Wir wollen die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit der Anfangsposition

$$u(x,0) = f(x) = \sin(2x)$$

und der Anfangsgeschwindigkeit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sin(x)$$

lösen.

1. Methode. Für $g(x) = 0$ ergibt D'Alemberts Formel die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\sin(2x+2t) + \sin(2x-2t)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\sin(2x)\cos(2t) - \cos(2x)\sin(2t) + \sin(2x)\cos(2t) + \cos(2x)\sin(2t)\big) \\ &= \cos(2t)\sin(2x) \end{aligned}$$

Mit der Anfangsgeschwindigkeit $g(x) = \sin(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \cos(2t)\sin(2x) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin(y)\,dy \\ &= \cos(2t)\sin(2x) + \frac{1}{2}\Big[-\cos(y)\Big]_{x-t}^{x+t} \\ &= \cos(2t)\sin(2x) + \frac{1}{2}\big(-\cos(x+t) + \cos(x-t)\big) \\ &= \cos(2t)\sin(2x) + \frac{1}{2}\big(-\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t) + \cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)\big) \\ &= \cos(2t)\sin(2x) + \sin(t)\sin(x). \end{aligned}$$

2. Methode. Die 2. Methode der stehendenden Wellen ergab die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \big(A_m\cos(mt) + B_m\sin(mt)\big)\,\sin(mx).$$

Insbesondere gilt

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\sin(mx) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} mB_m\sin(mx).$$

Für $f(x) = \sin(2x)$ erhalten wir also $A_2 = 1$ und $A_m = 0$ für alle $m \neq 2$. Ähnlich folgt $B_m = 0$ für alle m, falls $g(x) = 0$, und $B_1 = 1$ und $B_m = 0$ für alle $m \neq 1$, falls $g(x) = \sin(x)$. Wir gelangen also zu den gleichen Ergebnissen.