepsilon(q, 0) + q_\varepsilon(T(q), 0) = q_\varepsilon(T(q), 0), \end{aligned} \quad (12-35)$$

其中 $T(q) = \tau(q, 0)$ 是未被扰动轨道的周期. 接下来, 注意到 $(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (p(t, \varepsilon), q(t, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0}$ 是第一变分方程

$$\begin{aligned} \dot{p}_\varepsilon(t) &= -U''(q_\varepsilon(t)) q_\varepsilon(t) + f(p(t), q(t)), \\ \dot{q}_\varepsilon(t) &= p_\varepsilon(t) + g(p(t), q(t)) \end{aligned} \quad (12-36)$$

对应于初始条件 $(p_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) = (0, 0)$ 的解. 这里我们用了记号 $(p(t), q(t)) = (p(t, 0), q(t, 0))$. 由常数变易公式这个解由

$$\begin{pmatrix} p_\varepsilon(t) \\ q_\varepsilon(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \mathbf{H}_q(t, s) \begin{pmatrix} f(p(s), q(s)) \\ g(p(s), q(s)) \end{pmatrix} ds \quad (12-37)$$

给出. 我们仅仅对在 $t = T(q)$ 的值感兴趣, 其中

$$\mathbf{H}_q(T(q), s) = \mathbf{H}_q(T(q), 0) \mathbf{H}_q(0, s) = \mathbf{H}_q(T(q), 0) \mathbf{H}_q(s, 0)^{-1}. \quad (12-38)$$

进一步, 利用引理 12.1, 得

$$\mathbf{H}_q(t, 0) \begin{pmatrix} -U'(q) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U'(q(t)) \\ p(t) \end{pmatrix}, \quad (12-39)$$

故有

$$\mathbf{H}_q(t, 0) = \frac{1}{U'(q)} \begin{pmatrix} U'(q(t)) & -\alpha(t)U'(q(t)) + \beta(t)p(t) \\ -p(t) & \alpha(t)p(t) + \beta(t)U'(q(t)) \end{pmatrix}, \quad (12-40)$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 由

$$\mathbf{H}_q(t, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ U'(q) \end{pmatrix} = \alpha(t) \begin{pmatrix} -U'(q(t)) \\ p(t) \end{pmatrix} + \beta(t) \begin{pmatrix} p(t) \\ U'(q(t)) \end{pmatrix} \quad (12-41)$$

给出. 此外, 由刘维尔 (Liouville) 公式, 我们有 $\det \mathbf{H}_q(t, s) = 1$, 因此

$$\beta(t) = \frac{U'(q)^2}{U'(q(t))^2 + p(t)^2} \det \mathbf{H}_q(t, 0) = \frac{U'(q)^2}{U'(q(t))^2 + p(t)^2}. \quad (12-42)$$

现在将所得到的一切结合在一起, 我们得到

$$\Delta_\varepsilon(q, 0) = \frac{1}{U'(q)} \int_0^{T(q)} (p(s)f(p(s), q(s)) + U'(q(s))g(p(s), q(s))) ds. \quad (12-43)$$

右端的积分就是熟知的周期轨道的 Melnikov 积分.

作为例子, 我们说明如何把它应用到港德波尔 (van der Pol) 方程 (8.24). 这里我们有 ($q = x$ 和 $p = y$) 未被扰动系统的调和振子 $U(q) = q^2/2$ 和未被扰动轨

道 $(p(t), q(t)) = (q\sin(t), q\cos(t))$. 因此, 利用 $f(p, q) = 0, g(p, q) = q - q^3/3$ 我们有

$$\Delta_\varepsilon(q, 0) = q \int_0^{2\pi} \cos(s)^2 \left(\frac{\cos(s)^2}{3q^2} - 1 \right) ds = \frac{\pi q}{4} (q^2 - 4), \quad (12-44)$$

$q=2$ 是 $\Delta_\varepsilon(q, 0)$ 的简单零点.

如我们在下面将看到的, 这个结果不是特别针对向量场的哈密顿 (Hamilton) 形式. 事实上, 考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon). \quad (12-45)$$

假设 $\varepsilon=0$ 时未被扰动系统有周期环面, 即周期轨道的环面. 记在这个环面上点 x 的周期为 $T(x)$.

在这个环面上固定周期点 x_0 , 我们先推导未被扰动系统的一些事实. 设 $\Phi(t, x, \varepsilon)$ 是式 (12-45) 的流, 并记 $\Phi(t, x) = \Phi(t, x, 0)$. 利用正交向量场

$$f^\perp(x) = Jf(x), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12-46)$$

我们可对未被扰动系统的第一变分方程的主解矩阵作下面猜测

$$\begin{aligned} \Pi_{x_0}(t, 0)f(x_0) &= f(x(t)), \\ \Pi_{x_0}(t, 0)f^\perp(x_0) &= \alpha_{x_0}(t)f(x(t)) + \beta_{x_0}(t)f^\perp(x(t)), \end{aligned} \quad (12-47)$$

其中 $x(t) = \Phi(t, x_0)$.

引理 12.11 系数 $\alpha_{x_0}(t)$ 和 $\beta_{x_0}(t)$ 由

$$\begin{aligned} \beta_{x_0}(t) &= \frac{|f(x_0)|^2}{|f(x(t))|^2} e^{\int_0^t \operatorname{div}(f(x(s))) ds}, \\ \alpha_{x_0}(t) &= \int_0^t \frac{\beta_{x_0}(s)}{|f(x(s))|^2} f(x(s)) [J, A(s)] f(x(s)) ds \end{aligned} \quad (12-48)$$

给出, 其中 $x(t) = \Phi(t, x_0)$ 和 $A(t) = df_{x(t)}$.

证明 由于 $\beta(t) = \frac{|f(x_0)|^2}{|f(x(t))|^2} \det(\Pi_{x_0})$, 第一个方程从刘维尔 (Liouville) 公式得到. 接下来, 对 t 微分式 (12-47), 考虑到 $\dot{f}(x(t)) = A(t)f(x(t))$, 得

$$\dot{\alpha}(t)f(x(t)) + \dot{\beta}(t)f^\perp(x(t)) = \beta(t)(A(t)f^\perp(x(t)) - (A(t)f(x(t)))^\perp). \quad (12-49)$$

两端乘 $f(x(t))$ 并对 t 积分, 由于 $\alpha(0) = 0$, 论断得证.

现在用 $\Psi(t, x)$ 记正交向量场 $f^\perp(x)$ 的流, 并引入更适当的坐标

$$x(u, v) = \Phi(u, \Psi(v, x_0)). \quad (12-50)$$

记 $T(v) = T(x(u, v))$, 关于 v 微分 $\Phi(T(v), x(u, v)) - x(u, v) = 0$, 得

$$\dot{\Phi}(T(v), x(u, v)) \frac{\partial T}{\partial v}(v) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(T(v), x(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v). \quad (12-51)$$

在 $(u, v) = (0, 0)$ 计算给出

$$\Pi_{x_0}(T(x_0), 0)f^\perp(x_0) + \frac{\partial T}{\partial v}(0)f(x_0) = f^\perp(x_0). \quad (12-52)$$

利用式 (12-47), 我们得到

$$(\alpha_{x_0}(T(x_0)) - \frac{\partial T}{\partial v}(0))f(x_0) = (1 - \beta_{x_0}(T(x_0)))f^\perp(x_0). \quad (12-53)$$

或者等价地,

$$(\alpha_{x_0}(T(x_0))) = \frac{\partial T}{\partial v}(0) = \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)f^\perp(x_0), \quad \beta_{x_0}(T(x_0)) = 1. \quad (12-54)$$

有了这些准备以后, 我们考虑对应于某个截线 Σ (后面被指定) 的庞加莱 (Poincaré) 映射

$$P_\Sigma(x, \varepsilon) = \Phi(\tau(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \quad x \in \Sigma, \quad (12-55)$$

由于我们知道它对 ε 的导数的重要性, 固定 $x_0 \in \Sigma$, 计算得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\tau(x_0, \varepsilon), x_0, \varepsilon) - x_0 \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \dot{\Phi}(T(x_0), x_0) \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(T(x_0), x_0, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(x_0, 0)f(x_0) + x_\varepsilon(T(x_0)), \end{aligned} \quad (12-56)$$

其中 $x_\varepsilon(t)$ 是变分方程

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = A(t)x_\varepsilon(t) + g(x(t), 0) \quad (12-57)$$

对应于初始条件 $x_\varepsilon(0) = 0$ 的解. 将 g 分解为

$$g(x(s), 0) = \frac{f(x(s))g(x(s), 0)}{|f(x(s))|^2}f(x(s)) + \frac{f(x(s)) \wedge g(x(s), 0)}{|f(x(s))|^2}f^\perp(x(s)), \quad (12-58)$$

并利用式 (12-47), 经过一些计算, 我们得到

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(T(x_0)) &= \int_0^{T(x_0)} \Pi_{x_0}(T(x_0), s)g(x(s), 0) ds \\ &= (N(x_0) + \alpha_0(T(x_0))M(x_0))f(x_0) + M(x_0)f^\perp(x_0), \end{aligned} \quad (12-59)$$

其中

$$M(x_0) = \int_0^{T(x_0)} \frac{f(x(s)) \wedge g(x(s), 0)}{\beta_{x_0}(s) |f(x(s))|^2} ds, \quad (12-60)$$

以及

$$\begin{aligned} N(x_0) &= \int_0^{T(x_0)} \frac{f(x(s))g(x(s), 0)}{|f(x(s))|^2} ds - \\ &\quad \int_0^{T(x_0)} \alpha_{x_0}(s) \frac{f(x(s)) \wedge g(x(s), 0)}{\beta_{x_0}(s) |f(x(s))|^2} ds. \end{aligned} \quad (12-61)$$

将所得一切放在一起, 在任何点 $x \in \Sigma$, 我们有

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\tau(x, \varepsilon), x, \varepsilon) - x \right|_{x=0} \\ &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(x, 0) + N(x) + \alpha_x(T(x))M(x) \right) f(x) + M(x)f^\perp(x). \end{aligned} \quad (12-62)$$

现在, 我们固定 x_0 , 并选择 $\Sigma = \{x_0 + f(x_0)^\perp v \mid v \in \mathbb{R}\}$. 于是位移函数是

$$\Delta(v, \varepsilon) = (\Phi(\tau(x, \varepsilon), x, \varepsilon) - x)f^\perp(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)^\perp v, \quad (12-63)$$

以及

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon}(0, 0) = |f^\perp(x_0)|^2 M(x_0). \quad (12-64)$$

此外, 由于 $\Phi(\tau(x_0, \varepsilon), x_0, \varepsilon) \in \Sigma$, 我们有

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) + N(x_0) + \alpha_{x_0}(T(x_0)) = 0, \quad (12-65)$$

以及, 若 $M(x_0) = 0$, 则

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \varepsilon \partial v}(0, 0) = |f^\perp(x_0)|^2 \frac{\partial M}{\partial x}(x_0)f^\perp(x_0). \quad (12-66)$$

定理 12.12 假设对 $\varepsilon = 0$, 式 (12-45) 有周期环面. 如果 Melnikov 积分 $M(x)$ 有零点 x_0 , 在这点 $M(x)$ 在 $f^\perp(x_0)$ 方向的导数不为零, 则对小的 m , 在 x_0 的周期轨道得到保持.

注意, 我们有

$$M(x(t)) = \beta_{x_0}(t)M(x_0). \quad (12-67)$$

问题 12.2 求证

$$\begin{aligned} \beta_{x(s)}(t) &= \frac{\beta_{x_0}(t+s)}{\beta_{x_0}(s)}, \\ \alpha_{x(s)}(t) &= \frac{1}{\beta_{x_0}(s)}(\alpha_{x_0}(t+s) - \alpha_{x_0}(s)), \end{aligned}$$

以及

$$\beta_{x(s)}(T(x_0)) = 1, \quad \alpha_{x(s)}(T(x_0)) = \frac{\alpha_{x_0}(T(x_0))}{\beta_{x_0}(s)}.$$

12.5 非自治扰动的 Melnikov 方法

现在我们研究非自治扰动的更一般情形. 考虑非自治系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \varepsilon g(t, x(t), \varepsilon), \quad (12-68)$$

或者等价的扩展自治系统

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(\tau, x, \varepsilon), \quad \dot{\tau} = 1. \quad (12-69)$$

假设 $g(t, x, \varepsilon)$ 是周期为 T 的周期函数, 以及, $\varepsilon = 0$ 时未被扰动系统有周期环面.

为了求保持的周期轨道, 我们当然需要要求扩展未被扰动系统有周期轨道. 因此, 需要假设共振条件

$$mT = nT(x_0), \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (12-70)$$

在这个环面上的某周期点 x_0 处成立, 其中 $T(x)$ 表示 x 的周期. 不妨假设 m 和 n 互素. 注意, 我们有 $\beta_{x_0}(nT(x_0)) = 1$ 和 $\alpha_{x_0}(nT(x_0)) = n\alpha_{x_0}(T(x_0))$.

对应于 $\Sigma = \{\tau = t_0 \bmod mT\}$ 的庞加莱 (Poincaré) 映射为

$$P_\Sigma(x, \varepsilon) = \Phi(mT, (x, t_0), \varepsilon), \quad (12-71)$$

位移函数为

$$\Delta(x, \varepsilon) = x(mT, \varepsilon) - x, \quad (12-72)$$

其中 $x(t, \varepsilon)$ 是对应于初始条件 $x(t_0, \varepsilon) = x$ 的解. 注意, 不妨假设 $t_0 = 0$, 且以 $g(s + t_0, x, \varepsilon)$ 代替 $g(s, x, \varepsilon)$.

对 $\Delta(x, \varepsilon)$ 又一次不能直接应用隐函数定理, 因为沿着 $f(x_0)$ 方向的导数为零. 我们将如上一节, 用正则化过程处理这个问题. 但是, 由于现在 $\Delta(x, \varepsilon)$ 是二维的, 可出现两个情形.

第一个情形是, 如果 $\Delta(x, \varepsilon)$ 沿着 $f^\perp(x_0)$ 方向的导数也是零. 例如, 在环面中的周期是常数, 因此 $\Delta(x, 0) = 0$. 这里我们可以除 ε , 再如前进行.

第二个情形是, 如果 $\Delta(x, \varepsilon)$ 沿着 $f^\perp(x_0)$ 方向的导数不等于零. 这里我们不得不用李雅普诺夫-施密特 (Liapunov-Schmidt) 型简化, 将 \mathbb{R}^2 按 $f(x_0)$ 和 $f^\perp(x_0)$ 分解. 一个方向可以直接由隐函数定理处理, 剩余的一个可按第一个情形处理.

由式 (12-50), 在更适当的坐标 $x(u, v)$ 下表示 Δ . 利用上一节的结果我们有

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u}(x_0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial v}(x_0, 0) = n\alpha_{x_0}(T(x_0))f(x_0), \quad (12-73)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) &= x_\varepsilon(mT) = (N(t_0, x_0) + n\alpha_{x_0}(T(x_0))M(t_0, x_0))f(x_0) + \\ &M(t_0, x_0)f^\perp(x_0), \end{aligned} \quad (12-74)$$

其中

$$M(t_0, x_0) = \int_0^{nT(x_0)} \frac{f(x(s)) \wedge g(s + t_0, x(s), 0)}{\beta_{x_0}(s) |f(x(s))|^2} ds \quad (12-75)$$

以及

$$\begin{aligned} N(t_0, x_0) &= \int_0^{nT(x_0)} \frac{f(x(s))g(s + t_0, x(s), 0)}{|f(x(s))|^2} ds - \\ &\int_0^{nT(x_0)} \alpha_{x_0}(s) \frac{f(x(s)) \wedge g(s + t_0, x(s), 0)}{\beta_{x_0}(s) |f(x(s))|^2} ds, \end{aligned} \quad (12-76)$$

注意 $M(t_0 + T, x_0) = M(t_0, x_0)$ 以及 $N(t_0 + T, x_0) = N(t_0, x_0)$.

利用这个记号, 我们现在就可容易地处理等时周期环面的情形, 其中 $T(x) = T(x_0)$ 是常数, 相应地, $\alpha_x(T(x)) = 0$. 由于 $\Delta(x, 0) = 0$, 如前进行, 我们可得到

定理 12.13 假设对 $\varepsilon = 0$, 式 (12-68) 有等时周期环面. 如果函数 $x \mapsto (M(t_0, x), N(t_0, x))$ 在 (t_0, x_0) 有单零点. 则在 (t_0, x_0) 的周期轨道对小的 ε 得到保持.

$\alpha_x(T(x)) \neq 0$ 的情形将在下面考虑. 我们称这时的周期环面为正则周期环面.

将位移函数分解为 (比较式 (12-50))

$$\Delta(x(u, v), \varepsilon) = \Delta_1(u, v, \varepsilon)f(x_0) + \Delta_2(u, v, \varepsilon)f^\perp(x_0). \quad (12-77)$$

则

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial v}(0, 0, 0) = n\alpha_{x_0}(T(x_0)) \neq 0, \quad (12-78)$$

由隐函数定理, 存在函数 $v(u, \varepsilon)$, 使得 $\Delta_1(u, v(u, \varepsilon), \varepsilon) = 0$. 此外, 由 $\Delta(x(u, 0), 0) = 0$, 我们甚至有 $v(u, 0) = 0$. 因此剩下的是求

$$\tilde{\Delta}_2(u, \varepsilon) = \Delta_2(u, v(u, \varepsilon), \varepsilon) \quad (12-79)$$

的零点. 由于 $\tilde{\Delta}_2(u, 0) = \Delta_2(u, 0, 0) = 0$, 我们可以如前, 除 ε 再应用隐函数定理.

现在利用

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}_2}{\partial \varepsilon}(0, 0) = M(t_0, x_0). \quad (12-80)$$

以及, 如果 $M(t_0, x_0) = 0$, 则

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Delta}_2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0) = \frac{\partial M}{\partial x}(t_0, x_0)f(x_0). \quad (12-81)$$

于是我们得到下面结果:

定理 12.14 假设对 $\varepsilon = 0$, 式 (12-68) 有正则周期环面. 如果函数 $x \mapsto M(t_0, x)$ 在 (t_0, x_0) 有零点, 在这点 $M(t_0, x)$ 沿 $f(x_0)$ 的方向的导数不为零, 则在 (t_0, x_0) 的周期轨道对小的 ε 得到保持.

第 13 章 高维系统中的混沌

13.1 Smale 马蹄

在这一节我们将研究帐篷映射的二维类似，并证明它有不变的康托尔 (Cantor) 集，它上面的动力系统是混沌的。下一节我们将看到，它是映射在双曲不动点邻域内具有同宿轨道性态的简单模型。

Smale 马蹄映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D = [0, 1]^2$, 是将 D 沿着 x 方向压缩，沿着 y 方向伸长，然后弯曲，定义如下图：

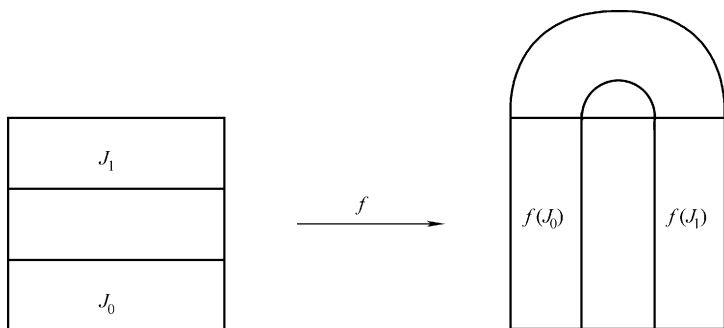


图 13-1

由于我们仅对 D 上的动力学感兴趣，且仅描述这个映射的解析部分。固定 $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, $\mu \in [2, \infty)$, 设

$$J_0 = [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{\mu}\right], \quad J_1 = [0, 1] \times \left[1 - \frac{1}{\mu}, 1\right], \quad (13-1)$$

分别定义

$$f: J_0 \rightarrow f(J_0), \quad (x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y), \quad (13-2)$$

和

$$f: J_1 \rightarrow f(J_1), \quad (x, y) \mapsto (1 - \lambda x, \mu(1 - y)). \quad (13-3)$$

观察两个坐标显示，当 $x \in [0, 1]$ 时 $f_1(x, y) \in [0, 1]$, $f_2(x, y) = T_\mu(y)$. 因此，如果我们要求经过前面 n 次迭代以后仍停留在 D 内，我们就需要从 $\Lambda_{+, n} = [0, 1] \times \Lambda_n(T_\mu)$ 中开始，其中 $\Lambda_n(T_\mu) = \Lambda_n$ 与 T_μ 相同。特别地，如果我们要求对所有正迭代

都停留在 D 内, 我们必须从

$$\Lambda_+ = [0, 1] \times \Lambda(T_\mu) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(D) \quad (13-4)$$

中开始. 但是要注意 f 是可逆的, 其逆分别为

$$g = f^{-1}: K_0 = f(J_0) \rightarrow J_0, \quad (x, y) \mapsto (\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y) \quad (13-5)$$

和

$$g = f^{-1}: K_1 = f(J_1) \rightarrow J_1, \quad (x, y) \mapsto (\lambda^{-1}(1-x), 1-\mu^{-1}y). \quad (13-6)$$

因此, 出于相同的考虑, 若我们要求对所有负迭代都在 D 内, 我们必须从

$$\Lambda_- = \Lambda(T_{1/\lambda}) \times [0, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(D) \quad (13-7)$$

中开始. 最后, 若我们对所有的 (正的和负的) 迭代都要求停留在 D 内, 我们必须从

$$\Lambda = \Lambda_- \cap \Lambda_+ = \Lambda(T_{1/\lambda}) \times \Lambda(T_\mu) \quad (13-8)$$

中开始. 集合 Λ 是康托尔 (Cantor) 集, 因为任何两个康托尔 (Cantor) 集之积仍是康托尔 (Cantor) 集 (证明它).

现在考虑帐篷映射, Λ 中每一点的 y 坐标可由序列 $y_n, n \in \mathbb{N}_0$ 唯一确定. 类似地. Λ 中每一点的 x 坐标可由序列 $x_n, n \in \mathbb{N}_0$ 唯一确定. 因此对 $n \in \mathbb{N}_0$, 定义 $s_n = y_n$ 和 $s_{-n} = x_{n-1}$. 我们看到在 Λ 中的点与两个符号的双向无穷序列之间存在一一对应. 从而我们又一次找到了旅程映射

$$\begin{aligned} \varphi: \Lambda &\rightarrow \Sigma_2 \\ (x, y) &\mapsto s_n = \begin{cases} y_n, & n \geq 0, \\ x_{-n-1}, & n < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (13-9)$$

其中 y_n 由 $f^n(x, y) \in J_{y_n}$ 定义, x_n 由 $g^n(x, y) \in K_{x_n}$ 定义. 如同在帐篷映射情形, 容易看出 φ 连续 (练习). 现在 $\sigma = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 的作用是什么? 由构造, σ 移位 y_n 到左边, $\sigma(s)_n = y_{n+1}, n \geq 0$, 以及 σ^{-1} 将 x_n 移到到左边, $\sigma^{-1}(s)_n = x_{-n-1}, n < 0$. 因此 σ 将 x_n 移到到右边, $\sigma(s)_n = x_{-n-2}, n < -1$. 我们需要断定第一个新元素 $\sigma(s)_{-1}$ 是什么. 由于 $(x, y) \in J_{y_0}$ 等价于 $f(x, y) \in K_{y_0}$, 我们看到, 这个元素是 $\sigma(s)_{-1} = y_0$, 因此 σ 刚好将 s_n 移到到左边, $\sigma(s)_n = s_{n+1}$. 总之, 我们证明了:

定理 13.1 Smale 马蹄有不变康托尔 (Cantor) 集 Λ , 在它上面的动力学等价于两个符号的双向移位. 特别它是混沌的.

13.2 Smale- (伯克霍夫) Birkhoff 同宿定理

这一节我们将叙述定理 11.24 在高维中的类似.

设 f 是 (C^1) 微分同胚, p 是双曲不动点. 同宿点是点 $q \neq p$, 它在稳定和 unstable 流形上. 如果稳定流形和 unstable 流形在 q 横截相交, 则 q 称为是横截的. 这导致存在同宿轨道 $\gamma(q) = \{q_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} q_n = p$. 由于稳定流形和 unstable 流形是

不变的, 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 我们有 $q_n \in W^s(p) \cap W^u(p)$. 此外, 如果 q 是横截的, 由于 f 是微分同胚, 所有的 q_n 也横截.

典型情况描述如下:

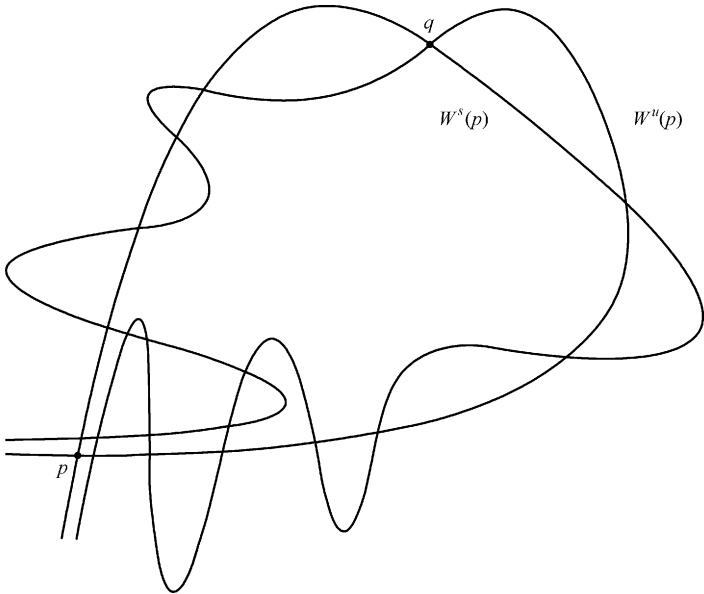


图 13-2

这个图像就是熟知的同宿穿插.

定理 13.2 (Smale- (伯克霍夫) Birkhoff) 假设 f 是具有双曲不动点 p 的微分同胚, 对应的横截同宿点 q . 则某个迭代 f^n 有双曲不变集 Λ , 在 Λ 上它拓扑等价于两个符号的双向无穷移位.

证明的思想是在 f 的某个迭代下寻找马蹄映射. 直觉上, 上面的图像显示, 这可在两个相继同宿点之间取包含不稳定流形的一个峰值的开集来进行. 取这个集合的迭代, 你将最终以围绕稳定流形的类似马蹄集结束, 而暂时不考虑我们原来的集合. 详细见文献 [24].

13.3 同宿轨道的 Melnikov 方法

最后我们比较上一节的 Smale- (伯克霍夫) Birkhoff 定理和 12.5 节的 Melnikov 方法, 以得到常微分方程是混沌的一个准则.

再从平面系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{13-10}$$

开始, 它在不动点 p_0 有同宿轨道 $\gamma(x_0)$. 例如, 我们可以取问题 7.6 中的达芬 (Duffing) 方程 ($\delta = 0$). 未被扰动系统的典型情况如下图所示.

现在我们对这个系统作一点扰动, 考虑

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x). \quad (13-11)$$

由于原来的不动点 p_0 是双曲的, 它对小 ε 得以保持, 称它为 $p_0(\varepsilon)$. 另一方面, 显然, 一般地, $p_0(\varepsilon)$ 的稳定流形和不稳定流形对 $\varepsilon \neq 0$ 不再重合, 因此, 对 $\varepsilon \neq 0$, 在 $p_0(\varepsilon)$ 不存在同宿轨道. 典型情况画在下面.

但是, 显然由于 Poincaré-Bendixson 定理导致平面系统的运动必须非常正则, 这样的扰动不可能产生混沌. 因此, 我们至少需要另外的维数, 为此, 考虑非自治扰动

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(\tau, x, \varepsilon), \quad \dot{\tau} = 1, \quad (13-12)$$

其中 $g(\tau, x, \varepsilon)$ 关于 τ 是周期的, 例如 $g(\tau + 2\pi, x, \varepsilon) = g(\tau, x, \varepsilon)$. 记 $z = (x, \tau)$.

当然, 上面的图像不再显示整个系统, 但对某个固定的 $\tau = t_0$ 它们可视为一个切片. 注意, 当 τ 变化时第一个图像不改变, 第二个将变化. 特别地, $p_0(\tau, \varepsilon)$ 现在对应于双曲周期轨道, 在我们的图像中的流形是 $p_0(\tau, \varepsilon)$ 的稳定流形和不稳定流形与平面 $\Sigma = \{(x, \tau) \mid \tau = t_0\}$ 的交. 此外, 取 Σ 为对应的 Poincaré 映射 P_Σ 的截面, 这些交刚好是 P_Σ 的不动点 $p_0(\varepsilon) = p_0(\tau, \varepsilon)$ 的稳定流形和不稳定流形. 因此, 如果我们能够求得横截交点, 则 Smale-Birkhoff 定理告诉我们, 存在接近于这点的不变的康托尔 (Cantor) 集, 在那里 Poincaré 映射是混沌的.

现在, 剩下来是寻求这种横截交点存在性的好准则. 以 $g(\tau - t_0, x, \varepsilon)$ 代替 $g(\tau, x, \varepsilon)$, 不妨假设 $t_0 = 0$. 用 $W(p_0) = \{(\Phi(x_0, s), \tau) \mid (s, \tau) \in \mathbb{R} \times S^1\}$ 记周期轨道 (p_0, τ) 的 (不) 稳定流形. 于是, 对任何给定点 $z_0 = (x_0, t_0) \in W(p_0)$, 扰动的稳定流形和不稳定流形分离的好度量是对应交点与通过 z_0 并和向量场垂直的直线之间的距离. 即, 以 $z_0^+(\varepsilon)$, $z_0^-(\varepsilon)$ 分别记稳定流形, 不稳定流形与直线 $\{(x_0 + u f(x_0)^\perp, 0) \mid u \in \mathbb{R}\}$ 的交点. 则流形的分离由

$$\begin{aligned} \Delta(z_0, \varepsilon) &= f(x_0)^\perp (x_0^-(\varepsilon) - x_0^+(\varepsilon)) \\ &= f(x_0) \wedge (x_0^-(\varepsilon) - x_0^+(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (13-13)$$

测量. 由于 $\Delta(z_0, 0) = 0$, 我们可以应用如在 12.4 节相同的分析, 得知, 如果 $\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon}(z_0, 0)$ 有单个零点, 则对小的 ε , $\Delta(z_0, \varepsilon)$ 有零点. 此外, 如果 $\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon}(z_0, 0)$ 的零点是单的, 这也等价于稳定流形和不稳定流形的相交是横截的.

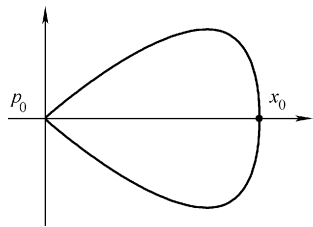


图 13-3

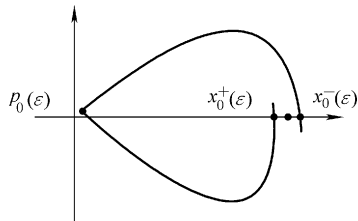


图 13-4

剩下的是计算 $\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon}(z_0, 0)$, 它可用如 12.4 节相同的思想来做. 设 $z^\pm(t, \varepsilon) = (x^\pm(t, \varepsilon), t)$ 是 $W^\pm(\gamma(p_0(\varepsilon)))$ 中满足 $z^\pm(0, \varepsilon) = z_0^\pm(\varepsilon)$ 的轨道. 则我们有

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon}(z_0, 0) = f(x_0) \wedge (x_{\varepsilon}^-(0) - x_{\varepsilon}^+(0)), \quad (13-14)$$

其中 $x_{\varepsilon}^\pm(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x^\pm(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ 是对应变分方程的解. 但是, 由于我们不知道初始条件 (我们仅仅知道渐近性态), 较好的是考虑

$$y^\pm(t) = f(x_0(t)) \wedge \lambda x_{\varepsilon}^\pm(t), \quad x_0(t) = \Phi(t_0, x_0). \quad (13-15)$$

利用变分方程

$$\dot{x}_{\varepsilon}^\pm(z_0, t) = A(t)x_{\varepsilon}^\pm(t) + g(t - t_0, x_0(t), 0), \quad A(t) = df_{x_0(t)}, \quad (13-16)$$

经过简单计算, 我们得到 (问题 13.1)

$$y^\pm(t) = \text{tr}(A(t))y^\pm(t) + f(x_0(t)) \wedge g(t - t_0, x_0(t), 0), \quad (13-17)$$

因此

$$\dot{y}^\pm(t) = \dot{y}^\pm(T_\pm) + \int_{T_\pm}^t e^{\int_s^t \text{tr}(A(r)) dr} f(x_0(s)) \wedge g(s - t_0, x_0(s), 0) ds. \quad (13-18)$$

接下来, 取极限 $T_\pm \rightarrow \pm \infty$ 以除去在 T_\pm 的边界项. 只要 $x_{\varepsilon}^\pm(T_\pm)$ 保持有界它们将为零, 因为 $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} f(x_0(t)) = f(p_0) = 0$. 事实上, 这由下面引理得知.

引理 13.3 扰动周期轨道 $p_0(\varepsilon)$ 的稳定流形和不稳定流形局部地由

$$W^\pm(\gamma(p_0(\varepsilon))) = \{ (\Phi(s, x_0) + h^\pm(\tau, s)\varepsilon + o(\varepsilon), \tau) \mid (s, \tau) \in S^1 \times \mathbb{R} \} \quad (13-19)$$

给出, 其中 $x_0 \in W(p_0)$ 是不动点, 当 $s \rightarrow \pm \infty$ 时 $h^\pm(\tau, s)$ 有界.

证明 由定理 12.10, $W^\pm(\gamma(p_0(\varepsilon)))$ 中的点局部地可写为

$$(p_0 + h_0^\pm(\tau, a) + h_1^\pm(\tau, a)\varepsilon + o(\varepsilon), \tau). \quad (13-20)$$

此外, 固定 $x_0 \in W(p_0)$, 存在唯一的 $s = s(\tau, a)$, 使得

$$p_0 + h_0^\pm(\tau, a, 0) = \Phi(s, x_0). \quad (13-21)$$

因此, 我们可以选取 $h^\pm(\tau, s) = h_1^\pm(\tau, a(\tau, s))$. □

从而, 我们甚至有

$$y^\pm(t) = \int_{\pm \infty}^t e^{\int_s^t \text{tr}(A(r)) dr} f(x_0(s)) \wedge g(s - t_0, x_0(s), 0) ds. \quad (13-22)$$

因而, 最后有

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon}(z_0, 0) = M_{x_0}(t_0), \quad (13-23)$$

其中 $M_{x_0}(t_0)$ 是同宿 Melnikov 积分

$$M_{x_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_0^s \text{div}(f(\Phi(r, x_0))) dr} f(\Phi(s, x_0)) \wedge g(s - t, \Phi(s, x_0), 0) ds. \quad (13-24)$$

注意, 同宿轨道上的基本点 x_0 不是本质的, 因为我们有 (问题 13.2)

$$M_{\Phi(t, x_0)}(t_0) = e^{\int_0^t \operatorname{div}(f(\Phi(r, x_0))) dr} M_{x_0}(t + t_0). \quad (13-25)$$

总之, 我们证明了:

定理 13.4 (Melnikov) 假设对某个 $t \in \mathbb{R}$ 同宿 Melnikov 积分 $M_{x_0}(t)$ 有单零点, 则对充分小 $\varepsilon \neq 0$, 庞加莱 Poincaré 映射 P_{Σ} 有横截同宿轨道.

例如, 考虑强迫 Duffing 方程 (比较问题 7.6)

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = q - q^3 - \varepsilon(\delta p + \gamma \cos(\omega \tau)), \quad \dot{\tau} = 1. \quad (13-26)$$

同宿轨道是

$$q_0(t) = \sqrt{2} \operatorname{sech}(t), \quad p_0(t) = -\sqrt{2} \tanh(t) \operatorname{sech}(t), \quad (13-27)$$

因此,

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} q_0(s) (\delta p_0(s) + \gamma \cos(\omega(s-t))) ds \\ &= \frac{4\delta}{3} - \sqrt{2} \pi \gamma \omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (13-28)$$

由此, 对充分小的 δ, γ 只要

$$\left| \frac{\delta}{\gamma} \right| < \frac{3\sqrt{2}\pi|\omega|}{4} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right), \quad (13-29)$$

达芬 (Duffing) 方程是混沌的.

问题 13.1 对 $x, y \in \mathbb{R}^2$ 和 $A \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$, 证明下面的公式

$$Ax \wedge y + x \wedge Ay = \operatorname{tr}(A) x \wedge y.$$

问题 13.2 证明式 (13-25).

问题 13.3 应用 Melnikov 方法到强迫数学摆 (比较 6.7 节)

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\sin(q) + \varepsilon \sin(t).$$

参 考 文 献

- [1] R Abraham, J E Marsden, and T Ratiu. Manifolds, Tensor Analysis, and Applications [M] . 2nd ed. New York: Springer, 1983.
- [2] V I Arnold. Mathematical methods of classical mechanics [M] . 2nd ed. New York: Springer, 1989.
- [3] V I Arnold. Gewöhnliche Differentialgleichungen [M] . Berlin: Springer, 1980.
- [4] F Brauer and J A Nohel. Ordinary Differential Equations: A First Course [M] . 2nd ed. New York: W. A. Benjamin, 1973.
- [5] C. Chicone. Ordinary Differential Equations with Applications [M] . New York: Springer, 1999.
- [6] E A Coddington and N Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations [M] . New York: McGraw-Hill, 1995.
- [7] R L Devaney. An introduction to Chaotic Dynamical Systems [M] . 2nd ed. Redwood City: AddisonWesley, 1989.
- [8] K Falconer. Fractal Geometry [M] . Menlo Park: Benjamin/Clummings Publishing, 1986.
- [9] A Gray, M Mezzino, and M A Pinsky. Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica [M] . New York: Springer, 1997.
- [10] J Guckenheimer and P Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M] . New York: Springer, 1983.
- [11] P Hartman. Ordinary Differential Equations [M] . 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2002.
- [12] M W Hirsch, S Smale, and R L Devaney. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos [M] . Amsterdam: Elsevier, 2004.
- [13] J Hofbauer and K Sigmund. Evolutionary Games and Replicator Dynamics [M] . Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [14] R A Holmgren. A First Course in Discrete Dynamical Systems [M] . 2nd ed. New York: Springer, 1996.
- [15] K Jänich. Analysis [M] . 2nd ed. Berlin Springer, 1990.
- [16] E L Ince. Ordinary Differential Equations [M] . New York: Dover Publ, 1956.
- [17] E Kamke. Differentialgleichungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen [M] . New York: Springer, 1997.
- [18] J L Kelly. General Topology [M] . New York: Springer, 1955.
- [19] B M Levitan and I S Sargsjan. Introduction to Spectral Theory [M] . Providence: Amer Math Soc, 1975.
- [20] J Moser. Stable and Random Motions in Dynamical Systems: With Special Emphasis on Celestial Mechanics [M] . Princeton: Princeton University Press, 2001.
- [21] R S Palais. The symmetries of solitons [J] . Bull Amer Math Soc, 1997, 34, 339-403.
- [22] J Palis and W de Melo. Geometric Theory of Dynamical Systems [M] . New York: Springer, 1982.

- [23] L Perko. Differential Equations and Dynamical Systems [M] . 2nd ed. New York: Springer, 1996.
- [24] C Robinson. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos [M] . Boca Raton: CRC Press, 1995.
- [25] C Robinson. Introduction to Dynamical Systems: Discrete and Continuous [M] . New York: Prentice Hall, 2004.
- [26] C A Rogers. Hausdorff Measures [M] . Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
- [27] D Ruelle. Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory [M] . San Diego: Academic Press, 1988.
- [28] D Schwalbe and S Wagon. VisualDSolve. Visualizing Differential Equations with Mathematica [M] . New York: Springer, 1997.
- [29] C Sparrow. The Lorenz Equation, Bifurcations, Chaos and Strange Attractors [M] . New York: Springer, 1982.
- [30] F Verhulst. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems [M] . Berlin: Springer, 1990.
- [31] W Walter. Gewöhnliche Differentialgleichungen [M] . Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1962.
- [32] J Weidmann. Linear Operators in Hilbert Spaces [M] . New York: Springer, 1980.
- [33] S Wiggins. Global Bifurcations and Chaos [M] . 2nd ed. New York: Springer, 1988.
- [34] S Wiggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M] . New York: Springer, 1990.
- [35] S Wolfram. The Mathematica Book [M] . 4th ed. Champaign/Cambridge: Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
- [36] D Zwillinger. Handbook of Differential Equations [M] . San Diego: Academic Press, 1989.

记号术语表

A_{\pm}	——矩阵 A 在 $E^{\pm}(A)$ 上的限制.	$\text{Per}(f)$	$=f$ 的周期点集 $\{x f(x)=x\}$
$B_{\varepsilon}(x)$	——中心在 x 半径为 ε 的开球.	$\Phi(t, x_0)$	——动力系统的流
$C(U, V)$	——从 U 到 V 的连续函数集.	$\mathbf{H}(t, t_0)$	——线性系统的主解矩阵
$C(U)$	$=C(U, \mathbb{R})$	\mathbb{R}	——实数集
$C^k(U, V)$	—— k 次连续可微函数集.	σ	—— Σ_N 上的移位映射
\mathbb{C}	——复数集	$\sigma(A)$	——矩阵的谱 (特征值集)
χ_A	—— A 的特征多项式	Σ_N	—— N 个符号的序列空间
$d(U)$	—— U 的直径	$\text{sign}(x)$	—— $x > 0$ 时为 $+1$, $x < 0$ 时为 -1 ; 符号函数
$d(x, y)$	——距离空间的距离	$T_{\pm}(x)$	—— x 的正, 负生命时间
df_x	$= \frac{\partial f}{\partial x}$ 可微映射 f 在 x 的雅可比 (Jacobi) 矩阵	$T(x)$	—— x 的周期 (如果 x 是周期点)
$E^0(A)$	——矩阵的中心子空间	T_{μ}	——帐篷映射
$E^{\pm}(A)$	——矩阵的 (不) 稳定子空间	$\omega_{\pm}(x)$	—— x 的正, 负 ω -极限集
$\text{Fix}(f)$	$=f$ 的不动点集 $\{x f(x)=x\}$	W^{\pm}	——(不) 稳定集
$\gamma(x)$	—— x 的轨道	\mathbb{Z}	——整数集
$\gamma_{\pm}(x)$	—— x 的向前轨道和向后轨道	z	——复数
\mathfrak{H}_0	——内积空间	\sqrt{z}	—— z 沿着 $(-\infty, 0)$ 分支切割的 平方根
I_x	$= (T_-(x), T_+(x))$	z^*	——复共轭
L_{μ}	——逻辑斯谛 (logistic) 映射	$\ \cdot\ $	——巴拿赫 (Banach) 空间的范数
Λ	——紧不变集	$ \cdot $	—— \mathbb{R}^n 和 \mathbb{C}^n 的欧几里得范数
M^{\pm}	——(不) 稳定流形	$\langle \cdot, \cdot \rangle$	—— \mathfrak{H}_0 中的数量积
\mathbb{N}	——正整数集	(λ_1, λ_2)	$= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$, 开区间
\mathbb{N}_0	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$	$[\lambda_1, \lambda_2]$	$= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}$, 闭区间
$o(\cdot)$	——Landau 符号	$ x $	$= \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$, 下取整函数
$O(\cdot)$	——Landau 符号	$ x $	$= \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$, 上取整函数
$\Omega(f)$	——非游荡点集	$a \wedge b$	$= \mathbb{R}^3$ 中的叉积
$P_{\Sigma}(y)$	——庞加莱 (Poincaré) 映射		

索引

Abel 恒等式

作用积分

作用变量

角变量

角矩

弧

渐近相

渐近稳定性

吸引集

吸引子

奇怪吸引子

自治微分方程

向后渐近

巴拿赫 (Banach) 代数

巴拿赫 (Banach) 空间

吸引盆

正交基

Bendixson 准则

伯努利 (Bernoulli) 方程

贝塞尔 (Bessel) 方程

贝塞尔 (Bessel) 函数

贝塞尔 (Bessel) 不等式

分支点

分支理论

边界条件

狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件

诺伊曼 (Neumann) 边界条件

边值问题

典则变换

康托尔 (Cantor) 集

柯西 (Cauchy) 序列

柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式

中心

特征指数

特征乘子

特征多项式

换位子

完全积分

汇合超几何方程

共轭

拓扑共轭

常数运动

压缩原理

覆盖

循环向量

达朗贝尔 (d'Alembert) 约化

阻尼

临界阻尼

过度阻尼

低阻尼

阻尼因子

直径

差分方程

微分方程

微分方程的阶

自治微分方程

恰当微分方程

齐次方程

微分方程的积分因子

线性微分方程

常微分方程

偏微分方程

分离变量方程

微分方程的解

微分方程系统

丢番图 (Diophantine) 条件

- 方向场
- 吸引域
- 控制函数
- 达芬 (Duffing) 方程
- Dulac 准则
- 动力系统
 - 混沌动力系统
 - 连续动力系统
 - 离散动力系统
 - 可逆动力系统
- 特征空间
 - 广义特征空间
- 特征值
 - 单特征值
- 特征向量
- 爱因斯坦 (Einstein) 方程
- 平衡点 (见不动点)
- 等价性
 - 拓扑等价性
- 欧拉 (Euler) 常数
- 欧拉 (Euler) 方程
- 欧拉 (Euler) 系统
- 欧拉 (Euler) 公式
- 欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程
- Fermi-Pasta-Ulam 实验
- 斐波那契 (Fibonacci) 数
- 首次积分
- 第一变分方程
 - 周期点的第一变分方程
- 不动点
 - 渐近稳定不动点
 - 双曲不动点
 - 稳定不动点
- 不动点定理
 - 不动点的压缩原理
 - Weissinger 不动点压缩原理
- 弗洛凯 (Floquet) 判别式
- 弗洛凯 (Floquet) 指数
- 弗洛凯 (Floquet) 乘子
- 弗洛凯 (Floquet) 解
- 流
- 向前渐近
- 弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 方法
- Fuchs 系统
- 基本解矩阵
- 梯度系统
- 格林 (Green) 函数
- 格林 (Green) 公式
- 哈密顿 (Hamilton) 力学
- 哈密顿 (Hamilton) 原理
- 哈默斯坦 (Hammerstein) 积分方程
- 汉克尔 (Hankel) 函数
- 调和数
- 调和振子
- Hartman-Grobman 定理
- Hartman-Grobman 映射
- 豪斯多夫 (Hausdorff) 维数
- 豪斯多夫 (Hausdorff) 测度
- Heun 方法
- 希尔伯特 (Hilbert) 空间
- 希尔 (Hill) 方程
- 同宿轨道
- 同宿点
- 同宿横截
- 同宿穿插
- 霍普夫 (Hopf) 分支
- 双曲性
- 超几何方程
- 格朗沃尔 (Gronwall) 不等式
- 初值问题
- 内积
- 内积空间

积分曲线

 最大积分曲线

积分方程

 哈密斯坦 (Hammerstein) 积分方程

 沃尔泰拉 (Volterra) 积分方程

等倾线

迭代映射

雅可比 (Jacobi) 恒等式

若尔当 (Jordan) 块

若尔当 (Jordan) 标准形

若尔当 (Jordan) 实标准形

若尔当 (Jordan) 曲线

基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律

Krasovskii-LaSalle 原理

克罗内克 (Kronecker) 环面

拉格朗日 (Lagrange) 函数

拉普拉斯 (Laplace) 变换

洛朗 (Laurent) 级数

拉克斯 (Lax) 方程

拉克斯 (Lax) 偶

勒让德 (Legendre) 方程

莱布尼茨 (Leibniz) 法则

李纳 (Liénard) 方程

李雅普诺夫 (Liapunov) 函数

严格李雅普诺夫 (Liapunov) 函数

李 (Lie) 导数

生命时间

刘维尔 (Liouville) 公式

利普希茨 (Lipschitz) 连续

逻辑斯谛 (logistic) 映射

洛伦兹 (Lorenz) 方程

流形

 不动点的 (不) 稳定流形

 线性 (不) 稳定流形

 周期点的 (不) 稳定流形

中心流形, 线性中心流形

 稳定流形

 不稳定流形

数学摆

矩阵

 矩阵指数

 矩阵对数

 矩阵范数

测度

 豪斯多夫 (Hausdorff) 测度

 外测度

梅利尼科夫 (Melnikov) 积分

 同宿轨道的梅利尼科夫 (Melnikov) 积分

 周期轨道的梅利尼科夫 (Melnikov) 积分

单值矩阵

N-体问题

幂零矩阵

非共振

非游荡

范数

规范化

欧姆定律

Ω 极限集

算子

 有界算子

 紧算子

 算子定义域

 对称算子

轨道

 渐近稳定轨道

 闭轨

 异宿轨道

 同宿轨道

 周期轨道

 稳定轨道

正交

- 平行四边形规则
 完满
 周期环面
 等时周期环面
 正则周期环面
 倍周期
 周期轨道
 稳定周期轨道
 周期点
 吸引周期点
 双曲周期点
 周期点周期
 排斥周期点
 周期解
 周期解的稳定性
 垂直
 相空间
 Picard 迭代
 叉分支
 Pochhammer 符号
 庞加莱 (Poincaré) 映射
 庞加莱-安德罗诺夫-霍普夫 (Poincaré-Andronov-Hopf) 分支
 非游荡点
 泊松 (Poisson) 括号
 幂级数
 普吕弗 (Prüffer) 变量
 主解矩阵
 毕达哥拉斯 (Pythagorean) 定理
 拟周期
 降阶
 正则点
 相对论力学
 排斥子
 奇怪排斥子
- 预解式
 共振
 里卡蒂 (Riccati) 方程
 黎曼 (Riemann) 方程
 黎曼 (Riemann) 符号
 RLC 电路
 龙格-库塔 (Runge-Kutta) 算法
 鞍点
 鞍结点分支
 Sarkovskii 序
 数量积
 薛定谔 (Schrödinger) 方程
 敏感依赖性
 变量分离
 吸引集
 双曲吸引集
 双曲排斥集
 不变集
 排斥集
 移位映射
 奇点 (见不动点)
 奇点
 正则奇点
 简单奇点
 汇
 Smale 马蹄
 小除数
 迅速跳回排斥子
 解
 矩阵解
 下解
 上解
 源
 谱半径
 谱定理
 谱
 稳定性

- 稳定集
 驻定点 (见不动点)
 奇怪吸引子
 施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题
 子流形
 有限型子移位
 子空间
 中心子空间
 不变子空间
 稳定子空间
 不稳定子空间
 约化子空间
 叠加原理
 符号空间

 辛梯度
 辛群
 辛映射
 辛矩阵
 辛二型

 帐篷映射

 Arzela-Ascoli 定理
 Cayley-Hamilton 定理
 控制收敛定理
 弗洛凯 (Floquet) 定理
 富克斯 (Fuchs) 定理
 Hartman-Grobman 定理
 若尔当 (Jordan) 曲线定理
 KAM 定理
 李雅普诺夫 (Liapunov) 定理
 梅利尼科夫 (Melnikov) 定理
 诺特 (Noether) 定理
 佩亚诺 (Peano) 定理
 皮卡-林德勒夫 (Picard-Lindelöf) 定理
 庞加莱 (Poincaré) 回归定理
 庞加莱-本迪克松 (Poincaré-Bendixson) 定理
 毕达哥拉斯 (Pythagorean) 定理

 Smale-Birkhoff 同宿定理
 稳定流形定理
 施图姆 (Sturm) 比较定理
 Weissinger 定理
 时间-1-映射
 全不连通
 轨线
 超临界分支
 保纤维变换
 传递矩阵
 不可约传递矩阵
 传递性
 捕获区域
 二体问题

 一致压缩原理
 单位向量
 不稳定集

 范德波尔 (van der Pol) 方程
 变量
 因变量
 自变量
 常数 (参数) 变易法
 向量场
 完全向量场
 向量空间
 完备向量空间
 赋范向量空间
 沃尔泰拉 (Volterra) 积分方程
 沃尔泰拉-洛特加 (Volterra-Lotka) 方程

 波动方程
 适定
 外尔 (Weyl) m -函数
 朗斯基 (Wronskian) 行列式
 修改的朗斯基 (Wronskian) 行列式

 Zeta 函数