PRÜFUNGSAUFGABEN

Aufgabe 1. Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

(1) Wie ist der n-te Fourierkoeffizient von f definiert? Wie lautet die Fourierreihe von f?
(2) Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = x$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

Aufgabe 2. Sei f eine stetige Funktion auf dem Einheitskreis.

(1) Ist die Fourierreihe von f eindeutig? Begründen Sie warum.
(2) Verwenden Sie (1), um zu zeigen, dass die Partialsummen $S_N(f)$ der Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergieren, falls $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$.
(3) Sei f stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.
(4) Begründen Sie, warum die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert, falls f C^2 ist.

Aufgabe 3. Seien f und g zwei 2π-periodische Riemann-integrierbare Funktionen.

(1) Was ist die Faltung $f * g$? Beschreiben Sie die wichtigsten Eigenschaften der Faltung.
(2) Zeigen Sie, dass $S_N(f) = f * D_N$ gilt, wobei D_N der N-te Dirichletkern ist.

Aufgabe 4. (1) Was sind gute Kerne?
(2) Führen Sie einige Beispiele guter Kerne an und begründen Sie.
(3) Ist die Familie der Dirichletkerne eine Familie guter Kerne? Warum?
(4) Welche Rolle spielen gute Kerne in der Theorie der Fourierreihen?

Aufgabe 5. (1) Was ist Cesáro-Summierbarkeit?
(2) Was besagt Fejérs Theorem?
(3) Schließen Sie aus Fejérs Theorem, dass die trigonometrischen Polynome dicht in den 2π-periodischen stetigen Funktionen liegen.
(4) Was ist Abel-Summierbarkeit?
(5) Beschreiben Sie die Lösung des Dirichletproblems auf der Einheitskreisscheibe.

Aufgabe 6. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Einheitskreis.

(1) Beweisen Sie, dass $S_N(f)$ im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.
(2) Formulieren Sie die Parseval-Identät.
(3) Was besagt die Bessel-Ungleichung?
(4) Folgern Sie das Riemann-Lebesgue Lemma aus der Parseval-Identät.
(5) Zeigen Sie, dass das Riemann-Lebesgue Lemma impliziert, dass jede Riemann-integrierbare Funktion f auf $[-\pi, \pi]$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(Nt)\, dt = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(Nt)\, dt = 0.$$

erfüllt.
(6) Beschreiben Sie, was Sie über die punktweise Konvergenz von Fourierreihen wissen.

Aufgabe 7. (1) Was sind reguläre einfach geschlossene Kurven in der Ebene?

(2) Wie ist die Länge einer regulären einfach geschlossenen Kurven in der Ebene definiert?
(3) Wie ist die Flächeninhalt des Bereichs, der von einer regulären einfach geschlossenen Kurve eingeschlossen wird, definiert?
(4) Beweisen Sie die isoperimetrische Ungleichung für reguläre Kurven in der Ebene.

Aufgabe 8. (1) Wie ist die Fouriertransformation für Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert? Für welche Funktionen macht die Definition Sinn, und warum?
(2) Was ist der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und warum haben wir ihn eingeführt?
(3) Nennen Sie Beispiele von Funktionen, die im Schwartzraum liegen.
(4) Führen Sie die wichtigsten Eigenschaften der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ an und begründen Sie sie.
(5) Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch $\widehat{f}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt.

Aufgabe 9. (1) Berechenen Sie die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-\pi x^2}$.
(2) Was ist die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-\pi\delta x^2}$ für $\delta > 0$.
(3) Warum ist $K_\delta(x) := \delta^{-1/2}e^{-\pi x^2/\delta}$ für $\delta > 0$ eine Familie guter Kerne?
(4) Wie ist die Faltung zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert?
(5) Begründen Sie, warum $K_\delta * f$ für $\delta \to 0$ gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert.

Aufgabe 10. (1) Was besagt das Fourier-Inversionstheorem?
(2) Erklären Sie die wesentlichen Beweisschritte.
(3) Wie wirkt die Fouriertransformation auf der Faltung zweier Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?
(4) Erläutern Sie das Theorem von Plancherel.
(5) Beweisen Sie das Theorem von Plancherel.

Aufgabe 11. (1) Was besagt die Poissonsche Summenformel?
(2) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Begründen Sie, warum die Funktion $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ wohldefiniert, stetig auf $\mathbb{R}$ und 1-periodisch ist.
(3) Können Sie die Poissonsche Summenformel beweisen?
(4) Kennen Sie eine Anwendung der Poissonsche Summenformel?

Aufgabe 12. (1) Was besagt die Heisenbergsche Unschärferelation?
(2) Erklären Sie die Unschärferelation anhand der Gaußkerne K_δ.
(3) Was wissen Sie über die zeitabhängige Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$?