

# ÜBUNGSAUFGABEN ZUR VORLESUNG GEOMETRIE UND LINEARE ALGEBRA FÜR DAS LEHRAMT

ZUSAMMENGESTELLT VON A. RAINER

*Sommersemester 2020*

## 1. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 2. BIS 6. MÄRZ

**Aufgabe 1.1.** Seien  $(K_1, +, \cdot)$  und  $(K_2, +, \cdot)$  zwei Körper. Wir erinnern uns, dass eine Abbildung  $f : K_1 \rightarrow K_2$  ein Körperhomomorphismus ist, wenn für alle  $x, y \in K_1$

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,
- $f(xy) = f(x)f(y)$  und
- $f(1) \neq 0$

gilt. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen gelten:

- (1)  $f(0) = 0$ .
- (2)  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in K_1$ ,
- (3)  $f(1) = 1$ .
- (4) Wenn  $x \neq 0$  ist, dann ist  $f(x) \neq 0$  und  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ .

*Lösung.* (1)  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  impliziert

$$0 = f(0) + (-f(0)) = (f(0) + f(0)) + (-f(0)) = f(0) + (f(0) + (-f(0))) = f(0).$$

(2) Nach (1) folgt

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

also  $f(-x) = -f(x)$ .

(3) Es gilt

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$$

und somit  $f(1) = 1$ , weil  $f(1) \neq 0$ .

(4) Mit (3) erhalten wir

$$1 = f(1) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x)f(x^{-1}).$$

Damit folgt  $f(x) \neq 0$  und  $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ .

**Aufgabe 1.2.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Körperhomomorphismus.

- (1) Beweisen Sie, dass  $f(x) = x$  für alle rationalen Zahlen  $x \in \mathbb{Q}$ . Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für natürliche  $x \in \mathbb{N}$ , dann für ganze Zahlen  $x \in \mathbb{Z}$  und schließlich für rationale  $x \in \mathbb{Q}$ , indem Sie Aufgabe 1.1 verwenden.

- (2) Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq y$  auch  $f(x) \leq f(y)$  gilt. Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für  $x = 0$  und verwenden Sie, dass jedes  $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  in der Form  $y = z^2$  mit  $z \in \mathbb{R}$  geschrieben werden kann.
- (3) Schließen Sie, dass  $f(x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, d.h., die Identität ist der einzige Körperhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Hinweis: Verwenden Sie, dass  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  dicht liegt.

*Lösung.* (1) Wir beweisen  $f(n) = n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit Induktion nach  $n$ . Es gilt  $f(0) = 0$  nach Aufgabe 1.1(1). Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass  $f(n) = n$  für ein natürliches  $n$  schon gezeigt ist. Dann gilt

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = n + 1,$$

wegen der Induktionsannahme und Aufgabe 1.1(3).

Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und  $m := -n$ . Dann gilt mit Aufgabe 1.1(2) und dem ersten Absatz

$$f(m) = f(-n) = -f(n) = -n = m.$$

Damit folgt die Aussage für alle ganzen Zahlen.

Jede rationale Zahl  $r \in \mathbb{Q}$  kann in der Form  $r = \frac{p}{q} = pq^{-1}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $q \neq 0$  geschrieben werden. Somit gilt mit Aufgabe 1.1(4) und der Aussage für ganze Zahlen

$$f(r) = f(pq^{-1}) = f(p)f(q^{-1}) = f(p)f(q)^{-1} = pq^{-1} = r.$$

- (2) Sei  $y \geq 0$ . Es existiert  $z \in \mathbb{R}$  mit  $y = z^2$ . Dann folgt mit Aufgabe 1.1(1)

$$f(y) = f(z^2) = f(z)^2 \geq 0 = f(0).$$

Nun sei  $x \leq y$ , d.h.  $y - x \geq 0$ . Nach dem ersten Teil folgt

$$0 \leq f(y - x) = f(y + (-x)) = f(y) - f(x)$$

und damit  $f(x) \leq f(y)$ .

(3) Angenommen es existiert ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) \neq x$ . Nehmen wir an  $f(x) < x$ . Dann existiert ein  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $f(x) < r < x$ . Wegen (1) und (2) gilt dann  $f(x) < r = f(r) \leq f(x)$ . Das ist ein Widerspruch zu  $f(x) < r$ . Ähnlich argumentiert man, wenn  $f(x) > x$ .

**Aufgabe 1.3.** Für diese Aufgabe sei vorausgesetzt, dass wir wissen, dass für jede positive reelle Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  die Gleichung  $x^2 = \alpha$  genau zwei reelle Lösungen besitzt, nämlich  $\pm\sqrt{\alpha}$ .

- (1) Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$ . Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$ax^2 + bx + c = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

- (2) Schließen Sie, dass die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  keine reelle Lösung hat, wenn  $b^2 - 4ac < 0$  ist, genau eine reelle Lösung hat, wenn  $b^2 - 4ac = 0$  gilt, und zwei reelle Lösungen besitzt, wenn  $b^2 - 4ac > 0$  ist. Zeigen Sie weiters, dass die Lösungen (falls sie existieren) durch die Formel

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben sind.

*Lösung.* (1) Wir verwenden *quadratische Ergänzung*:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

(2) Die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ist nach (1) äquivalent zu:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (1)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist positiv, Null oder negativ je nachdem, ob  $b^2 - 4ac$  positiv, Null oder negativ ist. Wenn  $b^2 - 4ac > 0$ , dann hat die Gleichung zwei reelle Lösungen, nämlich

$$x_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Wenn  $b^2 - 4ac = 0$ , dann ist

$$x = -\frac{b}{2a} \pm 0 = -\frac{b}{2a}$$

die einzige Lösung. Wenn  $b^2 - 4ac < 0$ , dann ist die rechte Seite der Gleichung (1) negativ, während die linke Seite positiv ist. Daher kann es keine reelle Lösung geben.

**Aufgabe 1.4.** Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  folgende Aussagen gelten:

- (1)  $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ .
- (2)  $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ .
- (3)  $|x - y| = \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$ .

*Lösung.* (1) Wir betrachten zuerst den Fall  $x \leq y$ . Dann gilt  $\max\{x, y\} = y$  und  $|x - y| = y - x$ . Die zu zeigende Identität ist äquivalent zu

$$y = \frac{1}{2}(x + y + y - x),$$

was offensichtlich richtig ist.

Im Fall  $x > y$  gilt  $\max\{x, y\} = x$  und  $|x - y| = x - y$  und die zu zeigende Identität ist äquivalent zu

$$x = \frac{1}{2}(x + y + x - y),$$

was ebenfalls stimmt.

(2) Wir verwenden die gleiche Fallunterscheidung wie in (1). Wenn  $x \leq y$ , dann ist die Identität äquivalent zu

$$x = \frac{1}{2}(x + y - (y - x)),$$

wenn  $x > y$  zu

$$y = \frac{1}{2}(x + y - (x - y)).$$

(3) folgt, indem (2) von (1) subtrahiert wird.

**Aufgabe 1.5.** Bestimmen Sie alle reellen Zahlen  $x \in \mathbb{R}$ , die die Ungleichung

$$\frac{6+x}{x} > x$$

erfüllen.

*Lösung.* Zunächst stellen wir fest, dass 0 keine Lösung sein kann.

Falls  $x > 0$  ist, dann ist die Ungleichung äquivalent zu

$$6+x > x^2$$

d.h. zu

$$0 > x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

Die Ungleichung ist also genau dann erfüllt, wenn  $x-3$  und  $x+2$  verschiedene Vorzeichen haben. Wir erhalten somit die Unterfälle:

- $x > 3$  und  $x < -2$ : keine Lösung.
- $x < 3$  und  $x > -2$ : somit sind alle  $x \in (0, \infty) \cap (-2, 3) = (0, 3)$  Lösungen der Ungleichung.

Falls  $x < 0$  ist, dann ist die Ungleichung äquivalent zu

$$6+x < x^2$$

d.h. zu

$$0 < x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

Die Ungleichung ist also genau dann erfüllt, wenn  $x-3$  und  $x+2$  gleiches Vorzeichen haben. Das ergibt die Unterfälle:

- $x > 3$  und  $x > -2$ : also sind alle  $x$  in  $(3, \infty) \cap (-2, \infty) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$  Lösungen, es gibt somit keine Lösung.
- $x < 3$  und  $x < -2$ : also sind alle  $x$  in  $(-\infty, 3) \cap (-\infty, -2) \cap (-\infty, 0) = (-\infty, -2)$  Lösungen.

Insgesamt ist die Lösungsmenge daher  $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$ .

**Aufgabe 1.6.** Zeigen Sie mit Induktion: In jedem geordneten Körper  $K$  gelten die folgenden Aussagen.

- (1) Für alle  $x \in K$  mit  $x > 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  gilt  $x^n > x$ .
- (2) Für alle  $x \in K$  mit  $0 < x < 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  gilt  $x^n < x$ .

*Lösung.* (1) Es gilt  $0 < 1$  und daher  $x > 0$ . Nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation folgt  $x \cdot 1 \leq x \cdot x$ . Es kann nicht Gleichheit  $x = x^2$  gelten, weil dann  $1 = x^{-1}x = x^{-1}x^2 = x$  ein Widerspruch zu  $x > 1$  wäre. Damit ist der Induktionsanfang  $n = 2$  gezeigt.

Nehmen wir nun an,  $x^k > x$  ist schon für alle  $2 \leq k \leq n$  gezeigt. Dann gilt mit der Induktionsannahme und dem Monotoniegesetz

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \geq x \cdot x = x^2 > x.$$

(2) Nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation folgt  $x \cdot x \leq x \cdot 1$ . Wie in (1) schließt man daraus  $x^2 < x$ .

Nehmen wir nun an,  $x^k < x$  ist schon für alle  $2 \leq k \leq n$  gezeigt. Dann gilt mit der Induktionsannahme und dem Monotoniegesetz

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \leq x \cdot x = x^2 < x.$$

Alternativ: Durch Multiplikation mit  $x^{-1}$  folgt aus  $0 < x < 1$  die Ungleichung  $1 < x^{-1}$ . Mit (1) erhalten wir  $x^{-1} < (x^{-1})^n = x^{-n}$ . Dann folgt mit dem Monotoniegesetz

$$x^n = x^{n+1}x^{-1} \leq x^{n+1}x^{-n} = x$$

für alle  $n \geq 2$ . Weil  $x < 1$  folgt insbesondere  $x^n < 1$  für alle  $n \geq 2$ . Daher kann nicht Gleichheit gelten und die Aussage ist bewiesen.

## 2. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 9. BIS 13. MÄRZ

**Aufgabe 2.1.** Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen, wenn  $z = -1 + 2i$ ,  $w = 3 - 4i$  und  $u = i$ .

- (1)  $z + w$ ,  $zw$ ,  $\frac{(z-w)u}{z}$ ,  $u^{-3}w^2$ .  
 (2)  $\overline{z - w}$ ,  $|z w u|$ ,  $|z \overline{w}|$ .

*Lösung.* (1)

$$\begin{aligned} z + w &= (-1 + 2i) + (3 - 4i) = (-1 + 3) + (2 - 4)i = 2 - 2i, \\ zw &= (-1 + 2i)(3 - 4i) = -3 + 6i + 4i + 8 = 5 + 10i, \\ \frac{(z-w)u}{z} &= \frac{((-1 + 2i) - (3 - 4i))i}{-1 + 2i} = \frac{(-4 + 6i)i}{-1 + 2i} = \frac{-6 - 4i}{-1 + 2i} \\ &= \frac{-6 - 4i}{-1 + 2i} \cdot \frac{-1 - 2i}{-1 - 2i} = \frac{-2 + 16i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{16}{5}i, \\ u^{-3}w^2 &= i^{-3}(3 - 4i)^2 = \frac{1}{-i}(-7 - 24i) = i(-7 - 24i) = 24 - 7i. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overline{z - w} &= \overline{(-1 + 2i) - (3 - 4i)} = \overline{-4 + 6i} = -4 - 6i, \\ |z w u| &= |z w| |u| = |5 + 10i| |i| = \sqrt{125} \cdot 1 = 5\sqrt{5}, \\ |z \overline{w}| &= |z| |\overline{w}| = |z| |w| = |z w| = 5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.2.** Lösen Sie die Gleichung  $z^2 = 1 - i$  in den komplexen Zahlen.

*Lösung.* Wir machen den Ansatz  $z = x + iy$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ . Die Gleichung  $z^2 = 1 - i$  ist dann äquivalent zu

$$(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 1 - i$$

und daher zum Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = 1, \quad 2xy = -1.$$

Die zweite Gleichung impliziert, dass  $x \neq 0$  und somit  $y = -\frac{1}{2x}$ . Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^4 - 4x^2 - 1 = 0$$

Durch Substitution  $u := x^2$  bekommen wir die quadratische Gleichung

$$4u^2 - 4u - 1 = 0,$$

die wir mit Hilfe der Lösungsformel lösen können:

$$u_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Nur  $u_+$  ist für uns interessant, weil  $u_- < 0$  und somit  $x^2 = u_-$  keine reellen Lösungen hat. Die Gleichung  $x^2 = u_+$  hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Aus der Gleichung  $y = -\frac{1}{2x}$  erhalten wir

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2x_{1,2}} = \mp \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

Die Lösungen der Gleichung  $z^2 = 1 - i$  sind daher

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} i \right), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} i \right).$$

**Aufgabe 2.3.** Wir wissen, dass die Menge  $M$  der reellen  $2 \times 2$  Matrizen der Form  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$ , mit der Matrixaddition

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

und der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

als Verknüpfungen einen Körper bilden. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow M$  definiert durch

$$f(a + ib) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Körperisomorphismus ist.

*Lösung.* Zuerst zeigen wir, dass  $f$  ein Körperhomomorphismus ist. Wir müssen drei Eigenschaften überprüfen: Erstens

$$\begin{aligned} f((a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)) &= f((a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\
&= f(a_1 + ib_1) + f(a_2 + ib_2).
\end{aligned}$$

Zweitens

$$\begin{aligned}
f((a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)) &= f((a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)) \\
&= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\
&= f(a_1 + ib_1)f(a_2 + ib_2).
\end{aligned}$$

Drittens

$$f(1) = f(1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv; die Injektivität von  $f$  kann man natürlich auch leicht direkt sehen. Weiters ist klar, dass  $f : \mathbb{C} \rightarrow M$  surjektiv ist. Es folgt, dass  $f$  ein Körperisomorphismus ist.

**Aufgabe 2.4.** Betrachten Sie die Abbildung  $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(z, w) := \operatorname{Re}(z\bar{w})$ . Zeigen Sie:

- (1)  $f(z, z) \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und es gilt  $f(z, z) = 0$  genau dann, wenn  $z = 0$ .
- (2)  $f(z, w) = f(w, z)$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .
- (3)  $f(z_1 + tz_2, w) = f(z_1, w) + tf(z_2, w)$  für alle  $z_i, w \in \mathbb{C}$  und  $t \in \mathbb{R}$ .
- (4)  $f(z, w_1 + tw_2) = f(z, w_1) + tf(z, w_2)$  für alle  $z, w_i \in \mathbb{C}$  und  $t \in \mathbb{R}$ .
- (5)  $f(z, w)^2 + f(iz, w)^2 = |z|^2|w|^2$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .
- (6)  $|f(z, w)| \leq |z||w|$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .

*Lösung.* (1) Es gilt  $\operatorname{Re}(z\bar{z}) = \operatorname{Re}|z|^2 = |z|^2 \geq 0$  und  $|z|^2 = 0$  genau dann, wenn  $z = 0$ .

$$(2) f(z, w) = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = \frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w) = \operatorname{Re}(w\bar{z}) = f(w, z).$$

(3) Für beliebige  $z, w \in \mathbb{C}$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$  und  $\operatorname{Re}(tz) = t \operatorname{Re} z$ . Somit:

$$\begin{aligned}
f(z_1 + tz_2, w) &= \operatorname{Re}((z_1 + tz_2)\bar{w}) = \operatorname{Re}(z_1\bar{w} + tz_2\bar{w}) \\
&= \operatorname{Re}(z_1\bar{w}) + t \operatorname{Re}(z_2\bar{w}) = f(z_1, w) + tf(z_2, w).
\end{aligned}$$

(4) folgt aus (2) und (3).

(5) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(z, w)^2 + f(iz, w)^2 &= \operatorname{Re}(z\bar{w})^2 + \operatorname{Re}(iz\bar{w})^2 = \frac{1}{4}(z\bar{w} + \bar{z}w)^2 + \frac{1}{4}(iz\bar{w} - i\bar{z}w)^2 \\
&= \frac{1}{4}(z^2\bar{w}^2 + \bar{z}^2w^2 + 2z\bar{z}w\bar{w}) + \frac{1}{4}(-z^2\bar{w}^2 - \bar{z}^2w^2 + 2z\bar{z}w\bar{w}) = |z|^2|w|^2.
\end{aligned}$$

(6) Mit (5) folgt  $f(z, w)^2 \leq f(z, w)^2 + f(iz, w)^2 = |z|^2|w|^2$  und damit (6).

**Aufgabe 2.5.** (1) Finden Sie die Polardarstellung der komplexen Zahlen  $i$ ,  $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$  und  $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ .

(2) Welche komplexen Zahlen  $a + ib$  werden durch  $e^{i\pi}$ ,  $2(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$  und  $\pi e^{-i\pi/2}$  beschrieben?

*Lösung.* (1)

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

(2)

$$e^{i\pi} = -1,$$

$$2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$\pi e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\pi i.$$

**Aufgabe 2.6.** Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung  $z^3 = -1$ .

*Lösung.* Man sieht sofort, dass  $z_1 = -1$  eine Lösung ist. Weiters gilt

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1).$$

Wir müssen also noch die quadratische Gleichung  $z^2 - z + 1 = 0$  lösen. Die Lösungsformel ergibt

$$z_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Alternativ kann man die Polardarstellung verwenden: Die Lösungen von  $z^3 = -1 = e^{i\pi}$  sind

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi+2\cdot 2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

**Aufgabe 2.7.** Zeigen Sie, dass die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,  $f(x) = e^{ix}$ , ein Gruppenhomomorphismus von  $(\mathbb{R}, +)$  nach  $(\mathbb{T}, \cdot)$  ist. Bestimmen Sie den Kern  $\ker(f)$ .

*Lösung.* Die Abbildung ist wohldefiniert, weil  $|e^{ix}| = 1$ . Es gilt  $f(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix+y} = e^{ix}e^{iy} = f(x)f(y)$ . Der Kern von  $f$  ist

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos x + i \sin x = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1 \text{ und } \sin x = 0\}. \end{aligned}$$



Die Sinusfunktion ist Null bei  $x = 0$ ,  $x = \pi$  und daher wegen der  $2\pi$ -Periodizität auf der Menge  $\pi\mathbb{Z}$ . Die Kosinusfunktion ist 1 bei  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$  und daher wegen der  $2\pi$ -Periodizität auf der Menge  $2\pi\mathbb{Z}$ . Somit gilt

$$\ker(f) = (\pi\mathbb{Z}) \cap (2\pi\mathbb{Z}) = 2\pi\mathbb{Z}.$$

**Aufgabe 2.8.** Verwenden Sie die Moivreschen Formeln, um eine Formel zu finden, die  $\cos(3\varphi)$  als Polynom in  $\cos(\varphi)$  darstellt.

*Lösung.* Dank der Moivreschen Formeln gilt

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi).$$

Die linke Seite ist gleich

$$\cos^3 \varphi + 3i \sin \varphi \cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi - i \sin^3 \varphi.$$

Es folgt

$$\cos(3\varphi) = \cos^3 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

$$\sin(3\varphi) = 3 \sin \varphi \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Weil  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , gilt

$$\cos(3\varphi) = \cos^3 \varphi - 3(1 - \cos^2 \varphi) \cos \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.$$

### 3. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 16. BIS 20. MÄRZ

**Aufgabe 3.1.** Betrachten Sie die Abbildung  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

- (1) Berechnen Sie die Bildpunkte  $f(z)$  der Punkte  $z = 3$ ,  $z = 1 + i$ ,  $z = -i$  und  $z = \frac{1}{6}(1 - i)$  und tragen Sie die Punkte und ihre Bildpunkte in die komplexe Zahlenebene ein.
- (2) Interpretieren Sie die Abbildung  $f$  geometrisch. Was geschieht mit Punkten auf dem Einheitskreis  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , was mit Punkten mit  $|z| < 1$  und Punkten mit  $|z| > 1$ ?

*Lösung.* (1)  $f(3) = \frac{1}{3}$ ,  $f(1+i) = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ ,  $f(-i) = -\frac{1}{i} = i$ ,  $f(\frac{1}{6}(1-i)) = 6\frac{1}{1-i} = 3(1+i)$ .

(2) Die Abbildung  $f$  bildet  $\mathbb{T}$  auf  $\mathbb{T}$  ab. Punkte im “Inneren” von  $\mathbb{T}$ , d.h. Punkte mit  $|z| < 1$ , werden auf Punkte im “Äußeren” von  $\mathbb{T}$  abgebildet, und umgekehrt (weil  $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ ). Es gilt immer  $|f(z)||z| = 1$ .

Schreiben wir  $z = re^{i\varphi}$  in Polardarstellung, dann ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

Das bedeutet die Abbildung  $f$  ist die Komposition der Abbildung  $re^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{r}e^{i\varphi}$  (welche *Inversion am Einheitskreis* genannt wird) und der Spiegelung an der  $x$ -Achse  $\frac{1}{r}e^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$ .

**Aufgabe 3.2.** Sei  $\mathcal{E}$  die Menge  $\mathbb{R}^2$  und sei  $\mathcal{G}$  die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  der Gestalt

$$g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\},$$

wobei  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$  mit  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ . Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$  das Axiom 1 erfüllt: Für je zwei verschiedene Punkte  $x, y \in \mathcal{E}$  gibt es ein eindeutiges Element  $g \in \mathcal{G}$  mit  $x \in g$  und  $y \in g$ . Hinweis: Benutzen Sie für die Eindeutigkeit, dass die Lösungsmenge einer Gleichung  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$  gleich bleibt, wenn die Gleichung mit einer Zahl  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  multipliziert wird.

*Lösung.* Gegeben sind verschiedene Punkte  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (y_1, y_2)$ . Wir suchen also  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$  mit  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ , sodass

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad \text{und} \quad a_1y_1 + a_2y_2 = b$$

gilt. Wenn wir die zweite von der ersten Gleichung abziehen, erhalten wir

$$a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) = 0.$$

Wir setzen

$$a_1 := -(x_2 - y_2) \quad \text{und} \quad a_2 := (x_1 - y_1).$$

Weil  $x$  und  $y$  verschieden sind, muss  $a_1$  oder  $a_2$  ungleich Null sein. Weiters setzen wir

$$b := a_1x_1 + a_2x_2 = -(x_2 - y_2)x_1 + (x_1 - y_1)x_2 = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Dann ist natürlich die erste Gleichung erfüllt. Und die zweite Gleichung ist auch erfüllt, weil

$$a_1y_1 + a_2y_2 = -(x_2 - y_2)y_1 + (x_1 - y_1)y_2 = -x_2y_1 + x_1y_2 = b.$$

Damit ist gezeigt, dass es für je zwei verschiedene Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ein  $g \in \mathcal{G}$  gibt mit  $x \in g$  und  $y \in g$ .

Um die Eindeutigkeit zu beweisen, nehmen wir an es gibt eine zweite Menge

$$g' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a'_1x_1 + a'_2x_2 = b'\}$$

mit  $(a'_1, a'_2) \neq (0, 0)$ , die  $x$  und  $y$  enthält. Wie vorher können wir dann

$$a'_1(x_1 - y_1) + a'_2(x_2 - y_2) = 0$$

folgern, d.h., weil  $a_1 = -(x_2 - y_2)$  und  $a_2 = (x_1 - y_1)$

$$a'_1a_2 = a_1a'_2.$$

Wir können O.B.d.A. annehmen, dass  $a_1 \neq 0$  ist. Man sieht dann auch sofort, dass  $a'_1 \neq 0$  ist (wäre  $a'_1 = 0$  dann würde die letzte Gleichung  $a'_2 = 0$  implizieren). Dann gilt

$$a'_2 = \frac{a'_1}{a_1}a_2$$

und trivialerweise

$$a'_1 = \frac{a'_1}{a_1}a_1.$$

Weiters gilt

$$b' = a'_1x_1 + a'_2x_2 = \frac{a'_1}{a_1}a_1x_1 + \frac{a'_1}{a_1}a_2x_2 = \frac{a'_1}{a_1}b.$$

Wir haben also gezeigt, dass  $a'_1 = \lambda a_1$ ,  $a'_2 = \lambda a_2$  und  $b' = \lambda b$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt. Daraus folgt  $g = g'$ .

**Aufgabe 3.3.** In der Situation von Aufgabe 3.2 berechnen Sie konkret die Menge  $g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$ , die die Punkte  $(1, 1)$  und  $(3, 5)$  enthält.

*Lösung.* Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= b \\ 3a_1 + 5a_2 &= b \end{aligned}$$

zu lösen. Ziehen wir die erste von der zweiten Gleichung ab, erhalten wir

$$2a_1 + 4a_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -2a_2.$$

Wählen wir  $a_2 = 1$ , dann folgt  $a_1 = -2$  und somit  $b = -1$ . Die gesuchte Menge ist

$$g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -2x_1 + x_2 = -1\}.$$

**Aufgabe 3.4.** Seien  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq w$ . Setze

$$a := i(z - w) \quad \text{und} \quad b := a\bar{z} + \bar{a}z.$$

Zeigen Sie, dass dann  $z$  und  $w$  die Gleichung

$$a\bar{z} + \bar{a}z = b$$

erfüllen und dass  $b$  eine reelle Zahl ist. Schließen Sie, dass es für je zwei verschiedene Punkte  $z, w \in \mathbb{C}$  immer eine Teilmenge  $g \subseteq \mathbb{C}$  der Form

$$g := \{z \in \mathbb{C} : a\bar{z} + \bar{a}z = b\}$$

mit  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $z \in g$  und  $w \in g$ .

*Lösung.* Zunächst ist klar, dass  $z$  die Gleichung erfüllt, weil  $b$  gerade so gewählt war. Nun zeigen wir, dass auch  $w$  die Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} a\bar{w} + \bar{a}w &= i(z - w)\bar{w} + \overline{i(z - w)}w = iz\bar{w} - iw\bar{w} - i(\bar{z} - \bar{w})w \\ &= iz\bar{w} - iw\bar{w} - i\bar{z}w + i\bar{w}w = iz\bar{w} - i\bar{z}w \\ b = a\bar{z} + \bar{a}z &= i(z - w)\bar{z} + \overline{i(z - w)}z = iz\bar{z} - iw\bar{z} - i(\bar{z} - \bar{w})z \\ &= iz\bar{z} - iw\bar{z} - i\bar{z}z + i\bar{w}z = -iw\bar{z} + i\bar{w}z \end{aligned}$$

Dass  $b$  reell ist, folgt aus

$$\bar{b} = \overline{a\bar{z} + \bar{a}z} = \bar{a}\bar{\bar{z}} + \bar{\bar{a}}\bar{z} = \bar{a}z + a\bar{z} = b.$$

Die verbleibende Aussage ist nun klar.

Für die folgenden Aufgaben nehmen wir an, dass die Ebene  $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$  die Axiome 0 bis 4 erfüllt.

**Aufgabe 3.5.** Zeigen Sie Korollar 4.3: Sei  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow g$  die Schiefprojektion auf die Gerade  $g$  parallel zu einer Richtung verschieden von der Richtung von  $g$ . Ist  $M \subseteq \mathcal{E}$  konvex, dann ist auch das Bild  $\varphi(M) \subseteq g$  konvex. Ist  $N \subseteq g$  konvex, dann ist auch das Urbild  $\varphi^{-1}(N) \subseteq \mathcal{E}$  konvex.

*Lösung.* Sei  $M \subseteq \mathcal{E}$  konvex. Seien  $X', Y' \in \varphi(M)$ . Dann existieren  $X, Y \in M$  mit  $X' = \varphi(X)$  und  $Y' = \varphi(Y)$ . Weil  $M$  konvex ist, gilt  $[X, Y] \subseteq M$ . Nach Proposition 4.2 gilt  $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] = [X', Y'] \subseteq \varphi(M)$ . Es folgt, dass  $\varphi(M)$  konvex ist.

Sei nun  $N \subseteq g$  konvex. Seien  $X, Y \in \varphi^{-1}(N)$ . Dann liegen  $X' = \varphi(X)$  und  $Y' = \varphi(Y)$  in  $N$ . Weil  $N$  konvex ist, haben wir  $[X', Y'] \in N$ . Dank Proposition 4.2 gilt  $[X', Y'] = [\varphi(X), \varphi(Y)] = \varphi([X, Y])$  und somit liegt  $[X, Y]$  in  $\varphi^{-1}(N)$ . Das zeigt, dass  $\varphi^{-1}(N)$  konvex ist.

**Aufgabe 3.6.** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass alle Geraden gleichmächtig sind. Die Kardinalzahl der Geraden wurde mit  $\alpha$  bezeichnet. Beweisen Sie, dass  $\alpha > 2$  schon  $\alpha = \infty$  zur Folge hat.

*Lösung.* In der Vorlesung (Korollar 4.5) wurde gezeigt, dass jede offene Halbgerade in  $\mathcal{E}$  nicht-leer ist, wenn  $\alpha > 2$ . Sei  $g$  eine Gerade in  $\mathcal{E}$  und  $A_0$  ein Punkt auf  $g$ . Wir versehen  $g$  mit einer der beiden Totalordnungen auf  $g$  (vgl. Axiom 3). Sei  $h_0$  die positive offene Halbgerade von  $g$  mit Ursprung  $A_0$ . Dann enthält, nach Korollar 4.5,  $h_0$  einen Punkt  $A_1$ , d.h.  $A_0 < A_1$ . Die positive offene Halbgerade  $h_1$  von  $g$  mit Ursprung  $A_1$  enthält einen Punkt  $A_2$ , d.h.  $A_1 < A_2$ . Durch Iteration erhalten wir eine unendliche Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise verschiedenen Punkten auf  $g$ . Das bedeutet  $\alpha = \infty$ .

Für die nachfolgenden Aufgaben nehmen wir zusätzlich an, dass  $\alpha = \infty$  gilt.

**Aufgabe 3.7.** Seien  $h_1$  und  $h_2$  zwei nicht-kollineare Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung  $O$ . Sei  $S(h_1, h_2)$  die konvexe Hülle von  $h_1 \cup h_2 \cup \{O\}$ . Sei  $k$  eine Halbgerade mit Ursprung  $O$ , die im Sektor  $S(h_1, h_2)$  enthalten ist, und seien  $A_1 \in h_1$  und  $A_2 \in h_2$ . Zeigen Sie:

- (1) Der Sektor  $S(h_1, h_2)$  liegt in der abgeschlossenen Halbebene bzgl. der Parallelen zu  $g(A_1, A_2)$  durch  $O$ , welche  $g(A_1, A_2)$  enthält.
- (2) Es gilt  $S(h_1, h_2) \subseteq \bar{\mathcal{E}}_1 \cap \bar{\mathcal{E}}_2$ , wobei  $\bar{\mathcal{E}}_1$  die abgeschlossene Halbebene bzgl. der Trägergeraden von  $h_1$  ist, die  $h_2$  enthält, und  $\bar{\mathcal{E}}_2$  die abgeschlossene Halbebene bzgl. der Trägergeraden von  $h_2$ , die  $h_1$  enthält.
- (3)  $g(A_1, A_2)$  und die Trägergerade von  $k$  schneiden sich in einem Punkt.
- (4)  $k$  schneidet die Strecke  $[A_1, A_2]$  in einem Punkt.

*Lösung.* (1) Sei  $g'$  die Parallele zu  $g(A_1, A_2)$  durch  $O$ . Die Halbgeraden  $h_1$  und  $h_2$  liegen beide in der gleichen Halbebene bzgl.  $g'$  wie  $g(A_1, A_2)$ , weil die Mengen konvex sind, leeren Durchschnitt mit  $g'$  haben und  $h_1 \cap g(A_1, A_2) = \{A_1\}$  und  $h_2 \cap g(A_1, A_2) = \{A_2\}$  gilt. Somit liegt der Sektor  $S(h_1, h_2)$  in dieser abgeschlossenen Halbebene (weil die Halbebene konvex ist).

(2) Die Menge  $\bar{\mathcal{E}}_1 \cap \bar{\mathcal{E}}_2$  ist konvex (weil der Durchschnitt konvexer Mengen konvex ist) und sie enthält  $h_1 \cup h_2 \cup \{O\}$ .

(3) Die Trägergerade  $\tilde{k}$  von  $k$  und  $g'$  haben offenbar einen Schnittpunkt (und fallen nicht zusammen). Es folgt, dass auch  $g(A_1, A_2)$  und  $\tilde{k}$  einen Schnittpunkt  $X$  haben (wegen der Transitivität der Parallelität).

(4) Wir müssen nur noch zeigen, dass der Schnittpunkt  $X$  auf  $k$  und  $[A_1, A_2]$  liegt. Nun liegt  $X$  auf  $k$  wegen (1), weil  $k$  in der gleichen Halbebene bzgl.  $g'$  wie  $g(A_1, A_2)$  liegt. Somit liegt  $X$  im Sektor und auf  $g(A_1, A_2)$ .

Sei  $g(A_1, A_2)$  so geordnet, dass  $A_1 < A_2$  gilt. Dann ist  $g(A_1, A_2) \cap \bar{\mathcal{E}}_1 = \{Y \in g(A_1, A_2) : Y \geq A_1\}$  und  $g(A_1, A_2) \cap \bar{\mathcal{E}}_2 = \{Y \in g(A_1, A_2) : Y \leq A_2\}$ . Nach (2) gilt  $X \in S(h_1, h_2) \subseteq \bar{\mathcal{E}}_1 \cap \bar{\mathcal{E}}_2$ , also  $X \in [A_1, A_2]$ .

**Aufgabe 3.8.** Seien  $h_1$  und  $h_2$  zwei nicht-kollineare Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung  $O$ . Sei  $\mathcal{E}_1$  die offene Halbebene bzgl. der Trägergeraden  $\tilde{h}_1$  von  $h_1$ , die  $h_2$  enthält, und  $\mathcal{E}_2$  die offene Halbebene bzgl. der Trägergeraden  $\tilde{h}_2$  von  $h_2$ , die  $h_1$  enthält. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  die Menge aller Punkte  $X \in \mathcal{E}$  ist, deren Komponenten bzgl. des Achsensystems  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$  die Ungleichungen

$$X_1 > O \quad \text{und} \quad X_2 > O$$

erfüllen, wenn die Geraden  $\tilde{h}_1$  und  $\tilde{h}_2$  so geordnet sind, dass  $h_1$  und  $h_2$  jeweils die positive Halbgerade ist.

*Lösung.* Sei  $\varphi_1$  die Schiefprojektion auf  $\tilde{h}_1$  parallel zu  $\tilde{h}_2$  und  $\varphi_2$  die Schiefprojektion auf  $\tilde{h}_2$  parallel zu  $\tilde{h}_1$ . Die Komponenten von  $X \in \mathcal{E}$  sind  $X_1 = \varphi_1(X)$  und  $X_2 = \varphi_2(X)$ . Weiters gilt  $\varphi_1^{-1}(h_1) = \mathcal{E}_2$  und  $\varphi_2^{-1}(h_2) = \mathcal{E}_1$ . Weil  $h_1 = \{Y \in \tilde{h}_1 : Y > O\}$  und  $h_2 = \{Y \in \tilde{h}_2 : Y > O\}$ , folgt die Aussage.

#### 4. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 23. BIS 27. MÄRZ

Für die Aufgaben 4.1 – 4.3 nehmen wie an, dass die Ebene  $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$  die Axiome 0 – 4 erfüllt und  $\alpha = \infty$  gilt.

**Aufgabe 4.1.** Seien  $O, A$  und  $B$  drei nicht-kollineare Punkte. Sei  $A' \in [O, A]$  und  $B' \in [O, B]$ . Zeigen Sie, dass für jeden Punkt  $C \in [A, B]$  die Strecken  $[O, C]$  und  $[A', B']$  sich schneiden. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.7.

*Lösung.* Wenn  $C = A$  oder  $C = B$  ist der (ein) gesuchte(r) Schnittpunkt  $A'$  bzw.  $B'$  (falls z.B.  $O = A'$  und  $B = B' = C$  dann gilt  $[A', B'] = [O, C]$ , d.h. alle Punkte auf  $[A', B']$  sind Schnittpunkte von  $[A', B']$  und  $[O, C]$ ). Wir können also annehmen, dass  $C \in (A, B)$ . Dann liegt die Halbgerade  $h$  mit Ursprung  $O$  durch  $C$  im Sektor, der von den Halbgeraden mit Ursprung  $O$  durch  $A$  und  $B$  gebildet wird. Nach Aufgabe 3.7 schneidet  $h$  die Strecke  $[A', B']$  in einem Punkt  $X$ . Der Punkt  $X$  muss in  $[O, C]$  enthalten sein, weil andernfalls  $C \in (O, X)$  gelten würde, d.h.  $O$  und  $X$  würden in verschiedenen Halbebenen bzgl.  $g(A, B)$  liegen, während aber  $O$  und  $(A', B')$  in der gleichen Halbebene bzgl.  $g(A, B)$  sind, ein Widerspruch.

**Aufgabe 4.2.** Verwenden Sie Aufgabe 4.1, um folgende Aussage zu beweisen: Ist  $M \subseteq \mathcal{E}$  eine beliebige konvexe Menge und  $O \in \mathcal{E}$  ein Punkt, dann ist die Menge  $N := \bigcup_{X \in M} [O, X]$  ebenfalls konvex.

*Lösung.* Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  zwei verschiedene Punkte in  $N$ , d.h. es gibt Punkte  $X_1$  und  $X_2$  in  $M$ , sodass  $Y_1 \in [O, X_1]$  und  $Y_2 \in [O, X_2]$  gilt. Gilt  $X_1 = X_2$ , dann ist natürlich

$[Y_1, Y_2] \subseteq [O, X_1] \subseteq N$ . Wir können also  $X_1 \neq X_2$  annehmen. Sei  $Y \in [Y_1, Y_2]$ . Wir müssen beweisen, dass  $Y \in N$ . Die Halbgerade  $h$  mit Ursprung  $O$  durch  $Y$  schneidet  $[X_1, X_2]$  in einem Punkt  $X$  (dank Aufgabe 3.7). Weil  $M$  konvex ist, gilt  $X \in M$ . Die Aufgabe 4.1 impliziert, dass  $Y \in [O, X]$  gilt. Das bedeutet  $Y \in N$  und die Konvexität von  $N$  ist gezeigt.

**Aufgabe 4.3.** Seien  $A, B$  und  $C$  drei nicht-kollineare Punkte. Sei  $H$  die konvexe Hülle der Menge  $\{A, B, C\}$ , d.h. der Durchschnitt aller konvexer Teilmengen der Ebene, die die Menge  $\{A, B, C\}$  enthalten. Sei  $S$  der Durchschnitt der drei abgeschlossenen Halbebenen, die durch die Geraden  $g(A, B)$ ,  $g(B, C)$  und  $g(C, A)$  definiert sind und jeweils auch den dritten Punkt enthalten. Zeigen Sie  $H = S$ .

*Lösung.* Klarerweise ist die Menge  $S$  konvex (weil der Durchschnitt dreier konvexer Mengen) und  $S$  enthält  $\{A, B, C\}$ . Daher gilt  $H \subseteq S$ .

Für die andere Inklusion  $S \subseteq H$  nehmen wir indirekt an, dass ein Punkt  $X \in S$  existiert mit  $X \notin H$ . Das bedeutet, es gibt eine konvexe Menge  $K$ , die die Punkte  $A, B$  und  $C$  enthält, nicht aber den Punkt  $X$ . Weil  $K$  konvex ist, kann  $X$  nicht auf den Strecken  $[A, B]$ ,  $[B, C]$  und  $[C, A]$  liegen. Die Halbgerade mit Ursprung  $A$  durch  $X$  muss wegen Aufgabe 3.7 die Strecke  $[B, C]$  in einem Punkt  $Y$  schneiden und es gilt  $X \in [A, Y]$  (weil  $X$  und  $A$  in der gleichen abgeschlossenen Halbebene bzgl.  $g(B, C)$  liegen müssen). Die Konvexität von  $K$  impliziert  $Y \in K$  (weil  $B, C \in K$ ) und somit  $X \in K$  (weil  $A, Y \in K$ ), ein Widerspruch.

Für die nachfolgenden Aufgaben nehmen wir an, dass die Ebene  $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$  die Axiome 0 – 6 erfüllt.

**Aufgabe 4.4.** Beweisen Sie, dass eine Punktsymmetrie jede Gerade  $g$  auf eine Gerade parallel zu  $g$  abbildet.

*Lösung.* Sei  $O$  das Zentrum der Punktsymmetrie. Wir rechnen in  $(\mathcal{E}, O)$ . Wenn  $O \in g$ , dann ist klar, dass  $g$  unter der Punktsymmetrie  $X \mapsto -X$  auf sich selbst abgebildet wird (Lemma 6.6 bzw. Theorem 6.8(2)).

Nehmen wir nun an, dass das Zentrum  $O$  nicht auf  $g$  liegt. Seien  $X$  und  $Y$  zwei verschiedene Punkte auf  $g$  und seien  $X'$  und  $Y'$  die Bildpunkte unter der Punktsymmetrie. Dann ist  $(X, Y, X', Y')$  ein Parallelogramm, weil  $(X, X')$  und  $(Y, Y')$  den gleichen Mittelpunkt  $O$  haben, und nach Korollar 6.9 ist  $g' := g(X', Y')$  parallel zu  $g$ . Das zeigt, dass für einen beliebigen Punkt  $Z \in g$  der Bildpunkt  $Z'$  auf der Parallelen  $g'$  zu  $g$  durch  $X'$  liegen muss. Weil eine Punktsymmetrie eine invertierbare Abbildung ist, folgt, dass  $g$  auf  $g'$  abgebildet wird.

**Aufgabe 4.5.** Zeigen Sie:

- (1) Die Komposition zweier Punktsymmetrien ist eine Translation.
- (2) Die Komposition einer Punktsymmetrie mit einer Translation ist ein Punktsymmetrie.
- (3) Die  $n$ -fache Komposition von Punktsymmetrien ist eine Punktsymmetrie, falls  $n$  ungerade ist, und eine Translation, wenn  $n$  gerade ist.

*Lösung.* (1) In der Ebene  $(\mathcal{E}, O)$  mit Ursprung  $O$  hat eine Punktsymmetrie mit Zentrum  $A$  die Gestalt

$$X \mapsto 2A - X;$$

das folgt aus Korollar 6.10. Die Komposition mit einer Punktsymmetrie mit Zentrum  $B$  ist die Translation

$$X \mapsto 2B - (2A - X) = X + 2(B - A).$$

(2) Die Komposition der Punktsymmetrie mit Zentrum  $A$  mit der Translation um  $C$  ist

$$X \mapsto (2A - X) + C = 2A + C - X = 2(A + C') - X,$$

wobei  $C'$  der Mittelpunkt von  $O$  und  $C$  ist. In umgekehrter Reihenfolge bekommen wir

$$X \mapsto 2A - (X + C) = 2A - C - X = 2(A - C') - X.$$

In beiden Fällen ist die Komposition also eine Punktsymmetrie.

(3) folgt leicht aus (1) und (2): Ist  $n = 2k$ , dann ist die Komposition der  $n$  Punktsymmetrien eine Komposition von  $k$  Translationen, also eine Translation. Ist  $n = 2k + 1$ , dann ist die Komposition der  $n$  Punktsymmetrien eine Komposition von  $k$  Translationen und einer Punktsymmetrie, also eine Punktsymmetrie.

**Aufgabe 4.6.** Zeigen Sie, dass  $(X, Y, X', Y')$  genau dann ein Parallelogramm ist, wenn  $X + X' = Y + Y'$  gilt.

*Lösung.* Der Mittelpunkt  $M_1$  von  $X$  und  $X'$  erfüllt  $2M_1 = X + X'$ , der Mittelpunkt  $M_2$  von  $Y$  und  $Y'$  erfüllt  $2M_2 = Y + Y'$  (vgl. Korollar 6.10). Es handelt sich bei  $(X, Y, X', Y')$  genau dann um ein Parallelogramm, wenn  $M_1 = M_2$ , was nun äquivalent zu  $X + X' = Y + Y'$  ist.

**Aufgabe 4.7.** Auf der Menge der orientierten Halbgeraden in  $\mathcal{E}$  definieren wir eine Relation

$$g \uparrow\uparrow h \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine Translation } t \text{ mit } t(g) = h.$$

In diesem Fall nennen wir  $g$  und  $h$  *gleichsinnig parallel*. Zeigen Sie:

- (1) Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation.
- (2) Zwei orientierten Halbgeraden  $g$  und  $h$  sind genau dann gleichsinnig parallel, wenn die orientierten Trägergeraden von  $g$  und  $h$  gleichsinnig parallel sind.

*Lösung.* (1) Die Relation ist reflexiv, weil die Identität eine Translation ist. Sie ist symmetrisch, weil  $t(g) = h$  impliziert  $g = t^{-1}(h)$  für die inverse Translation  $t^{-1}$ . Um die Transitivität zu zeigen, sei  $t(g) = h$  und  $s(h) = k$  für orientierte Halbgeraden  $g, h, k$  und Translationen  $t, s$ . Dann gilt  $s(t(g)) = k$  und  $s \circ t$  ist eine Translation.

(2) Sei  $\tilde{g}$  die Trägergerade von  $g$  und  $\tilde{h}$  die Trägergerade von  $h$ . Wir können annehmen, dass  $g$  und  $h$  jeweils die positiven Halbgeraden von  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  sind. Nach Definition sind die orientierten Geraden  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  gleichsinnig parallel, wenn es eine Translation  $t$  gibt, die  $\tilde{g}$  ordnungserhaltend auf  $\tilde{h}$  abbildet. In diesem Fall ist klar, dass  $t$  die Halbgerade  $g$  auf  $h$  abbildet, d.h.  $g$  und  $h$  gleichsinnig parallel sind.

Seien umgekehrt  $g$  und  $h$  gleichsinnig parallel, d.h.  $t(g) = h$  für eine Translation  $t$ . Weil  $g$  und  $h$  beide die positiven Halbgeraden in den entsprechenden Trägergeraden sind,

muss die Translation  $t$  ordnungserhaltend sein (in Proposition 7.7 wurde gezeigt, dass eine Translation immer ordnungserhaltend oder ordnungsumkehrend ist). Damit sind die orientierten Geraden  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  gleichsinnig parallel.

**Aufgabe 4.8.** Sei  $g = \{z \in \mathbb{C} : a\bar{z} + \bar{a}z = b\}$ , wobei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{R}$  (vgl. Aufgabe 3.4). Berechnen Sie das Bild der Menge  $g$  unter

- (1) der Translation  $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + c$ , um  $c \in \mathbb{C}$ ,
- (2) der Punktsymmetrie  $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 2d - z$ , mit Zentrum  $d \in \mathbb{C}$ .

Hat das Bild die gleiche Gestalt wie die Menge  $g$ ? Unter welchen Bedingungen für  $a, b, c$  und  $d$  stimmen  $g$  und das Bild von  $g$  überein?

*Lösung.* (1) Es gilt  $t(g) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in g : w = z + c\}$ . Wenn  $z \in g$ , dann gilt

$$a\bar{w} + \bar{a}w = a\overline{(z+c)} + \bar{a}(z+c) = a\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{c} + \bar{a}c = b + a\bar{c} + \bar{a}c =: b'.$$

Umgekehrt impliziert  $a\bar{w} + \bar{a}w = b'$  auch  $a\bar{z} + \bar{a}z = b$ . Weil  $a\bar{c} + \bar{a}c$  reell ist, ist  $b'$  reell und daher  $t(g) = \{w \in \mathbb{C} : a\bar{w} + \bar{a}w = b'\}$  wieder von derselben Gestalt wie  $g$ . Es gilt genau dann  $t(g) = g$ , wenn  $a\bar{c} + \bar{a}c = 0$ .

- (2) Es gilt  $s(g) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in g : w = 2d - z\}$ . Wenn  $z \in g$ , dann gilt

$$a\bar{w} + \bar{a}w = a\overline{(2d-z)} + \bar{a}(2d-z) = -(a\bar{z} + \bar{a}z) + 2(\bar{a}d + a\bar{d}) = -b + 2(\bar{a}d + a\bar{d}) =: b''.$$

Umgekehrt impliziert  $a\bar{w} + \bar{a}w = b''$  auch  $a\bar{z} + \bar{a}z = b$ . Weil  $\bar{a}d + a\bar{d}$  reell ist, ist  $b''$  reell und daher  $s(g) = \{w \in \mathbb{C} : a\bar{w} + \bar{a}w = b''\}$  wieder von derselben Gestalt wie  $g$ . Es gilt genau dann  $s(g) = g$ , wenn  $b'' = b$  oder äquivalent dazu

$$\bar{a}d + a\bar{d} = b,$$

d.h. das Zentrum  $d$  liegt auf  $g$ .

## 5. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 30. MÄRZ BIS 3. APRIL

**Aufgabe 5.1.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

- (1) Für alle  $x \in V$  gilt  $0x = 0$ . (Beachten Sie: Die Null auf der linken Seite der Gleichung ist die reelle Zahl  $0 \in \mathbb{R}$ , die Null auf der rechten Seite ist der Nullvektor in  $V$ .)
- (2) Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $\lambda 0 = 0$ . (Hier bezeichnet  $0$  auf beiden Seiten der Gleichung den Nullvektor in  $V$ .)

*Lösung.* (1) Wir haben  $0x = (0+0)x = 0x + 0x$  und somit

$$0 = 0x + (-0x) = (0x + 0x) + (-0x) = 0x + (0x + (-0x)) = 0x + 0 = 0x.$$

- (2) Es gilt  $\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$  und daher

$$0 = \lambda 0 + (-\lambda 0) = (\lambda 0 + \lambda 0) + (-\lambda 0) = \lambda 0 + (\lambda 0 + (-\lambda 0)) = \lambda 0 + 0 = \lambda 0.$$



**Aufgabe 5.2.** Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}^2$  mit der Addition  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$  und der Skalarmultiplikation  $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist.

*Lösung.* Dass  $(\mathbb{R}^2, +)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $(0, 0)$  und Inverse  $-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$  von  $(x_1, x_2)$  ist, kann leicht überprüft werden.

Die Skalarmultiplikation  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $(\lambda, (x_1, x_2)) \mapsto \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$  ist wohldefiniert.

Seien  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\lambda y_1, \lambda y_2) = \lambda(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2) \\ &= \lambda x + \lambda y, \\ (\lambda + \mu)x &= (\lambda + \mu)(x_1, x_2) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu x_1, \mu x_2) = \lambda(x_1, x_2) + \mu(x_1, x_2) = \lambda x + \mu x, \\ (\lambda\mu)x &= (\lambda\mu)(x_1, x_2) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu x_2) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2) = \lambda(\mu(x_1, x_2)) = \lambda(\mu x), \\ 1x &= 1(x_1, x_2) = (1x_1, 1x_2) = (x_1, x_2) = x. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.3.** Beweisen Sie:

- (1) Sei  $V$  ein reeller Vektorraum und seien  $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$  lineare Abbildungen. Dann ist für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  auch die Abbildung  $h = \alpha f + \beta g : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$  linear.
- (2) Die Abbildungen  $p_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $p_i(x_1, x_2) := x_i$ , wobei  $i = 1, 2$ , definiert sind, sind linear.
- (3) Die Abbildungen  $f_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto \alpha x_1 + \beta x_2$ , für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , sind linear.

*Lösung.* (1) Für beliebige  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} h(x + y) &= \alpha f(x + y) + \beta g(x + y) = \alpha(f(x) + f(y)) + \beta(g(x) + g(y)) \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x) + \alpha f(y) + \beta g(y) = h(x) + h(y), \\ h(\lambda x) &= \alpha f(\lambda x) + \beta g(\lambda x) = \lambda(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \lambda h(x). \end{aligned}$$

(2) Für beliebige  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $i = 1, 2$  gilt

$$\begin{aligned} p_i(x + y) &= p_i((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = p_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= x_i + y_i = p_i(x_1, x_2) + p_i(y_1, y_2) = p_i(x) + p_i(y), \\ p_i(\lambda x) &= p_i(\lambda(x_1, x_2)) = p_i(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda x_i = \lambda p_i(x_1, x_2) = \lambda p_i(x). \end{aligned}$$

(3) ist eine direkte Konsequenz aus (1) und (2).

**Aufgabe 5.4.** Zeigen Sie:

- (1) Jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  bildet den Nullvektor in  $V$  auf den Nullvektor in  $W$  ab.

- (2) Wann ist eine Translation in  $(\mathcal{E}, O)$  eine lineare Abbildung? Wann ist eine Punktsymmetrie in  $(\mathcal{E}, O)$  eine lineare Abbildung?

*Lösung.* (1) Es gilt  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  und daher  $f(0) = 0$ .

(2) Eine Translation  $X \mapsto X + A$  bildet  $O$  genau dann auf  $O$  ab, wenn  $O = O + A$ , d.h. wenn  $A = O$ . Somit ist die einzige Translation mit dieser Eigenschaft die Identität auf  $\mathcal{E}$ , welche natürlich eine lineare Abbildung ist.

Eine Punktsymmetrie in  $(\mathcal{E}, O)$  hat die Gestalt  $X \mapsto 2A - X$ , wobei  $A$  das Zentrum ist. Sie lässt  $O$  genau dann fix, wenn  $O = 2A - O$  d.h.  $A = O$ . Die einzige Punktsymmetrie, die  $O$  auf  $O$  abbildet, ist also die Punktsymmetrie  $s : X \mapsto -X$  mit Zentrum  $O$ . Diese Abbildung ist linear: es gilt

$$s(X + Y) = -(X + Y) = -X - Y = s(X) + s(Y), \quad s(\lambda X) = -(\lambda X) = \lambda(-X) = \lambda s(X)$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{E}$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 5.5.** Sei  $(E_1, E_2)$  eine Basis der Ebene  $(\mathcal{E}, O)$ . Finden Sie die Geradengleichungen der folgenden Geraden in Koordinaten bzgl.  $(E_1, E_2)$ :

- (1)  $g(E_1, E_2)$ .
- (2)  $g(E_1 - E_2, E_1 + E_2)$ .
- (3)  $g(O, 2E_1 + 3E_2)$ .

*Lösung.* In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede Gerade in  $(\mathcal{E}, O)$  in Koordinaten bzgl. einer Basis  $(E_1, E_2)$  durch eine Gleichung der Form

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0),$$

dargestellt werden kann.

(1) Der Punkt  $E_1$  hat die Koordinaten  $(1, 0)$  und der Punkt  $E_2$  hat die Koordinaten  $(0, 1)$  bzgl. der Basis  $(E_1, E_2)$ . Das bedeutet,  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  müssen die beiden Gleichungen

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0$$

erfüllen. Eine Lösung ist  $\alpha = 1, \beta = 1$  und  $\gamma = -1$ . Die Geradengleichung von  $g(E_1, E_2)$  ist somit

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Das heißt  $g(E_1, E_2) = \{X = x_1 E_1 + x_2 E_2 \in \mathcal{E} : x_1 + x_2 = 1\}$ . Für eine andere Wahl von  $\alpha$ , z.B.  $\alpha = t$  mit  $t \neq 0$ , ergeben die beiden Gleichungen  $\beta = t$  und  $\gamma = -t$ . Natürlich ist die resultierende Geradengleichung  $tx_1 + tx_2 = t$  äquivalent zu  $x_1 + x_2 = 1$ . (Die Wahl  $\alpha = 0$  würde auf  $\beta = \gamma = 0$  führen, was aber die Bedingung  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  verletzt.)

(2)  $E_1 - E_2$  hat die Koordinaten  $(1, -1)$  und  $E_1 + E_2$  hat die Koordinaten  $(1, 1)$  bzgl. der Basis  $(E_1, E_2)$ . Damit ergeben sich die Gleichungen

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen, sehen wir, dass  $\alpha = -\gamma$  gelten muss, durch Subtraktion, dass  $\beta = 0$  ist. Die gesuchte Geradengleichung ist also

$$x_1 = 1.$$

(3)  $2E_1 + 3E_2$  hat die Koordinaten  $(2, 3)$  und  $O$  hat die Koordinaten  $(0, 0)$  bzgl. der Basis  $(E_1, E_2)$ . Somit müssen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  den Gleichungen

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = 0, \quad \gamma = 0$$

genügen. Es folgt, dass die gesuchte Gleichung

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

ist.

**Aufgabe 5.6.** Zeigen Sie, dass die Komposition einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  mit einer Translation (unabhängig von der Reihenfolge) wieder eine zentrische Streckung mit Streckfaktor  $k$  ist.

*Lösung.* In  $(\mathcal{E}, O)$  hat die zentrische Streckung mit Zentrum  $A$  und Streckfaktor  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  die Gestalt

$$X \mapsto k(X - A) + A,$$

vgl. Korollar 8.14. Die Komposition mit der Translation  $X \mapsto X + B$  ist

$$X \mapsto (k(X - A) + A) + B = kX - kA + A + B = k(X - (A + \frac{1}{1-k}B)) + A + \frac{1}{1-k}B$$

oder in umgekehrter Reihenfolge

$$X \mapsto k((X + B) - A) + A = kX + kB - kA + A = k(X - (A + \frac{k}{1-k}B)) + A + \frac{k}{1-k}B.$$

In beiden Fällen folgt aus Korollar 8.14, dass die Komposition eine zentrische Streckung mit Streckfaktor  $k$  ist, im ersten Fall mit Zentrum  $A + \frac{1}{1-k}B$ , im zweiten Fall mit Zentrum  $A + \frac{k}{1-k}B$ .

**Aufgabe 5.7.** Sei  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  eine zentrische Streckung und  $g$  eine orientierte Gerade in  $\mathcal{E}$ . Auf der Bildgeraden  $g' = f(g)$  wählen wir die Ordnung, sodass  $g$  und  $g'$  gleichsinnig parallel sind (vgl. Proposition 7.7 und Theorem 8.13). Zeigen Sie, dass  $f|_g : g \rightarrow g'$  entweder ordnungserhaltend oder ordnungsumkehrend ist, je nachdem ob der Streckfaktor von  $f$  positiv oder negativ ist. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.6, um den allgemeinen Fall auf den Fall zurückzuführen, dass  $g$  das Zentrum von  $f$  enthält.

*Lösung.* Wenn  $f$  die Identität ist (d.h. der Streckfaktor ist  $k = 1$ ), dann ist nichts zu zeigen. Wir können also  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  annehmen.

Die Aussage ist klar, wenn das Zentrum  $O$  von  $f$  auf  $g$  liegt und daher  $g' = g$  ist.

Sei nun  $g$  eine orientierte Gerade, die das Zentrum  $O$  von  $f$  nicht enthält. Dann gibt es eine Translation  $t$ , die  $g$  ordnungserhaltend auf eine orientierte parallele Gerade  $h$  durch  $O$  abbildet. Insbesondere sind  $h$  und  $g$  gleichsinnig parallel und folglich sind auch  $h$  und  $g'$  gleichsinnig parallel (vgl. Proposition 7.8). Das bedeutet, es gibt eine Translation  $t'$ , die  $g'$  ordnungserhaltend auf  $h$  abbildet. Die Abbildung  $t' \circ f \circ t^{-1}$  ist nach Aufgabe 5.6 eine zentrische Streckung mit dem gleichen Streckfaktor wie  $f$ , die  $h$  auf sich selbst abbildet. Insbesondere muss das Zentrum von  $t' \circ f \circ t^{-1}$  auf  $h$  liegen. Wir wissen schon, dass  $t' \circ f \circ t^{-1}|_h : h \rightarrow h$  entweder ordnungserhaltend oder ordnungsumkehrend ist, je nachdem ob der Streckfaktor positiv oder negativ ist. Weil die Einschränkungen der Translationen  $t$  und  $t'$  ordnungserhaltend sind und daher auch ihre Umkehrungen, folgt auch der allgemeine Fall.

**Aufgabe 5.8.** Zeigen Sie Theorem 9.3:

- (1) Die Dilatationen der Ebene  $\mathcal{E}$  bilden eine nicht-abelsche Gruppe  $\mathcal{D}$  bezüglich der Komposition.
- (2) Für zwei Elemente  $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$  gilt  $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$  genau dann, wenn  $d_1$  und  $d_2$  beide Translationen oder beide zentrische Streckungen mit dem gleichen Zentrum sind. Hier fassen wir die Identität sowohl als eine Translation als auch als eine zentrische Streckung auf.
- (3) Die Abbildung  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^*$ , die  $d \in \mathcal{D}$  den Streckfaktor  $k$  von  $d$  zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe  $\mathbb{R}^*$ .

*Lösung.* (1) Seien  $d_1$  und  $d_2$  zwei Dilatationen. Theorem 9.1 besagt, dass eine Abbildung  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  genau dann eine Dilatation ist, wenn  $f$  jede Gerade  $g$  auf eine zu  $g$  parallele Gerade abbildet. Es folgt, dass die Komposition  $d_1 \circ d_2$  wieder eine Dilatation ist, weil sie offenbar dieses Kriterium erfüllt. Die Assoziativität der Komposition ist klar. Das neutrale Element ist die Identität. Jede Dilatation ist bijektiv (vgl. Proposition 9.2) und die Umkehrabbildung ist ebenfalls eine Dilatation, weil sie auch jede Gerade  $g$  auf eine Gerade parallel zu  $g$  abbildet. Somit ist  $\mathcal{D}$  eine Gruppe. In der Lösung von Aufgabe 5.6 haben wir gesehen, dass im Allgemeinen  $d_1 \circ d_2 \neq d_2 \circ d_1$  gilt.

(2) Wenn  $d_1$  und  $d_2$  beide Translationen oder beide zentrische Streckungen mit dem gleichen Zentrum sind, dann ist leicht zu überprüfen, dass  $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$  gilt.

Umgekehrt seien  $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$  mit  $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$ . In  $(\mathcal{E}, O)$  haben sie die Gestalt

$$d_1(X) = k_1X + A_1, \quad d_2(X) = k_2X + A_2,$$

für  $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$  und  $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Es folgt

$$(d_1 \circ d_2)(X) = k_1(k_2X + A_2) + A_1 = k_1k_2X + k_1A_2 + A_1$$

und

$$(d_2 \circ d_1)(X) = k_2(k_1X + A_1) + A_2 = k_1k_2X + k_2A_1 + A_2.$$

Die Identität  $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$  impliziert

$$k_1A_2 + A_1 = k_2A_1 + A_2 \quad \Leftrightarrow \quad (k_1 - 1)A_2 = (k_2 - 1)A_1.$$

Es treten nun folgende Fälle auf:

- Wenn  $k_1 = 1$ , dann ist entweder  $k_2 = 1$  oder  $A_1 = O$ . Wenn  $k_1 = k_2 = 1$ , dann sind  $d_1$  und  $d_2$  Translationen. Wenn  $k_1 = 1, k_2 \neq 1$  und  $A_1 = O$ , dann ist  $d_1$  die Identität und  $d_2$  eine zentrische Streckung; fassen wir die Identität als zentrische Streckung auf, dann ist jeder Punkt in der Ebene ein Zentrum. Analog argumentiert man, wenn  $k_2 = 1$ .
- Wenn  $k_1 \neq 1$  und  $k_2 \neq 1$ , dann sind  $d_1$  und  $d_2$  zentrische Streckungen mit dem Zentrum  $\frac{1}{1-k_1}A_1$  bzw.  $\frac{1}{1-k_2}A_2$  (vgl. Proposition 9.2). Die Gleichung  $(k_1 - 1)A_2 = (k_2 - 1)A_1$  bedeutet, dass die beiden Zentren übereinstimmen.

(3) Die Aussage bedeutet, dass der Streckfaktor von  $d_1 \circ d_2$  gleich  $k_1k_2$  ist. Das folgt aus dem Beweis von (2).

## 6. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 20. BIS 24. APRIL

**Aufgabe 6.1.** Sei  $\delta$  eine Richtung und sei  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: Für alle  $X \neq Y \in \mathcal{E}$  liegen die Punkte  $f(X)$  und  $f(Y)$  auf einer zu  $g(X, Y)$  parallelen Geraden und für alle  $X \in \mathcal{E}$  liegen  $X$  und  $f(X)$  auf einer Geraden mit der Richtung  $\delta$ . Zeigen Sie, dass  $f$  eine Translation ist.

*Lösung.* Die Identität erfüllt die Bedingungen und ist eine Translation. Sei  $f$  also nicht die Identität. Wir überlegen uns zuerst, dass dann  $f$  keinen Fixpunkt haben kann. Angenommen  $f$  hat einen Fixpunkt  $A$ . Sei  $X$  ein beliebiger Punkt in  $\mathcal{E} \setminus \{A\}$ . Weil  $f(X)$  und  $f(A) = A$  auf einer zu  $g(X, A)$  parallelen Geraden liegen müssen, gilt  $f(X) \in g(X, A)$ . Weil  $f$  nicht die Identität ist, gibt es einen Punkt  $B \neq A$ , sodass  $f(B) \neq B$ . Sei  $C$  ein Punkt im Komplement von  $g(A, B)$ . Ist  $C$  ein Fixpunkt von  $f$ , dann gilt  $f(B) \in g(B, C)$  und  $f(B) \in g(A, B)$  und folglich  $f(B) = B$ , ein Widerspruch. Somit gilt  $f(C) \neq C$ . Aber dann können die Geraden  $g(B, f(B))$  und  $g(C, f(C))$  nicht die gleiche Richtung haben, weil sie nur den Punkt  $A$  gemeinsam haben.

Nach Proposition 9.5 ist  $f$  eine Dilatation oder konstant. Aber  $f$  kann nicht konstant sein, denn sonst hätte  $f$  einen Fixpunkt. Jede Dilatation ist eine Translation oder eine zentrische Streckung mit Streckfaktor  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  (vgl. Proposition 9.2). Der zweite Fall ist ausgeschlossen, denn  $f$  hat keinen Fixpunkt.

Jede Translation mit Translationsrichtung  $\delta$  hat die beiden Eigenschaften von  $f$ .

**Aufgabe 6.2.** Seien  $A, B$  und  $C$  drei paarweise verschiedene kollineare Punkte mit dem Teilverhältnis  $\frac{AC}{CB} = 2$ . Berechnen Sie die Teilverhältnisse

$$\frac{AB}{BC}, \quad \frac{CA}{AB}, \quad \frac{CB}{BA}, \quad \frac{BA}{AC} \quad \text{und} \quad \frac{BC}{CA}.$$

*Lösung.* Das Teilverhältnis  $\frac{AC}{CB} = k$  ist definiert durch

$$\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{CB}.$$

Wir fixieren  $O \in \mathcal{E}$  und rechnen im Vektorraum  $(\mathcal{E}, O)$ . Der freie Vektor  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{O(C - A)}$  kann dann mit dem Punkt  $C - A$  in  $(\mathcal{E}, O)$  identifiziert werden. Die definierende Gleichung hat dann die Gestalt

$$C - A = k(B - C).$$

(Weil  $A, B, C$  paarweise verschieden sind, gilt  $k \neq -1$  und  $k \neq 0$ .) Diese Gleichung ist äquivalent zu den folgenden Gleichungen:

(1) Durch Addition mit  $B - C$  gelangen wir zu

$$B - A = (k + 1)B - (k + 1)C \quad \Leftrightarrow \quad B - A = -(k + 1)(C - B).$$

Das heißt  $\frac{AB}{BC} = -(k + 1)$ . Wenn  $k = 2$  gilt also  $\frac{AB}{BC} = -3$ .

(2) Durch Addition mit  $-kA$  und Umformung erhalten wir

$$(k + 1)(C - A) = k(B - A) \quad \Leftrightarrow \quad A - C = -\frac{k}{k + 1}(B - A).$$

Das heißt  $\frac{CA}{AB} = -\frac{k}{k + 1}$ . Wenn  $k = 2$  gilt also  $\frac{CA}{AB} = -\frac{2}{3}$ .

(3) Dank (1) haben wir

$$B - A = (k + 1)B - (k + 1)C \Leftrightarrow B - C = -\frac{1}{k + 1}(A - B)$$

Das heißt  $\frac{CB}{BA} = -\frac{1}{k+1}$ . Wenn  $k = 2$  gilt also  $\frac{CB}{BA} = -\frac{1}{3}$ .

(4) Dank (2) haben wir

$$(k + 1)(C - A) = k(B - A) \Leftrightarrow A - B = -\frac{k + 1}{k}(C - A).$$

Das heißt  $\frac{BA}{AC} = -\frac{k+1}{k}$ . Wenn  $k = 2$  gilt also  $\frac{BA}{AC} = -\frac{3}{2}$ .

(5) Umformung liefert

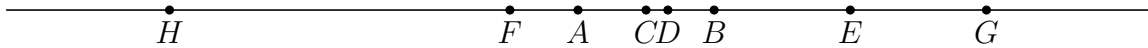
$$C - A = k(B - C) \Leftrightarrow C - B = \frac{1}{k}(A - C).$$

Das heißt  $\frac{BC}{CA} = \frac{1}{k}$ . Wenn  $k = 2$  gilt also  $\frac{BC}{CA} = \frac{1}{2}$ .

**Aufgabe 6.3.** Seien  $A$  und  $B$  verschiedene Punkt der Ebene und  $g = g(A, B)$ . Skizzieren Sie die folgenden Punkte auf  $g$ , die durch ihr Teilverhältnis mit  $A$  und  $B$  gegeben sind:

$$\frac{AC}{CB} = 1, \quad \frac{AD}{DB} = 2, \quad \frac{AE}{EB} = -2, \quad \frac{AF}{FB} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{AG}{GB} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{AH}{HB} = -\frac{3}{4}.$$

*Lösung.*



*Bemerkungen:* Für den Punkt  $X$  auf  $g(A, B)$ , der  $\frac{AX}{XB} = k$  erfüllt, gilt in  $(\mathcal{E}, O)$  die Gleichung  $X - A = k(B - X)$  und somit

$$X = \frac{1}{k + 1}A + \frac{k}{k + 1}B.$$

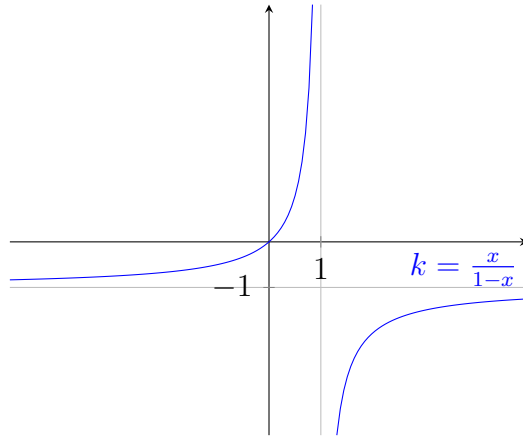
Wir wählen wir nun den Punkt  $A$  als Ursprung und betrachten eine Basis  $(E_1, E_2)$  des Vektorraums  $(\mathcal{E}, A)$  mit  $E_1 = B$ . Es interessiert uns nur die erste Koordinate bzgl. dieser Basis, weil wir nur Punkte auf  $g(A, B)$  betrachten. Die Gleichung für  $X$  hat dann die Gestalt

$$x = \frac{k}{k + 1}.$$

Wir können diese Gleichung nach  $k$  auflösen und erhalten

$$k = \frac{x}{1 - x}.$$

Daran können wir ablesen, wie das Teilverhältnis  $\frac{AX}{XB} = k$  von der Abszisse des Punktes  $X$  abhängt.



**Aufgabe 6.4.** Seien  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte. Sei  $X \in (A, B)$  der Punkt auf der Strecke  $(A, B)$ , für den

$$\frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}$$

gilt. Berechnen Sie die Teilverhältnisse

$$\frac{AX}{XB} \quad \text{und} \quad \frac{BA}{AX}.$$

Man sagt:  $X$  teilt  $(A, B)$  im *goldenen Schnitt*.

*Lösung.* Sei  $k = \frac{AX}{XB}$ . In  $(\mathcal{E}, O)$  gilt dann  $X - A = k(B - X)$ . Diese Gleichung ist äquivalent zu  $(k + 1)(X - A) = k(B - A)$ , d.h.  $\frac{BA}{AX} = -\frac{k+1}{k}$ . Weil  $X \in (A, B)$ , ist die Gleichung

$$\frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}$$

äquivalent zu

$$k = \frac{AX}{XB} = -\frac{BA}{AX} = \frac{k+1}{k},$$

denn das Teilverhältnis  $\frac{AX}{XB}$  ist positiv und das Teilverhältnis  $\frac{BA}{AX}$  ist negativ. Diese Gleichung ist äquivalent zu  $k^2 - k - 1 = 0$  und hat die Lösungen

$$k_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Weil das Teilverhältnis  $k$  positiv sein muss, gilt

$$\frac{AX}{XB} = k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{BA}{AX} = -\frac{k+1}{k} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Aufgabe 6.5.** In  $\mathbb{R}^2$  seien die drei Punkte  $A = (-1, 2)$ ,  $B = (3, 0)$  und  $C = (5, -1)$  gegeben. Zeigen Sie, dass die drei Punkte auf einer Geraden  $g$  liegen und berechnen Sie das Teilverhältnis  $\frac{AC}{CB}$ . Bestimmen Sie die Punkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  auf  $g$ , die

$$\frac{DC}{CB} = -4, \quad \frac{AE}{ED} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{EF}{ED} = \frac{1}{2}$$

erfüllen.

*Lösung.* Die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  liegen auf einer Geraden  $g$ , weil  $B - A = (4, -2)$ ,  $C - A = (6, -3)$  und daher  $C - A = \frac{3}{2}(B - A)$  gilt. Die Gleichung ist äquivalent zu  $C - A = -3(B - C)$ , d.h.  $\frac{AC}{CB} = -3$ .

Der Punkt  $D$  erfüllt

$$C - D = -4(B - C) \quad \Leftrightarrow \quad D = 4B - 3C = (-3, 3).$$

Den Punkt  $E$  erhalten wir durch

$$E - A = D - E \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{1}{2}(A + D) = (-2, \frac{5}{2}).$$

Und  $F$  genügt

$$F - E = \frac{1}{2}(D - E) \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{1}{2}(D + E) = (-\frac{5}{2}, \frac{11}{4}).$$

**Aufgabe 6.6.** Seien  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $X$  vier paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. Zeigen Sie, dass

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CX}{XA} = -1$$

gilt.

*Lösung.* In Termen des signierten Abstandes auf der Geraden, auf der alle vier Punkte liegen, gilt

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CX}{XA} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{BX} \cdot \overline{CX}}{(-1)\overline{AX} \cdot (-1)\overline{BX} \cdot (-1)\overline{CX}} = -1.$$

**Aufgabe 6.7.** Beweisen Sie den *Satz von Desargues* (mit Hilfe des orientierten Strahlensatzes): Seien  $g_1$ ,  $g_2$  und  $g_3$  drei verschiedene Geraden durch einen Punkt  $O$ . Seien  $A_1, A'_1 \in g_1 \setminus \{O\}$ ,  $A_2, A'_2 \in g_2 \setminus \{O\}$  und  $A_3, A'_3 \in g_3 \setminus \{O\}$  so, dass  $g(A_1, A_2) \parallel g(A'_1, A'_2)$  und  $g(A_2, A_3) \parallel g(A'_2, A'_3)$ . Dann gilt  $g(A_1, A_3) \parallel g(A'_1, A'_3)$ .

*Lösung.* Der orientierte Strahlensatz (Theorem 9.7) liefert, dass

$$\frac{OA_1}{OA'_1} = \frac{OA_2}{OA'_2} \quad \text{und} \quad \frac{OA_2}{OA'_2} = \frac{OA_3}{OA'_3}$$

und daher

$$\frac{OA_1}{OA'_1} = \frac{OA_3}{OA'_3}.$$

Die Rückrichtung des orientierten Strahlensatzes impliziert  $g(A_1, A_3) \parallel g(A'_1, A'_3)$ .

Wenn  $A_i = A'_i$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ , dann implizieren die Voraussetzungen, dass  $A_i = A'_i$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$  gilt, und die Behauptung ist trivial.

**Aufgabe 6.8.** Beweisen Sie den *Satz von Pappus*: Seien  $g$  und  $g'$  zwei verschiedene Geraden durch den Punkt  $O$ . Seien  $A_1, A_2, A_3 \in g \setminus \{O\}$  und  $A'_1, A'_2, A'_3 \in g' \setminus \{O\}$  so, dass  $g(A_1, A'_2) \parallel g(A_2, A'_1)$  und  $g(A_2, A'_3) \parallel g(A_3, A'_2)$ . Dann gilt  $g(A_1, A'_3) \parallel g(A_3, A'_1)$ . Hinweis: Verwenden Sie den orientierten Strahlensatz und Aufgabe 6.6.



*Lösung.* Wir können annehmen, dass die Punkte  $A_1, A_2, A_3$  und  $A'_1, A'_2, A'_3$  jeweils paarweise verschieden sind; sonst ist nichts zu zeigen. Der orientierte Strahlensatz liefert

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OA'_1}{OA'_2} \quad \text{und} \quad \frac{OA_2}{OA_3} = \frac{OA'_2}{OA'_3}.$$

Wegen Aufgabe 6.6 gilt auf der Geraden  $g$

$$\frac{A_1O}{OA_2} \cdot \frac{A_2O}{OA_3} \cdot \frac{A_3O}{OA_1} = -1$$

und folglich

$$\frac{OA_1}{OA_3} = \frac{A_1O}{OA_2} \cdot \frac{A_2O}{OA_3} = \frac{OA_1}{OA_2} \cdot \frac{OA_2}{OA_3}.$$

Analog gilt dank Aufgabe 6.6 auf  $g'$

$$\frac{OA'_1}{OA'_3} = \frac{OA'_1}{OA'_2} \cdot \frac{OA'_2}{OA'_3}.$$

Somit folgt

$$\frac{OA_1}{OA_3} = \frac{OA'_1}{OA'_3}$$

und der orientierte Strahlensatz impliziert  $g(A_1, A_3) \parallel g(A'_1, A'_3)$ .

**Aufgabe 6.9.** Verwenden Sie den Strahlensatz, um ein Verfahren zu finden, mit dem jede gegebene Strecke  $(A, B)$  im Verhältnis  $p : q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  geteilt werden kann. Genauer: Der Punkt  $X \in (A, B)$  mit  $\frac{AX}{XB} = \frac{p}{q}$  soll nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden.

*Lösung.* Sei  $h$  eine Halbgerade mit Ursprung  $A$ , sodass  $B$  nicht auf der Trägergeraden von  $h$  liegt. Wähle einen beliebigen Punkt  $C_1$  auf  $h$  und die Trägergerade von  $h$  sei so geordnet, dass  $O < C_1$  gilt. Sei  $C_2$  der Punkt auf  $h$ , der  $C_2 > C_1$  und  $d(C_2, C_1) = d(C_1, O)$  erfüllt. Wir iterieren diese Konstruktion:  $C_i$  ist der Punkt auf  $h$  mit  $C_i > C_{i-1}$  und  $d(C_i, C_{i-1}) = d(C_{i-1}, C_{i-2})$ , bis der Punkt  $C_{p+q}$  gefunden ist. Nach dem Strahlensatz schneidet die Gerade durch  $C_p$ , die parallel zur Geraden  $g(C_{p+q}, B)$  ist, die Strecke  $(A, B)$  im Verhältnis  $p : q$ .

## 7. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 27. APRIL BIS 1. MAI

**Aufgabe 7.1.** Zeigen Sie den orientierten Strahlensatz mit Hilfe von Koordinaten: Seien  $g_1, g_2$  zwei Geraden mit Schnittpunkt  $O$  und  $h, k$  zwei weitere Geraden. Seien  $g_1 \cap h = \{H_1\}$ ,  $g_2 \cap h = \{H_2\}$  und  $g_1 \cap k = \{K_1\}$ ,  $g_2 \cap k = \{K_2\}$ , sodass  $O, H_1, H_2$  und  $O, K_1, K_2$  jeweils paarweise verschieden sind. Dann gilt

$$\frac{OH_1}{OK_1} = \frac{OH_2}{OK_2}$$

genau dann, wenn  $h$  und  $k$  parallel sind. Hinweis: Wählen Sie die Basis  $(H_1, H_2)$  im Vektorraum  $(\mathcal{E}, O)$  und rechnen Sie mit entsprechenden Koordinaten.

*Lösung.* Bzgl. der Basis  $(H_1, H_2)$  haben die Punkte die folgenden Koordinaten:

$$O = (0, 0), \quad H_1 = (1, 0), \quad H_2 = (0, 1), \quad K_1 = (k_1, 0), \quad K_2 = (0, k_2).$$

Wenn  $h$  und  $k$  parallel sind, dann muss es ein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $\lambda(H_2 - H_1) = K_2 - K_1$ , d.h.  $\lambda(-1, 1) = (-k_1, k_2)$ . Das bedeutet  $k_1 = \lambda = k_2$  und daher

$$\frac{OH_1}{OK_1} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} = \frac{OH_2}{OK_2}. \quad (2)$$

Gilt umgekehrt (2), dann folgt  $k_1 = k_2 =: \lambda$ . Die Geradengleichung von  $h$  ist  $x_1 + x_2 = 1$  und jene von  $k$  ist  $x_1 + x_2 = \lambda$ . Dann folgt leicht, dass  $h$  und  $k$  parallel sind: Angenommen  $h$  und  $k$  haben einen Punkt  $X$  mit den Koordinaten  $(x_1, x_2)$  gemeinsam, dann folgt  $1 = x_1 + x_2 = \lambda$  und somit  $h = k$ .

**Aufgabe 7.2.** Seien  $A, B$  und  $C$  drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene  $\mathcal{E}$ . Zeigen Sie, dass jeder Punkt  $X$  in  $(\mathcal{E}, O)$  in eindeutiger Weise in der Form

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C, \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

geschrieben werden kann. Man nennt  $(\alpha, \beta, \gamma)$  die *baryzentrischen Koordinaten* von  $X$  bzgl.  $(A, B, C)$ . Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Basis von  $(\mathcal{E}, O)$  und verwenden Sie die Darstellung bzgl. dieser Basis.

*Lösung.* Die Translation  $X \mapsto X - C$  bildet das Dreieck  $(A, B, C)$  auf das Dreieck  $(A - C, B - C, O)$  ab, welches ebenso nicht-degeneriert ist. Wir wählen  $E_1 = A - C$  und  $E_2 = B - C$  als Basis des Vektorraums  $(\mathcal{E}, O)$  und stellen  $X - C$  bzgl. dieser Basis dar:

$$X - C = x_1 E_1 + x_2 E_2 = x_1(A - C) + x_2(B - C).$$

Es folgt

$$X = x_1 A + x_2 B + (1 - x_1 - x_2)C.$$

Damit ist Existenz der Darstellung bzgl. baryzentrischer Koordinaten gezeigt. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Koordinatendarstellung bzgl. der Basis  $(E_1, E_2)$ , wir geben aber auch einen direkten Beweis: Angenommen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und  $(\alpha', \beta', \gamma')$  sind baryzentrische Koordinaten des Punktes  $X$  bzgl.  $(A, B, C)$ . Dann gilt

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C$$

und weil  $\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha' + \beta' + \gamma' = 1$  folgt

$$(\alpha - \alpha')(A - C) + (\beta - \beta')(B - C) = O.$$

Weil  $A, B$  und  $C$  nicht kollinear sind, muss  $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$  und  $\gamma = \gamma'$  gelten.

**Aufgabe 7.3.** Seien  $A, B$  und  $C$  drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene  $(\mathcal{E}, O)$ .

- (1) Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten der Mittelpunkte  $M_{AB}, M_{BC}$  und  $M_{CA}$  der Strecken  $(A, B), (B, C)$  und  $(C, A)$ .
- (2) Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten des Schnittpunktes  $S$  der Geraden  $g(A, M_{BC})$  und  $g(B, M_{CA})$ .
- (3) Zeigen Sie, dass  $S$  auf der Geraden  $g(C, M_{AB})$  liegt. Der Punkt  $S$  heißt *Schwerpunkt* des Dreiecks  $(A, B, C)$ .

*Lösung.* (1) Weil  $M_{AB} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + 0C$ , hat  $M_{AB}$  die baryzentrischen Koordinaten  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ . Analog sieht man, dass  $M_{BC}$  die baryzentrischen Koordinaten  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  und  $M_{CA}$  die baryzentrischen Koordinaten  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  hat.

(2) Die Punkte auf der Geraden  $g(A, M_{BC})$  haben die Gestalt

$$X = A + t(M_{BC} - A) = (1 - t)A + tM_{BC} = (1 - t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Punkte auf der Geraden  $g(B, M_{CA})$  haben die Gestalt

$$X = B + s(M_{CA} - B) = (1 - s)B + sM_{CA} = (1 - s)B + \frac{s}{2}C + \frac{s}{2}A, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $g(A, M_{BC})$  und  $g(B, M_{CA})$  erfüllt also die Gleichung

$$(1 - t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C = \frac{s}{2}A + (1 - s)B + \frac{s}{2}C.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung in baryzentrischen Koordinaten müssen also die folgenden Gleichungen gelten:

$$1 - t = \frac{s}{2}, \quad \frac{t}{2} = 1 - s, \quad \frac{t}{2} = \frac{s}{2}.$$

Die eindeutige Lösung ist  $t = s = \frac{2}{3}$ . Der Schnittpunkt  $S$  ist also der Punkt

$$S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C,$$

d.h.  $S$  hat die baryzentrischen Koordinaten  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

(3) Die Punkte auf der Geraden  $g(C, M_{AB})$  haben die Gestalt

$$X = C + r(M_{AB} - C) = \frac{r}{2}A + \frac{r}{2}B + (1 - r)C, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir  $r = \frac{2}{3}$  sehen wir, dass  $S$  auf  $g(C, M_{AB})$  liegt.

**Aufgabe 7.4.** Seien  $A, B$  und  $C$  drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene  $(\mathcal{E}, O)$ . Sei  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  eine affine Abbildung mit  $A' = f(A)$ ,  $B' = f(B)$  und  $C' = f(C)$ , sodass  $A', B'$  und  $C'$  nicht-kollinear sind. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt  $S$  von  $(A, B, C)$  unter  $f$  auf den Schwerpunkt  $S'$  von  $(A', B', C')$  abgebildet wird.

*Lösung.* In  $(\mathcal{E}, O)$  hat  $f$  die Gestalt

$$f(X) = \ell(X) + D,$$

wobei  $\ell$  eine lineare Abbildung  $(\mathcal{E}, O) \rightarrow (\mathcal{E}, O)$  und  $D \in \mathcal{E}$  ist. Der Schwerpunkt  $S$  von  $(A, B, C)$  ist der eindeutige Punkt

$$S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(S) &= f\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C\right) \\ &= \ell\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C\right) + D \\ &= \frac{1}{3}\ell(A) + \frac{1}{3}\ell(B) + \frac{1}{3}\ell(C) + D \\ &= \frac{1}{3}(\ell(A) + D) + \frac{1}{3}(\ell(B) + D) + \frac{1}{3}(\ell(C) + D) \\ &= \frac{1}{3}f(A) + \frac{1}{3}f(B) + \frac{1}{3}f(C) \\ &= \frac{1}{3}A' + \frac{1}{3}B' + \frac{1}{3}C' \\ &= S' \end{aligned}$$

Die letzte Identität gilt, weil  $A', B'$  und  $C'$  nicht-kollinear sind und daher  $\frac{1}{3}A' + \frac{1}{3}B' + \frac{1}{3}C'$  der Schwerpunkt von  $(A', B', C')$  ist.

**Aufgabe 7.5.** Seien  $A, B$  und  $C$  drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene  $(\mathcal{E}, O)$ .

(1) Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{X = \alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

konvex ist. Hinweis: Es gilt  $X \in [X_1, X_2]$  genau dann, wenn  $X = tX_1 + (1-t)X_2$  für ein  $t \in [0, 1]$ .

(2) Beweisen Sie, dass  $K$  die konvexe Hülle von  $\{A, B, C\}$  ist. Mit anderen Worten: Die konvexe Hülle von  $\{A, B, C\}$  ist die Menge aller Punkte mit nicht-negativen baryzentrischen Koordinaten bzgl.  $(A, B, C)$ .

*Lösung.* (1) Wenn  $X_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C$  und  $X_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C$  mit  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$  und  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$  und  $X \in [X_1, X_2]$ , dann gibt es ein  $t \in [0, 1]$  mit

$$\begin{aligned} X &= tX_1 + (1-t)X_2 \\ &= t(\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C) + (1-t)(\alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C) \\ &= (t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2)A + (t\beta_1 + (1-t)\beta_2)B + (t\gamma_1 + (1-t)\gamma_2)C. \end{aligned}$$

Setzen wir  $\alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$ ,  $\beta = t\beta_1 + (1-t)\beta_2$  und  $\gamma = t\gamma_1 + (1-t)\gamma_2$  dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = t(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (1-t)(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = t + (1-t) = 1$$

und  $\alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 \geq 0$ , weil  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  und  $t \in [0, 1]$ . Genauso folgt  $\beta \geq 0$  und  $\gamma \geq 0$ . Das zeigt, dass  $X \in K$  und somit  $K$  konvex ist.

(2) Sei  $H$  die konvexe Hülle von  $\{A, B, C\}$ . Dann gilt  $H \subseteq K$  wegen (1), weil  $K$  natürlich die Punkte  $A, B$  und  $C$  enthält. Nun zeigen wir  $K \subseteq H$ . Sei  $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$  ein Punkt in  $K$ . Die Punkte auf der Geraden  $g(C, X)$  haben die Gestalt

$$Y = C + t(X - C) = C + t(\alpha A + \beta B + \gamma C - C) = t\alpha A + t\beta B + (1-t + t\gamma)C,$$

wobei  $t \in \mathbb{R}$ . Der Schnittpunkt  $Y$  der Geraden  $g(C, X)$  und  $g(A, B)$  muss also  $1-t+t\gamma = 0$  erfüllen, d.h.  $t = \frac{1}{1-\gamma}$  ( $\gamma \neq 1$ , sonst würde die Gleichung  $1 = 0$  ergeben). Der Schnittpunkt ist somit

$$Y = \frac{\alpha}{1-\gamma}A + \frac{\beta}{1-\gamma}B.$$

Weil  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$  und  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , muss auch  $1 - \gamma \geq 0$  sein, d.h.  $Y \in [A, B]$  und somit  $Y \in H$ , weil  $A, B \in H$  und  $H$  konvex ist. Weiters gilt

$$X = \frac{1}{t}Y + \frac{t-1}{t}C = (1-\gamma)Y + \gamma C$$

und somit  $X \in [Y, C]$ . Weil  $Y, C \in H$  und  $H$  konvex ist, folgt  $X \in H$ . Damit haben wir auch die Inklusion  $K \subseteq H$  gezeigt.

*Bemerkung:* Alternativ folgt die Behauptung aus Aufgabe 4.3, weil die abgeschlossene Halbebene bzgl. der Geraden  $g(A, B)$ , die  $C$  enthält, die Menge

$$\{X = \alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

ist (weil  $X = (1 - \beta - \gamma)A + \beta B + \gamma C = A + \beta(B - A) + \gamma(C - A)$ ).

**Aufgabe 7.6.** Zeigen Sie, dass ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck ist, wenn die beiden Diagonalen die gleiche Länge haben.

*Lösung.* Betrachte das Parallelogramm  $(O, X, X+Y, Y)$  in  $(\mathcal{E}, O)$ . Dann gilt  $\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2$  (vgl. Proposition 11.4). Wenn die beiden Diagonalen die

gleiche Länge haben, d.h.  $\|X + Y\| = \|X - Y\|$ , folgt

$$2\|X + Y\|^2 = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2.$$

Andererseits gilt stets  $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\langle X | Y \rangle$ . Somit haben wir  $\langle X | Y \rangle = 0$ , d.h.  $X \perp Y$ . Daher handelt es sich um ein Rechteck.

Sei umgekehrt  $(O, X, X + Y, Y)$  ein Rechteck, d.h.  $\langle X | Y \rangle = 0$ . Das Argument im letzten Absatz liefert dann auch die Umkehrung.

Jedes Parallelogramm kann durch eine Translation in ein Parallelogramm wie oben übergeführt werden. Weil Translationen Orthogonalität (Proposition 10.3) und Distanzen (Proposition 11.6) erhalten, folgt die Aussage.

**Aufgabe 7.7.** Seien  $A, B \in \mathcal{E}$  mit  $A \neq B$ . Sei  $O$  der Mittelpunkt von  $A$  und  $B$  und  $g$  die Streckensymmetrale von  $(A, B)$ .

(1) Für jedes  $X \in \mathcal{E}$  gilt:

$$d(X, B)^2 - d(X, A)^2 = 4d(O, A) \cdot \xi,$$

wobei  $\xi$  die Abszisse auf  $g(A, B)$  von  $X$  im Achsensystem  $(g(A, B), g)$  ist und  $g(A, B)$  so orientiert ist, dass  $O < A$  gilt.

(2) Sei  $\mathcal{E}_A$  (bzw.  $\mathcal{E}_B$ ) die offene Halbebene bzgl.  $g$ , die  $A$  (bzw.  $B$ ) enthält. Dann gilt

$$\mathcal{E}_A = \{X \in \mathcal{E} : d(X, A) < d(X, B)\},$$

$$\mathcal{E}_B = \{X \in \mathcal{E} : d(X, B) < d(X, A)\},$$

$$g = \{X \in \mathcal{E} : d(X, A) = d(X, B)\}.$$

Hinweis: Rechnen Sie im Vektorraum  $(\mathcal{E}, O)$  und verwenden Sie Proposition 11.4 und Lemma 11.2.

*Lösung.* (1) Im Vektorraum  $(\mathcal{E}, O)$  gilt  $B = -A$  und somit nach Proposition 11.4 und Lemma 11.2

$$\begin{aligned} d(X, B)^2 - d(X, A)^2 &= \|X - B\|^2 - \|X - A\|^2 = \|X + A\|^2 - \|X - A\|^2 \\ &= 4\langle A | X \rangle = 4\overline{OA} \cdot \overline{OX'} = 4d(O, A) \cdot \xi, \end{aligned}$$

wobei  $X'$  die Orthogonalprojektion von  $X$  auf  $g(A, B)$  ist. Hier ist  $\xi = \overline{OX'}$  und  $\overline{OA} = d(O, A)$ , weil  $O < A$ .

(2) Nach (1) gilt

$$d(X, B) > d(X, A) \quad \Leftrightarrow \quad \xi > 0,$$

$$d(X, B) = d(X, A) \quad \Leftrightarrow \quad \xi = 0,$$

$$d(X, B) < d(X, A) \quad \Leftrightarrow \quad \xi < 0.$$

Die Aussage folgt, weil das Vorzeichen der Abszisse  $\xi$  die Halbebene bestimmt:  $\mathcal{E}_A$  (bzw.  $\mathcal{E}_B$ ) ist die Menge der Punkte  $X$  mit Abszisse  $\xi > 0$  (bzw.  $\xi < 0$ ) und  $g$  ist die Menge der Punkte mit  $\xi = 0$ .

**Aufgabe 7.8.** Sei  $(A, B, C)$  ein nicht-degeneriertes Dreieck. Verwenden Sie Aufgabe 7.7, um zu zeigen, dass sich die Streckensymmetralen von  $(A, B)$ ,  $(B, C)$  und  $(C, A)$  in einem

Punkt  $U$  schneiden und dass

$$d(U, A) = d(U, B) = d(U, C)$$

gilt. Der Punkt  $U$  heißt *Umkreismittelpunkt* des Dreiecks  $(A, B, C)$ .

*Lösung.* Sei  $s_{AB}$  (bzw.  $s_{BC}$  und  $s_{CA}$ ) die Streckensymmetrale von  $(A, B)$  (bzw.  $(B, C)$  und  $(C, A)$ ). Weil das Dreieck  $(A, B, C)$  nicht-degeneriert ist, sind keine zwei Streckensymmetralen parallel. Der Schnittpunkt  $U$  von  $s_{AB}$  und  $s_{BC}$  erfüllt  $d(U, A) = d(U, B)$  und  $d(U, B) = d(U, C)$  dank Aufgabe 7.7(2). Somit gilt  $d(U, A) = d(U, C)$ . Erneut wegen Aufgabe 7.7(2) liegt  $U$  auf  $s_{CA}$ .

## 8. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 4. BIS 8. MAI

**Aufgabe 8.1.** Zeigen Sie, dass jede Spiegelung parallele Geraden auf parallele Geraden abbildet.

*Lösung.* In Korollar 13.4 wurde gezeigt, dass jede Spiegelung orthogonale auf orthogonale Geraden abbildet. Seien  $g_1$  und  $g_2$  parallele Geraden. Sei  $h$  eine orthogonale Gerade zu  $g_1$ . Dann ist  $h$  auch orthogonal zu  $g_2$  (vgl. Axiom 7). Sei  $s$  eine Spiegelung. Nach Korollar 13.4 folgt  $s(g_1) \perp s(h)$  und  $s(g_2) \perp s(h)$ . Es folgt  $s(g_1) \parallel s(g_2)$  (nach Axiom 7).

Allgemeiner gilt: Jede bijektive affine Abbildung  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab. Denn in  $(\mathcal{E}, O)$  können wir  $f$  in der Form  $f(X) = \ell(X) + A$ , schreiben wobei  $\ell$  eine bijektive lineare Abbildung  $\ell : (\mathcal{E}, O) \rightarrow (\mathcal{E}, O)$  ist. Sind  $g(A_1, A_2)$  und  $g(B_1, B_2)$  parallel, d.h.  $B_2 - B_1 = \lambda(A_2 - A_1)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} f(B_2) - f(B_1) &= \ell(B_2) - \ell(B_1) = \ell(B_2 - B_1) = \ell(\lambda(A_2 - A_1)) \\ &= \lambda \ell(A_2 - A_1) = \lambda(\ell(A_2) - \ell(A_1)) = \lambda(f(A_2) - f(A_1)). \end{aligned}$$

Folglich sind auch die Geraden  $f(g(A_1, A_2))$  und  $f(g(B_1, B_2))$  parallel. Dass es sich dabei tatsächlich wieder um Geraden handelt, garantiert die Bijektivität von  $f$ .

**Aufgabe 8.2.** Seien  $A$  und  $B$  verschiedene Punkte in  $\mathcal{E}$ . Zeigen Sie, dass die Spiegelung  $s$  mit Spiegelungsachse  $g(A, B)$  in  $(\mathcal{E}, O)$  durch die Formel

$$s(X) = X + 2 \left( A + \frac{\langle B - A \mid X - A \rangle}{\|B - A\|^2} (B - A) - X \right)$$

gegeben ist.

*Lösung.* Wir überprüfen, ob die durch die Formel definierte Abbildung die definierenden Eigenschaften der Spiegelung mit Spiegelungsachse  $g(A, B)$  erfüllt (vgl. Abschnitt 13.1). Wenn  $X$  auf  $g(A, B)$  liegt, dann gibt es ein  $t \in \mathbb{R}$  mit  $X = A + t(B - A)$  und somit

$$\frac{\langle B - A \mid X - A \rangle}{\|B - A\|^2} (B - A) = \frac{\langle B - A \mid t(B - A) \rangle}{\|B - A\|^2} (B - A) = t(B - A).$$

In diesem Fall gilt also  $s(X) = X$ .

Nehmen wir nun an, dass  $X$  nicht auf  $g(A, B)$  liegt. Der Punkt  $P = A + \frac{\langle B-A | X-A \rangle}{\|B-A\|^2} (B-A)$  liegt offensichtlich auf  $g(A, B)$  und  $P - X$  ist orthogonal zu  $B - A$ ,

$$\begin{aligned} \langle P - X | B - A \rangle &= \left\langle A + \frac{\langle B - A | X - A \rangle}{\|B - A\|^2} (B - A) - X | B - A \right\rangle \\ &= \langle A - X | B - A \rangle + \langle B - A | X - A \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dann folgt leicht, dass  $s(X)$  (wie in der Formel definiert) der eindeutige Punkt ist, sodass  $g(A, B)$  die Streckensymmetrale von  $(X, s(X))$  ist, denn  $s(X) - X = 2(P - X)$ .

**Aufgabe 8.3.** Sei  $(E_1, E_2)$  eine Orthonormalbasis von  $(\mathcal{E}, O)$ . Berechnen Sie die Koordinatendarstellung bzgl.  $(E_1, E_2)$  der Spiegelung  $s_A$  mit Spiegelungsachse  $g(O, A)$ , wobei:

- (1)  $A = E_i, i = 1, 2.$
- (2)  $A = E_1 - E_2.$
- (3)  $A = -5E_1 + 7E_2.$

*Lösung.* Wir verwenden die Formel aus der vorherigen Aufgabe, die in dieser Situation eine einfachere Gestalt annimmt:

$$s(X) = X + 2 \left( \frac{\langle A | X \rangle}{\|A\|^2} A - X \right) = -X + 2 \frac{\langle A | X \rangle}{\|A\|^2} A. \quad (3)$$

(1) Bezüglich der Basis  $(E_1, E_2)$  hat  $E_1$  die Koordinaten  $(1, 0)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} s_{E_1}(x_1, x_2) &= -(x_1, x_2) + 2 \frac{\langle (1, 0) | (x_1, x_2) \rangle}{\|(1, 0)\|^2} (1, 0) \\ &= -(x_1, x_2) + 2(x_1, 0) \\ &= (x_1, -x_2). \end{aligned}$$

Analog sieht man  $s_{E_2}(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ .

(2) Bezüglich der Basis  $(E_1, E_2)$  hat  $E_1 - E_2$  die Koordinaten  $(1, -1)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} s_{E_1 - E_2}(x_1, x_2) &= -(x_1, x_2) + 2 \frac{\langle (1, -1) | (x_1, x_2) \rangle}{\|(1, -1)\|^2} (1, -1) \\ &= -(x_1, x_2) + 2 \frac{x_1 - x_2}{2} (1, -1) \\ &= -(x_1, x_2) + (x_1 - x_2, -x_1 + x_2) \\ &= (-x_2, -x_1). \end{aligned}$$

(3) Bezüglich der Basis  $(E_1, E_2)$  hat  $-5E_1 + 7E_2$  die Koordinaten  $(-5, 7)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} s_{-5E_1 + 7E_2}(x_1, x_2) &= -(x_1, x_2) + 2 \frac{\langle (-5, 7) | (x_1, x_2) \rangle}{\|(-5, 7)\|^2} (-5, 7) \\ &= -(x_1, x_2) + 2 \frac{-5x_1 + 7x_2}{74} (-5, 7) \\ &= -(x_1, x_2) + \frac{1}{37} (25x_1 - 35x_2, -35x_1 + 49x_2) \\ &= \frac{1}{37} (-12x_1 - 35x_2, -35x_1 + 12x_2). \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.4.** Seien  $A, B$  und  $O$  drei verschiedene Punkte.

- (1) Finden Sie eine Formel für die Rotation  $r = s_A \circ s_B$  in  $(\mathcal{E}, O)$ , wobei  $s_A$  (bzw.  $s_B$ ) die Spiegelung mit Spiegelungsachse  $g(O, A)$  (bzw.  $g(O, B)$ ) ist.
- (2) Sei  $(E_1, E_2)$  eine Orthonormalbasis von  $(\mathcal{E}, O)$ . Berechnen Sie die Koordinatendarstellung der Rotation  $r = s_{E_1} \circ s_{E_1+E_2}$  bzgl.  $(E_1, E_2)$ .

*Lösung.* (1) Dank Aufgabe 8.2 und (3) gilt

$$\begin{aligned} r(X) &= s_A(s_B(X)) \\ &= -s_B(X) + 2 \frac{\langle A | s_B(X) \rangle}{\|A\|^2} A \\ &= -\left(-X + 2 \frac{\langle B | X \rangle}{\|B\|^2} B\right) + 2 \frac{\langle A | -X + 2 \frac{\langle B | X \rangle}{\|B\|^2} B \rangle}{\|A\|^2} A \\ &= X - 2 \frac{\langle B | X \rangle}{\|B\|^2} B - 2 \frac{\langle A | X \rangle}{\|A\|^2} A + 4 \frac{\langle B | X \rangle \langle A | B \rangle}{\|B\|^2 \|A\|^2} A. \end{aligned}$$

(2) Nach (1) gilt

$$\begin{aligned} r(X) &= s_{E_1}(s_{E_1+E_2}(X)) \\ &= X - 2 \frac{\langle E_1 + E_2 | X \rangle}{\|E_1 + E_2\|^2} (E_1 + E_2) - 2 \frac{\langle E_1 | X \rangle}{\|E_1\|^2} E_1 \\ &\quad + 4 \frac{\langle E_1 + E_2 | X \rangle \langle E_1 | E_1 + E_2 \rangle}{\|E_1 + E_2\|^2 \|E_1\|^2} E_1. \end{aligned}$$

In Koordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} r(x_1, x_2) &= (x_1, x_2) - 2 \frac{\langle (1, 1) | (x_1, x_2) \rangle}{2} (1, 1) - 2 \langle (1, 0) | (x_1, x_2) \rangle (1, 0) \\ &\quad + 4 \frac{\langle (1, 1) | (x_1, x_2) \rangle \langle (1, 0) | (1, 1) \rangle}{2} (1, 0) \\ &= (x_1, x_2) - (x_1 + x_2)(1, 1) - 2x_1(1, 0) + 2(x_1 + x_2)(1, 0) \\ &= (x_2, -x_1). \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.5.** Zeigen Sie, dass es zu einer Orthonormalbasis  $(E_1, E_2)$  von  $(\mathcal{E}, O)$  und einer Orthonormalbasis  $(E'_1, E'_2)$  von  $(\mathcal{E}, O')$  stets eine eindeutige Isometrie  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  mit  $f(O) = O'$ ,  $f(E_1) = E'_1$  und  $f(E_2) = E'_2$  gibt.

*Lösung.* Die Abbildung  $f : \{O, E_1, E_2\} \rightarrow \mathcal{E}$  definiert durch  $f(O) = O'$ ,  $f(E_1) = E'_1$  und  $f(E_2) = E'_2$  ist eine Isometrie, denn

$$d(O, E_1) = 1 = d(O', E'_1), \quad d(O, E_2) = 1 = d(O', E'_2), \quad d(E_1, E_2) = \sqrt{2} = d(E'_1, E'_2),$$

nach dem Satz von Pythagoras. Nach Theorem 13.13 (vgl. auch Theorem 16.9 (SSS Satz)) kann  $f$  zu einer Isometrie  $\tilde{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  erweitert werden. Die Erweiterung  $\tilde{f}$  ist eindeutig, weil  $\{O, E_1, E_2\}$  nicht kollinear ist.



**Aufgabe 8.6.** Seien  $A$  und  $B$  zwei Teilmengen der Ebene  $\mathcal{E}$  mit der Eigenschaft, dass der Durchschnitt  $A \cap B$  zwei verschiedene Punkte  $X_1$  und  $X_2$  enthält. Beweisen Sie: Wenn eine Isometrie  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  existiert, sodass  $f(A) = B$  und  $f|_{A \cap B} = \text{id}$ , dann ist  $f$  die Identität auf  $\mathcal{E}$  oder es gilt  $A \cap B = (A \cup B) \cap g(X_1, X_2)$ . (Was hat diese Aufgabe mit der Beobachtung zu tun, dass beim Falten von Papier die Faltkante stets ein Geradenstück ist?)

*Lösung.* Die Isometrie  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  hat mindestens zwei Fixpunkte  $X_1$  und  $X_2$ . Nach Proposition 13.10 ist  $f$  somit entweder die Identität oder die Spiegelung an  $g(X_1, X_2)$ .

Sei also  $f$  die Spiegelung an  $g(X_1, X_2)$ . Dann ist  $g(X_1, X_2)$  die Menge aller Fixpunkte von  $f$ . Weil  $f|_{A \cap B} = \text{id}$ , gilt also  $A \cap B \subseteq (A \cup B) \cap g(X_1, X_2)$ . Sei umgekehrt  $X \in (A \cup B) \cap g(X_1, X_2)$ . Dann liegt  $X = f(X)$  in  $A \cap B$ , weil  $f(A) = B$  und  $f(B) = A$ .

Das Falten von Papier entspricht einer Bijektion  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ : zwei Punkte werden ineinander abgebildet, wenn sie aufeinander gefaltet werden. Dabei bleiben Abstände gleich, d.h.  $f$  ist eine Isometrie. Die Faltkante ist besteht aus der Menge der Fixpunkte. Wenn  $A$  und  $B$  Muster sind, die beim Falten ineinander übergehen und nur Punkte auf der Faltkante gemeinsam haben, dann bedeutet  $A \cap B = (A \cup B) \cap g(X_1, X_2)$ , dass die Faltkante stets ein Geradenstück sein muss.

**Aufgabe 8.7.** Beweisen Sie: Die Ähnlichkeiten von  $\mathcal{E}$  bilden eine Gruppe  $\mathcal{A}$ . Die Abbildung  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $f \mapsto k(f)$ , wobei  $k(f)$  der Proportionalitätsfaktor von  $f$  ist, ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe  $\mathbb{R}_{>0}$ .

*Lösung.* Seien  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  und  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  Ähnlichkeiten, d.h. es gibt  $k_f, k_g \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass

$$d(f(X), f(Y)) = k_f \cdot d(X, Y) \quad \text{und} \quad d(g(X), g(Y)) = k_g \cdot d(X, Y)$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{E}$ . Dann gilt

$$d(f(g(X)), f(g(Y))) = k_f \cdot d(g(X), g(Y)) = k_f \cdot k_g \cdot d(X, Y)$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{E}$ . Damit folgt leicht, dass  $\mathcal{A}$  eine Gruppe und  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $f \mapsto k(f)$ , ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen, dass  $f \in \mathcal{A}$  ein inverses Element besitzt: Sei  $g$  eine zentrische Streckung mit Streckfaktor  $k_g = k_f^{-1}$ . Dann ist  $f \circ g$  eine Isometrie  $h$ :

$$d(f(g(X)), f(g(Y))) = k_f \cdot k_f^{-1} \cdot d(X, Y) = d(X, Y), \quad X, Y \in \mathcal{E}.$$

Jede Isometrie ist invertierbar und die Umkehrabbildung ist wieder eine Isometrie. Es folgt, dass  $f = h \circ g^{-1}$  invertierbar ist und somit  $f^{-1} = g \circ h^{-1}$  eine Ähnlichkeit mit Proportionalitätsfaktor  $k_g = k_f^{-1}$  ist.

**Aufgabe 8.8.** Seien  $A \neq B$  und  $A' \neq B'$  Punkte in  $(\mathcal{E}, O)$ .

- (1) Sei zusätzlich  $A = A'$ . Finden Sie eine explizite Beschreibung für die ungerade Ähnlichkeit  $f$  (als Komposition einer geeigneten zentrischen Streckung und einer geeigneten Spiegelung), die  $f(A) = A'$  und  $f(B) = B'$  erfüllt.
- (2) Finden Sie unter Verwendung von (1) im allgemeinen Fall eine explizite Beschreibung für die ungerade Ähnlichkeit  $f$  (als Komposition einer zentrischen Streckung, einer Spiegelung und einer Translation), die  $f(A) = A'$  und  $f(B) = B'$  erfüllt.

*Lösung.* (1) Sei  $B'' := A + \frac{\|B-A\|}{\|B'-A\|}(B'-A)$ . Dann liegt  $B''$  auf der Halbgerade mit Ursprung  $A$  durch  $B'$  und  $d(A, B'') = d(A, B)$ . Sei  $M := \frac{1}{2}(B + B'')$  der Mittelpunkt von  $B$  und  $B''$ . Die Spiegelung  $s$  an der Geraden  $g(A, M)$  führt  $A$  in  $A$  und  $B$  in  $B''$  über (denn  $g(A, M)$  ist die Streckensymmetrale von  $(B, B'')$  nach Proposition 12.14). Sei  $h$  die zentrische Streckung  $X \mapsto \frac{\|B'-A\|}{\|B-A\|}(X - A) + A$ . Dann ist  $f = h \circ s$  eine ungerade Ähnlichkeit mit  $f(A) = A$  und  $f(B) = B'$ , denn

$$\begin{aligned} f(B) &= h(s(B)) = h(B'') = h\left(A + \frac{\|B-A\|}{\|B'-A\|}(B'-A)\right) \\ &= \frac{\|B'-A\|}{\|B-A\|} \frac{\|B-A\|}{\|B'-A\|}(B'-A) + A = B'. \end{aligned}$$

Eine explizite Formel für  $f$  erhalten wir, wenn wir die Formel für  $h$  und jene für  $s$  aus Aufgabe 8.2 zusammensetzen.

(2) Die Translation  $t : X \mapsto X + (A' - A)$  bildet den Punkt  $A$  auf  $A' =: \tilde{A}$  ab und den Punkt  $B$  auf  $\tilde{B} := B + A' - A$ . Die gesuchte Ähnlichkeit ist  $h \circ s \circ t$ , wobei wir in der Definition von  $s$  und  $h$  den Punkt  $A$  durch  $\tilde{A}$  und den Punkt  $B$  durch  $\tilde{B}$  ersetzen, denn

$$\begin{aligned} h(s(t(A))) &= h(s(A')) = h(s(\tilde{A})) = \tilde{A} = A', \\ h(s(t(B))) &= h(s(\tilde{B})) = B'. \end{aligned}$$

Weil  $t$  gerade ist und  $h \circ s$  ungerade, ist  $h \circ s \circ t$  ungerade.

## 9. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 11. BIS 15. MAI

**Aufgabe 9.1.** Zeigen Sie den SWS Satz: Zwei Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  sind kongruent, wenn die Relationen

$$\angle(C', A', B') = \pm \angle(C, A, B)$$

und

$$d(A', B') = d(A, B), \quad d(C', A') = d(C, A)$$

gelten.

*Lösung.* Sei  $f : \{A, B, C\} \rightarrow \mathcal{E}$  durch  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  und  $f(C) = C'$  definiert. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass

$$\angle(f(C), f(A), f(B)) = \angle(C, A, B)$$

gilt; sonst setzen wir  $f$  mit einer geeigneten Spiegelung zusammen. Sei  $f_1$  die gerade Isometrie, die  $A$  auf  $f(A)$  und  $B$  auf  $f(B)$  abbildet ( $f_1$  ist die Komposition der Translation, die  $A$  in  $f(A)$  überführt, und einer Rotation um  $f(A)$ ). Dann hat die Abbildung  $h := f_1^{-1} \circ f : \{A, B, C\} \rightarrow \mathcal{E}$  die Fixpunkte  $A$  und  $B$ . Weiters gilt (dank Proposition 16.2)

$$\angle(h(C), A, B) = \angle(h(C), h(A), h(B)) = \angle(f(C), f(A), f(B)) = \angle(C, A, B)$$

und  $d(h(C), A) = d(h(C), h(A)) = d(f(C), f(A)) = d(C, A)$ . Damit folgt  $h(C) = C$ . Die Abbildung  $h : \{A, B, C\} \rightarrow \mathcal{E}$  ist also die Einschränkung der Identität auf  $\mathcal{E}$ . Somit ist  $f_1$  eine isometrische Erweiterung von  $f$ . Insbesondere sind die Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  kongruent.

**Aufgabe 9.2.** Sei  $(A, B, C)$  ein nicht-degeneriertes gleichseitiges Dreieck. Zeigen Sie

$$\angle(A, B, C) = \angle(B, C, A) = \angle(C, A, B).$$

Zeigen Sie weiters, dass wenn  $M_{AB}$  (bzw.  $M_{BC}$  und  $M_{CA}$ ) der Mittelpunkt von  $(A, B)$  (bzw.  $(B, C)$  und  $(C, A)$ ) ist, dann gilt

$$2\angle(A, B, M_{CA}) = \angle(A, B, C),$$

$$2\angle(B, C, M_{AB}) = \angle(B, C, A),$$

$$2\angle(C, A, M_{BC}) = \angle(C, A, B),$$

sowie

$$g(C, M_{AB}) \perp g(A, B), \quad g(A, M_{BC}) \perp g(B, C), \quad g(B, M_{CA}) \perp g(C, A).$$

*Lösung.* Dass die drei Winkel gleich sind, folgt unmittelbar aus Korollar 16.12, weil alle Seiten gleich lang sind.

Die Dreiecke  $(A, B, M_{CA})$  und  $(C, B, M_{CA})$  sind kongruent nach dem SSS Satz. Es folgt

$$\angle(A, B, M_{CA}) = -\angle(C, B, M_{CA}) = \angle(M_{CA}, B, C).$$

Der Grund für das negative Vorzeichen ist, dass die Isometrie, die  $(A, B, M_{CA})$  auf  $(C, B, M_{CA})$  abbildet, offensichtlich die Spiegelung an der Achse  $g(B, M_{CA})$  ist. Daraus ergibt sich

$$\angle(A, B, C) = \angle(A, B, M_{CA}) + \angle(M_{CA}, B, C) = 2\angle(A, B, M_{CA}).$$

Die beiden anderen Winkelidentitäten folgen analog.

Weil  $(A, B, M_{CA})$  und  $(C, B, M_{CA})$  kongruent sind, folgt auch

$$\angle(A, M_{CA}, B) = -\angle(C, M_{CA}, B) = \angle(B, M_{CA}, C)$$

und somit

$$\omega = \angle(A, M_{CA}, B) + \angle(B, M_{CA}, C) = 2\angle(A, M_{CA}, B),$$

d.h.  $\angle(A, M_{CA}, B)$  ist ein rechter Winkel und  $g(C, A) \perp g(B, M_{CA})$ . Die restlichen Relationen folgen analog.

**Aufgabe 9.3.** Sei  $(A, B, C)$  ein nicht-degeneriertes gleichschenkliges Dreieck mit  $d(A, B) = d(A, C)$  und der Eigenschaft, dass die Winkelsymmetrale des Winkels  $\angle(B, C, A)$  die Seite  $(A, B)$  in einem Punkt  $X$  so schneidet, dass die Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(C, X, B)$  ähnlich sind. Zeigen Sie, dass  $X$  die Strecke  $(A, B)$  im goldenen Schnitt teilt (vgl. Aufgabe 6.4). Das Dreieck  $(A, B, C)$  wird *goldenes Dreieck* genannt.

*Lösung.* Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)} \tag{4}$$

gilt. Weil die beiden Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(C, X, B)$  ähnlich sind, haben wir

$$\frac{d(C, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(B, C)}. \tag{5}$$

Weiters muss auch  $(C, X, B)$  gleichschenkelig sein, insbesondere gilt

$$\angle(X, B, C) = \angle(C, X, B) \quad \text{und} \quad d(B, C) = d(X, C).$$

Nach Voraussetzung gilt  $\angle(B, C, X) = \angle(X, C, A)$  und, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(C, X, B)$ ,  $\angle(B, C, X) = \angle(C, A, B)$ . Damit folgt  $\angle(X, C, A) = \angle(C, A, B) = \angle(C, A, X)$ , d.h. das Dreieck  $(C, A, X)$  ist gleichschenkelig mit  $d(C, X) = d(A, X)$ . Die Behauptung (4) folgt nun aus (5):

$$\frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(C, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(B, C)} = \frac{d(A, B)}{d(X, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}.$$

**Aufgabe 9.4.** Ein *regelmäßiges Fünfeck* ist ein Polygon  $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$  mit gleich langen Seiten

$$d(A_i, A_{i+1}) = a > 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \text{wobei } A_6 := A_1$$

und gleichen Innenwinkeln

$$\angle(A_{i-1}, A_i, A_{i+1}) = \alpha, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \text{wobei } A_0 := A_5.$$

Bestimmen Sie das Verhältnis der Länge der Diagonalen zur Länge der Seiten, d.h.  $\frac{d}{a}$ , wobei  $d := d(A_1, A_3) = d(A_1, A_4)$ . Warum haben alle Diagonalen die gleiche Länge? Hinweis: Suchen Sie ein goldenes Dreieck.

*Lösung.* Dass alle Diagonalen die gleiche Länge haben, folgt aus dem SWS Satz; z.B. sind  $(A_1, A_2, A_3)$  und  $(A_2, A_3, A_4)$  kongruent und somit  $d(A_1, A_3) = d(A_2, A_4)$ .

Sei  $D$  der Schnittpunkt der beiden Diagonalen  $(A_1, A_3)$  und  $(A_2, A_4)$ . Die Dreiecke  $(A_1, A_2, D)$  und  $(A_4, A_3, D)$  sind kongruent, denn  $d(A_1, A_2) = d(A_4, A_3)$  und entsprechende Winkel haben gleiches absolutes Winkelmaß. Insbesondere gilt

$$\frac{DA_1}{DA_3} = \frac{DA_4}{DA_2}$$

und der orientierte Strahlensatz liefert, dass  $g(A_2, A_3)$  und  $g(A_1, A_4)$  parallel sind. Dann sind  $\angle(A_4, A_1, A_3)$  und  $\angle(A_2, A_3, A_1)$  Wechselwinkel und stimmen somit überein. Weiters gilt  $\angle(A_2, A_3, A_1) = \angle(A_3, A_1, A_2)$ , weil das Dreieck  $(A_1, A_2, A_3)$  gleichschenkelig ist. Also folgt

$$\angle(A_4, A_1, A_3) = \angle(A_3, A_1, A_2).$$

Das bedeutet, dass die Diagonale  $(A_1, A_3)$  auf der Winkelsymmetralen von  $\angle(A_4, A_1, A_2)$  liegt. Das Dreieck  $(A_4, A_1, A_2)$  ist gleichschenkelig und ähnlich zum Dreieck  $(A_1, A_2, D)$  nach dem W:W:W Satz: die Winkel  $\angle(A_2, A_4, A_1)$  und  $\angle(A_4, A_1, A_3) = \angle(A_3, A_1, A_2) = \angle(D, A_1, A_2)$  sind gleich und die Winkel  $\angle(A_4, A_1, A_2)$  und  $\angle(A_1, A_2, A_4) = \angle(A_1, A_2, D)$  sind gleich.

Es folgt, dass  $(A_4, A_2, A_1)$  ein goldenes Dreieck ist. Nach Aufgabe 9.3 ist das gesuchte Verhältnis der goldene Schnitt  $\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Aufgabe 9.5.** Seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte in  $\mathcal{E}$ , die in der gleichen offenen Halbebene bzgl. einer Geraden  $g$  liegen. Seien  $A'$  und  $B'$  die Orthogonalprojektionen von  $A$  und  $B$  auf  $g$ . Wir suchen einen Punkt  $O \in [A', B']$ , sodass  $\angle(A', O, A) = \angle(B, O, B')$ . Beschreiben Sie ein Konstruktionsverfahren für den Punkt  $O$  und begründen Sie. Was hat die Aufgabe mit dem Billardspiel zu tun?

*Lösung.* Zunächst spiegeln wir den Punkt  $B$  an der Geraden  $g$  und erhalten den Punkt  $B''$ . Der gesuchte Punkt  $O$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $g(A, B'')$  mit der Geraden  $g$ . Die Dreiecke  $(B, B', O)$  und  $(B'', B', O)$  sind kongruent, denn sie werden durch die Spiegelung an  $g$  aufeinander abgebildet. Insbesondere gilt  $\angle(B, O, B') = -\angle(B'', O, B')$ . Weiters gilt  $\angle(A, O, A') = \angle(B'', O, B')$ , weil es Scheitelwinkel sind. Es folgt  $\angle(A', O, A) = \angle(B, O, B')$ .

Bezug zum Billardspiel: Soll die Kugel  $A$  über die Bande  $g$  auf die Kugel  $B$  gespielt werden, muss das virtuelle Bild der Kugel  $B$  unter der Spiegelung an der Bande  $g$  anvisiert werden.

**Aufgabe 9.6.** Sei  $(A_1, A_2, A_3)$  ein beliebiges nicht-degeneriertes Dreieck. Sei  $M_3$  (bzw.  $M_1$  und  $M_2$ ) der Mittelpunkt der Seite  $(A_1, A_2)$  (bzw.  $(A_2, A_3)$  und  $(A_3, A_1)$ ). Sei  $U_1$  der Umkreismittelpunkt von  $(A_1, M_3, M_2)$ ,  $U_2$  der Umkreismittelpunkt von  $(A_2, M_1, M_3)$  und  $U_3$  der Umkreismittelpunkt von  $(A_3, M_2, M_1)$  (vgl. Aufgabe 7.8). Sei  $S_1$  der Schwerpunkt von  $(A_1, M_3, M_2)$ ,  $S_2$  der Schwerpunkt von  $(A_2, M_1, M_3)$  und  $S_3$  der Schwerpunkt von  $(A_3, M_2, M_1)$  (vgl. Aufgabe 7.4). Zeigen Sie, dass die Dreiecke  $(U_1, U_2, U_3)$  und  $(S_1, S_2, S_3)$  kongruent sind. Hinweis: Die Dreiecke  $(A_1, M_3, M_2)$ ,  $(M_3, A_2, M_1)$  und  $(M_2, M_1, A_3)$  werden durch geeignete Translationen aufeinander abgebildet.

*Lösung.* Die Dreiecke  $(A_1, M_3, M_2)$ ,  $(M_3, A_2, M_1)$  und  $(M_2, M_1, A_3)$  werden durch Translationen aufeinander abgebildet (das erste auf das zweite durch die Translation, die  $A_1$  auf  $M_3$  abbildet, das zweite auf das dritte durch die Translation, die  $M_3$  auf  $M_2$  abbildet); das folgt aus den orientierten Strahlensatz. Die Translationen bilden Streckensymmetralen auf Streckensymmetralen ab und folglich Umkreismittelpunkte auf Umkreismittelpunkte. Es folgt

$$d(U_1, U_2) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2), \quad d(U_2, U_3) = \frac{1}{2}d(A_2, A_3), \quad d(U_3, U_1) = \frac{1}{2}d(A_3, A_1).$$

Aus Aufgabe 7.4 folgt, dass die Translationen auch Schwerpunkte auf Schwerpunkte abbilden, und somit

$$d(S_1, S_2) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2), \quad d(S_2, S_3) = \frac{1}{2}d(A_2, A_3), \quad d(S_3, S_1) = \frac{1}{2}d(A_3, A_1)$$

gilt. Nach dem SSS Satz sind die Dreiecke  $(U_1, U_2, U_3)$  und  $(S_1, S_2, S_3)$  kongruent.

**Aufgabe 9.7.** Sei  $(A, B, C)$  eine nicht-degeneriertes Dreieck und sei  $X \in (B, C)$ . Zeigen Sie:

$$\angle(B, A, X) = \angle(X, A, C) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(X, B)}{d(X, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)}.$$

Hinweis: Sei  $D$  der Schnittpunkt der Geraden durch  $C$  parallel zu  $g(A, X)$  mit  $g(A, B)$ . Zeigen Sie zunächst

$$\frac{d(X, B)}{d(X, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, D)}.$$

*Lösung.* Dass

$$\frac{d(X, B)}{d(X, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, D)}.$$

gilt, ist eine Konsequenz des Strahlensatzes. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\angle(B, A, X) &= \angle(A, D, C) \quad (\text{Stufenwinkel}), \\ \angle(X, A, C) &= \angle(D, C, A) \quad (\text{Wechselwinkel}).\end{aligned}$$

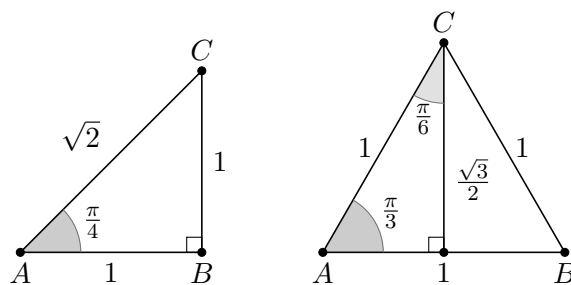
Somit haben wir (nach Korollar 16.12)

$$\begin{aligned}\angle(B, A, X) = \angle(X, A, C) &\Leftrightarrow \angle(A, D, C) = \angle(D, C, A) \\ &\Leftrightarrow d(A, D) = d(A, C) \\ &\Leftrightarrow \frac{d(X, B)}{d(X, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 9.8.** Begründen Sie alle Werte für sin und cos in der folgenden Tabelle:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Lösung.* Die erste und die letzte Spalte wurden in der Vorlesung berechnet.



Sei  $(A, B, C)$  ein Dreieck mit  $d(A, B) = 1 = d(B, C)$  und rechtem Winkel  $\angle(A, B, C)$ . Dann gilt  $\angle(C, A, B) = \angle(B, C, A)$  wegen Korollar 16.12 und es folgt  $\angle(C, A, B) = \angle(B, C, A) = \frac{\pi}{4}$ . Wegen dem Satz von Pythagoras gilt  $d(A, C) = \sqrt{2}$ . Mit Korollar 18.6 und Korollar 18.8 folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

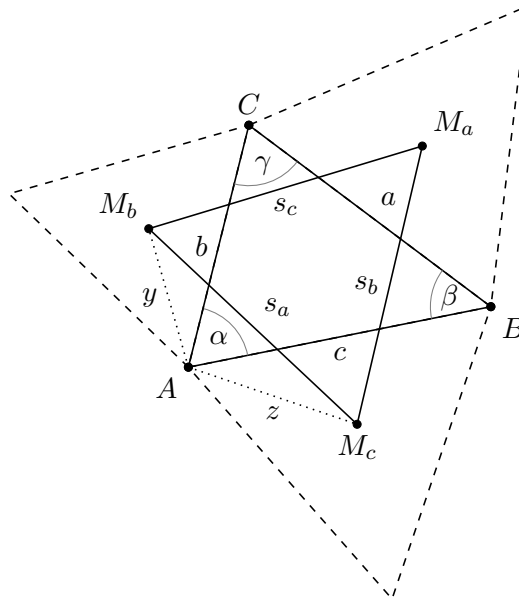
Sei  $(A, B, C)$  ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1. Bezeichnet  $D$  den Mittelpunkt von  $(A, B)$ , dann sind die Dreiecke  $(A, D, C)$  und  $(B, D, C)$  nach dem SSS Satz kongruent. Insbesondere gilt  $\angle(A, D, C) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle(D, C, A) = \frac{\pi}{6}$  und  $\angle(C, A, D) = \frac{\pi}{3}$ . Der Satz von Pythagoras impliziert, dass  $d(D, C) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Mit Korollar 18.6 und Korollar 18.8 folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

10. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 18. BIS 22. MAI

**Aufgabe 10.1.** Der *Satz von Napoleon* besagt: Werden über den Seiten eines nicht-degenerierten Dreiecks  $(A, B, C)$  außen gleichseitige Dreiecke errichtet, dann bilden deren Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck; in einem gleichseitigen Dreieck gilt  $U = H = I = S$  (vgl. Aufgabe 9.2) und dieser Punkt wird Mittelpunkt genannt.

In der folgenden Abbildung gelte  $\alpha = \angle(C, A, B)$ ,  $\beta = \angle(A, B, C)$ ,  $\gamma = \angle(B, C, A)$  und die lateinischen Kleinbuchstaben bezeichnen Streckenlängen.



Beweisen Sie den Satz von Napoleon, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:

- (1) Zeigen Sie  $\frac{b}{2} = y \cos(\frac{\pi}{6})$ ,  $\frac{c}{2} = z \cos(\frac{\pi}{6})$  und

$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}).$$

- (2) Leiten Sie aus (1) die Identität

$$3s_a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos(\alpha) + \sqrt{3}bc \sin(\alpha)$$

ab.

- (3) Folgern Sie aus (2):

$$3s_a^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin(\alpha)}{a}.$$

- (4) Erklären Sie, warum auch die Identitäten

$$3s_b^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin(\beta)}{b},$$

$$3s_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin(\gamma)}{c},$$

gelten und wie daraus  $s_a = s_b = s_c$  folgt.

*Lösung.* (1) Sei  $M_{CA}$  der Mittelpunkt der Strecke  $(C, A)$ . Dann ist das Dreieck  $(A, M_{CA}, M_b)$  rechtwinklig und somit gilt  $\frac{b}{2} = y \cos(\frac{\pi}{6})$ ; es gilt  $\angle(M_b, A, C) = \frac{\pi}{6}$ , weil

$M_b$  der Inkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks über der Seite  $(C, A)$  ist. Die Identität  $\frac{c}{2} = z \cos(\frac{\pi}{6})$  folgt analog. Der Kosinussatz im Dreieck  $(A, M_c, M_b)$  gibt

$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}).$$

(2) Weil  $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{3})$  und  $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6})$ , folgt  $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ ,  $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$  und

$$\begin{aligned} 3s_a^2 &= 3y^2 + 3z^2 - 6yz \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc(\cos(\alpha) \cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\alpha) \sin(\frac{\pi}{3})) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc(\cos(\alpha) \frac{1}{2} - \sin(\alpha) \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= b^2 + c^2 - bc \cos(\alpha) + \sqrt{3}bc \sin(\alpha). \end{aligned}$$

(3) Der Kosinussatz im Dreieck  $(A, B, C)$  liefert

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

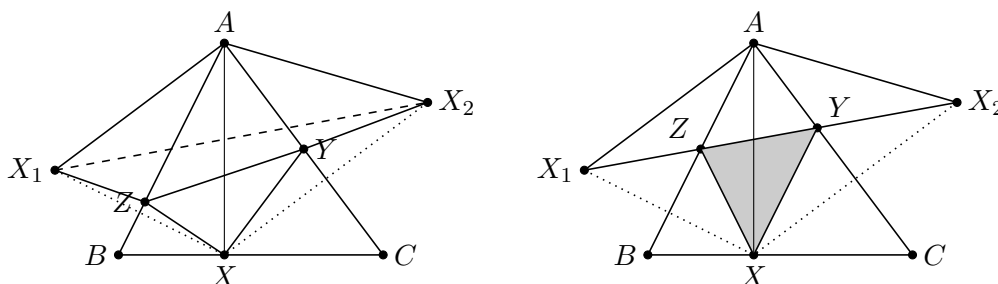
und zusammen mit (2) folgt die Behauptung.

(4) Die beiden angeführten Identitäten folgen analog zur Identität (3) und der Sinussatz impliziert, dass  $s_a = s_b = s_c$ . (Weil das absolute Winkelmaß immer im Intervall  $[0, \pi]$  liegt und der Sinus auf diesem Intervall nicht-negativ ist, ist der Sinussatz auch gültig, wenn statt den Winkeln deren absolutes Winkelmaß als Argument des Sinus verwendet wird.)

**Aufgabe 10.2.** Sei  $(A, B, C)$  ein *spitzwinkliges Dreieck*, d.h. das absolute Winkelmaß aller Innenwinkel ist kleiner als  $\frac{\pi}{2}$ . *Fagnano's Problem* besteht darin, Punkte  $X \in (B, C)$ ,  $Y \in (C, A)$  und  $Z \in (A, B)$  zu finden, sodass

$$U(X, Y, Z) := d(X, Y) + d(Y, Z) + d(Z, X)$$

minimal ist. Es wird also ein dem Dreieck  $(A, B, C)$  eingeschriebenes Dreieck  $(X, Y, Z)$  mit minimalem Umfang  $U(X, Y, Z)$  gesucht.



Lösen Sie Fagnano's Problem, indem Sie die folgenden Schritte durchführen.

- (1) Sei  $X_1$  (bzw.  $X_2$ ) der Bildpunkt von  $X$  unter der Spiegelung an der Geraden  $g(A, B)$  (bzw.  $g(A, C)$ ). Zeigen Sie, dass

$$U(X, Y, Z) = d(X_1, Z) + d(Z, Y) + d(Y, X_2)$$

gilt.

- (2) Zeigen Sie: Bei festgehaltenem  $X$  ist  $U(X, Y, Z)$  minimal, wenn  $Y$  und  $Z$  auf der Geraden  $g(X_1, X_2)$  liegen. In diesem Fall gilt  $U(X, Y, Z) = d(X_1, X_2)$ . Hinweis: Dreiecksungleichung.



(3) Beweisen Sie, dass  $d(X_1, A) = d(X, A) = d(X_2, A)$  und

$$\angle(X_1, A, X_2) = 2\angle(B, A, C)$$

gilt. Dann sei  $\alpha := \angle(B, A, C)$ .

(4) Schließen Sie, dass  $\angle(X_1, A, X_2)$  konstant bleibt, wenn  $X$  variiert wird, und dass

$$d(X_1, X_2) = 2d(A, X) \sin(\alpha)$$

gilt. Hinweis: Betrachten Sie das Dreieck  $(X_1, M, A)$ , wobei  $M$  der Mittelpunkt von  $(X_1, X_2)$  ist.

(5) Folgern Sie, dass  $U(X, Y, Z) = d(X_1, X_2)$  minimal ist, wenn  $X$  die Orthogonalprojektion von  $A$  auf  $g(B, C)$  ist.

*Bemerkung:* Man kann zeigen, dass die Lösung von Fagnano's Problem das Dreieck der Höhenfußpunkte ist.

*Lösung.* (1) Es gilt  $d(X, Z) = d(X_1, Z)$  und  $d(X_2, Y) = d(X, Y)$ , weil Spiegelungen Isometrien sind.

(2) Ist  $X$  fest, dann sind auch  $X_1$  und  $X_2$  fest. Nach (1) ist  $U(X, Y, Z)$  die Länge des Polygonzuges  $(X_1, Z, Y, X_2)$ . Diese Länge ist minimal, wenn die vier Punkte  $X_1, Z, Y$  und  $X_2$  kollinear sind. Das folgt aus der Dreiecksungleichung: Im Allgemeinen gilt

$$d(X_1, Z) + d(Z, Y) + d(Y, X_2) \geq d(X_1, X_2)$$

und falls  $X_1, Z, Y$  und  $X_2$  kollinear sind, haben wir

$$d(X_1, Z) + d(Z, Y) + d(Y, X_2) = d(X_1, X_2).$$

(3) Die Identitäten  $d(X_1, A) = d(X, A) = d(X_2, A)$  folgen wie in (1), weil Spiegelungen Isometrien sind. Es gilt

$$\angle(X_1, A, X_2) = \angle(X_1, A, B) + \angle(B, A, X) + \angle(X, A, C) + \angle(C, A, X_2).$$

Weiters gilt

$$\angle(X_1, A, B) = \angle(B, A, X) \quad \text{und} \quad \angle(X, A, C) = \angle(C, A, X_2),$$

weil die Winkel durch Spiegelungen ineinander übergehen. Es folgt

$$\angle(X_1, A, X_2) = 2(\angle(B, A, X) + \angle(X, A, C)) = 2\angle(B, A, C).$$

Weil das Dreieck  $(A, B, C)$  spitzwinklig ist, gilt  $2\angle(B, A, C) < \pi$  und daher folgt

$$\angle(X_1, A, X_2) = 2\angle(B, A, C).$$

(4) Bei Variation des Punktes  $X$ , bleibt natürlich  $\alpha$  und nach (3) somit auch  $\angle(X_1, A, X_2)$  unverändert. Sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $(X_1, X_2)$ . Weil  $(X_1, X_2, A)$  gleichschenkelig ist, ist  $(X_1, M, A)$  rechtwinklig und  $\angle(M, A, X_1) = \alpha$ . Daher folgt

$$\sin(\alpha) = \frac{d(X_1, X_2)}{2d(A, X_1)} = \frac{d(X_1, X_2)}{2d(A, X)}$$

weil  $d(A, X_1) = d(A, X)$ .

(5) Nach (4) ist  $U(X, Y, Z) = d(X_1, X_2)$  minimal, wenn  $d(A, X)$  minimal ist. Und das ist genau dann der Fall, wenn  $X$  die Orthogonalprojektion von  $A$  auf  $g(B, C)$  ist.

**Aufgabe 10.3.** Sei  $(A, B, C)$  ein gleichseitiges Dreieck. Die Gerade  $g$  durch die Mittelpunkte  $M_{BC}$  und  $M_{CA}$  der Strecken  $(B, C)$  und  $(C, A)$  schneidet den Umkreis von  $(A, B, C)$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Verwenden Sie den Sehnensatz, um das Verhältnis

$$\frac{d(M_{CA}, M_{BC})}{d(M_{BC}, P)}$$

zu berechnen, wenn die Bezeichnungen  $P$  und  $Q$  so gewählt sind, dass  $d(M_{BC}, P) < d(M_{BC}, Q)$  gilt.

*Lösung.* Wenn  $a$  die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks  $(A, B, C)$  ist und  $x := d(M_{BC}, P)$ , dann gilt nach dem Sehnensatz (Theorem 22.4)

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = x\left(x + \frac{a}{2}\right).$$

Setzen wir

$$\frac{1}{y} := \frac{d(M_{CA}, M_{BC})}{d(M_{BC}, P)} = \frac{a/2}{x},$$

dann wird die Gleichung zu

$$1 = y(y + 1) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + y - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$y_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Weil  $y$  positiv ist, gilt  $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Somit erhalten wir

$$\frac{d(M_{CA}, M_{BC})}{d(M_{BC}, P)} = \frac{1}{y} = y + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Diese Aufgabe liefert ein einfaches Konstruktionsverfahren des goldenen Schnittes, das vom amerikanischen Künstler G.P. Odum gefunden wurde.

**Aufgabe 10.4.** Ein *Sehnenviereck* ist ein Viereck  $(A, B, C, D)$  mit der Eigenschaft, dass die Punkte  $A, B, C, D$  auf einem Kreis liegen und die Diagonalen  $(A, C)$  und  $(B, D)$  einen Schnittpunkt haben. Zeigen Sie:

$$\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi = \angle(D, A, B) + \angle(B, C, D).$$

Hinweis: Peripheriewinkelsatz.

*Lösung.* Der Kreis, dem das Sehnenviereck  $(A, B, C, D)$  eingeschrieben ist, habe den Mittelpunkt  $O$ . Nach Theorem 21.2 und Korollar 21.3 gilt

$$2\angle(A, B, C) = \angle(A, O, C) = 2\angle(A, D, C).$$

Die Bedingung, dass die Diagonalen  $(A, C)$  und  $(B, D)$  sich schneiden, impliziert, dass  $B$  und  $D$  auf unterschiedlichen Seiten von  $g(A, C)$  liegen. Daher sind die Winkel  $\angle(A, B, C)$  und  $\angle(A, D, C)$  verschieden orientiert und erfüllen  $\angle(A, B, C) = \angle(A, D, C) + \omega$  (vgl. Proposition 16.13). Somit folgt

$$\omega = \angle(A, B, C) - \angle(A, D, C) = \angle(A, B, C) + \angle(C, D, A),$$

und damit auch

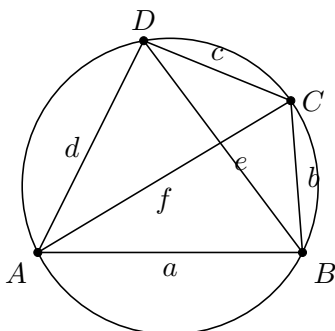
$$\pi = \angle(A, B, C) + \angle(C, D, A).$$

Die zweite Identität folgt analog.

**Aufgabe 10.5.** Der *Satz von Ptolemäus* besagt, dass für ein Sehnenviereck  $(A, B, C, D)$  stets

$$d(A, C)d(B, D) = d(A, B)d(C, D) + d(B, C)d(A, D) \quad (6)$$

gilt. Beweisen Sie den Satz von Ptolemäus, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:



- (1) Sei  $\alpha := \angle(D, A, B)$ . Zeigen Sie die beiden Identitäten

$$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha, \quad e^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

- (2) Folgern Sie

$$e^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

- (3) Finden Sie eine analoge Formel für  $f^2$ .

- (4) Wie folgt daraus die Gleichung (6)?

*Lösung.* (1) Die beiden Identitäten folgen aus dem Kosinussatz in den Dreiecken  $(D, A, B)$  und  $(B, C, D)$ , der Aufgabe 10.4, sowie der Beobachtung  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ .

- (2) Durch Elimination von  $\cos \alpha$  erhalten wir die Identität

$$\frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad} = -\frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc}$$

und äquivalent dazu

$$e^2(ad + bc) = (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad = (ab + cd)(ac + bd).$$

- (3) Eine analoge Argumentation in den Dreiecken  $(A, B, C)$  und  $(C, D, A)$  liefert

$$f^2(ab + cd) = (ad + bc)(ac + bd).$$

- (4) Somit gilt

$$e^2 f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \cdot \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} = (ac + bd)^2,$$

d.h.  $ef = ac + bd$  wie behauptet.

**Aufgabe 10.6.** Verwenden Sie den Satz von Ptolemäus, um

- (1) erneut die Aufgabe 9.4 zu lösen,
- (2) die Seitenlänge  $b$  des regelmäßigen Zehnecks in Abhängigkeit des Radius  $r$  des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Lösung. (1) Der Satz von Ptolemäus liefert  $d^2 = a^2 + ad$ , d.h.

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0.$$

Das Verhältnis  $\frac{d}{a}$  ist also der goldene Schnitt  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

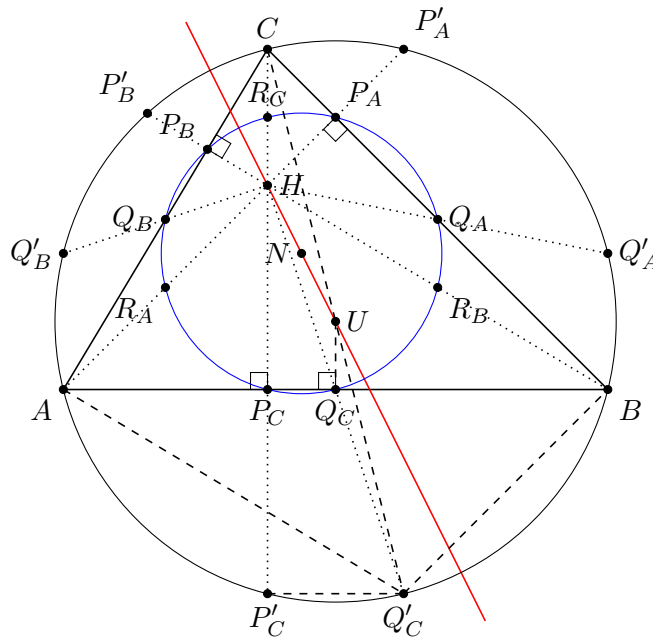
(2) Der Satz von Ptolemäus liefert  $2ra = 2bd$ , d.h.

$$b = r \frac{a}{d} = r \frac{1}{\varphi} = r \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

## 11. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 25. BIS 29. MAI

**Aufgabe 11.1.** Sei  $(A, B, C)$  ein nicht-degeneriertes, nicht-gleichseitiges Dreieck mit Höhenschnittpunkt  $H$  und Umkreismittelpunkt  $U$ . Sei  $N$  der Mittelpunkt der Strecke  $(H, U)$ . Dann gilt: Die Höhenfußpunkte  $P_A, P_B, P_C$ , die Seitenmittelpunkte  $Q_A, Q_B, Q_C$  und die Mittelpunkte  $R_A, R_B, R_C$  der Strecken  $(H, A), (H, B), (H, C)$  liegen alle auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $N$ .

Zeigen Sie diese Aussage, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:



- (1) Sei  $h$  die zentrische Streckung mit Zentrum  $H$  und Streckfaktor 2. Warum bildet  $h$  die Punkte  $R_A, R_B, R_C$  auf die Punkte  $A, B, C$  ab?
- (2) Sei  $Q'_C$  der Punkt auf dem Umkreis  $k$  des Dreiecks  $(A, B, C)$ , der dem Punkt  $C$  diametral gegenüber liegt. Zeigen Sie, dass  $(A, Q'_C, B, H)$  ein Parallelogramm ist.
- (3) Schließen Sie, dass  $h(Q_C) = Q'_C$  gilt. Auf analoge Weise zeigt man  $h(Q_A) \in k$  und  $h(Q_B) \in k$ .
- (4) Sei  $P'_C$  der (neben  $C$  zweite) Schnittpunkt des Umkreises  $k$  mit der Höhenlinie  $g(C, P_C)$ . Zeigen Sie, dass  $P_C$  der Mittelpunkt der Strecke  $(H, P'_C)$  ist, d.h.  $h(P_C) = P'_C$ . Auf analoge Weise zeigt man  $h(P_A) \in k$  und  $h(P_B) \in k$ . (Wie kann

man argumentieren, wenn  $P'_C = C$  gilt, d.h. wenn  $g(C, P_C)$  die Tangente an  $k$  in  $C$  ist?)

- (5) Verwenden Sie Proposition 20.5 um zu zeigen, dass die neun Punkte  $P_A, P_B, P_C, Q_A, Q_B, Q_C, R_A, R_B, R_C$  auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $N$  liegen.

*Lösung.* (1) Es gilt  $h(R_A) = A$ , weil  $R_A$  der Mittelpunkt der Strecke  $(H, A)$  ist. Aus dem gleichen Grund gilt  $h(R_B) = B$  und  $h(R_C) = C$ .

(2) Nach dem Satz von Thales ist  $\angle(Q'_C, B, C)$  ein rechter Winkel. Es folgt, dass die beiden Geraden  $g(A, H)$  und  $g(Q'_C, B)$  beide orthogonal zur Geraden  $g(B, C)$  sind. Daher sind  $g(A, H)$  und  $g(Q'_C, B)$  parallel. Das Satz von Thales impliziert auch, dass  $\angle(C, A, Q'_C)$  ein rechter Winkel ist. Es folgt analog, dass die Geraden  $g(A, Q'_C)$  und  $g(H, B)$  parallel sind. Somit ist  $(A, Q'_C, B, H)$  ein Parallelogramm (vgl. Korollar 6.9).

Wenn  $A, B$  und  $H$  kollinear sind, dann ist das Dreieck  $(A, B, C)$  rechtwinklig, sagen wir in  $A$ , und  $H$  fällt mit  $A$  und  $Q'_C$  mit  $B$  zusammen. In diesem Fall ist das Parallelogramm  $(A, Q'_C, B, H)$  degeneriert.

(3) Weil  $(A, Q'_C, B, H)$  ein Parallelogramm ist, haben die Diagonalen  $(A, B)$  und  $(Q'_C, H)$  den gleichen Mittelpunkt  $Q_C$ . Es folgt  $h(Q_C) = Q'_C$ .

(4) Nach dem Satz von Thales ist  $\angle(C, P'_C, Q'_C)$  ein rechter Winkel. Somit sind die Geraden  $g(A, B)$  und  $g(P'_C, Q'_C)$  parallel. Der Strahlensatz impliziert

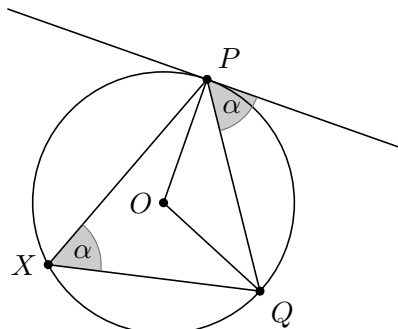
$$\frac{d(H, P'_C)}{d(H, P_C)} = \frac{d(H, Q'_C)}{d(H, Q_C)} = 2.$$

Das bedeutet, dass  $h(P_C) = P'_C$  gilt. Wenn das Dreieck  $(A, B, C)$  rechtwinklig in  $A$  ist, gilt  $A = H = P_C = P'_C$  und  $h(P_C) = P'_C$  ist ebenfalls richtig.

Wenn  $g(C, P_C)$  die Tangente an  $k$  in  $C$  ist, dann ist  $g(C, P_C)$  orthogonal zu  $g(P'_C, Q'_C)$  und zu  $g(A, B)$ . Somit sind  $g(A, B)$  und  $g(P'_C, Q'_C)$  parallel, und man kann argumentieren wie vorher.

(5) Proposition 20.5 liefert, dass die zentrische Streckung  $h^{-1}$  den Umkreis  $k$  des Dreiecks  $(A, B, C)$  auf einen Kreis  $f$  mit Mittelpunkt  $h^{-1}(U)$  abbildet. Der Streckfaktor von  $h^{-1}$  ist  $\frac{1}{2}$  und das Zentrum ist  $H$ . Folglich ist  $h^{-1}(U)$  der Mittelpunkt  $N$  der Strecke  $(H, U)$ . Weil die neun Punkte  $h(P_A), h(P_B), h(P_C), h(Q_A), h(Q_B), h(Q_C), h(R_A), h(R_B), h(R_C)$  auf dem Kreis  $k$  liegen, liegen die Punkte  $P_A, P_B, P_C, Q_A, Q_B, Q_C, R_A, R_B, R_C$  auf dem Kreis  $f$ , dem sogenannten Feuerbachkreis oder Neunpunktekreis.

**Aufgabe 11.2.** Sei  $k$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$  und sei  $[P, Q]$  eine Sehne von  $k$ . Zeigen Sie, dass in der Situation der Abbildung



- (1) die beiden mit  $\alpha$  bezeichneten Winkel das gleiche absolute Winkelmaß haben,  
 (2)  $d(P, Q) = 2r \sin(\alpha)$  gilt.

*Lösung.* (1) Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt  $2\angle(P, X, Q) = \angle(P, O, Q)$ . Das Dreieck  $(P, O, Q)$  ist gleichschenkelig und daher gilt

$$\pi = \angle(P, O, Q) + 2\angle(Q, P, O).$$

Es folgt

$$\angle(P, X, Q) + \angle(Q, P, O) = \frac{\pi}{2}.$$

Weil die Tangente an  $k$  in  $P$  orthogonal zu  $g(O, P)$  ist, folgt die Aussage.

(2) Wenn wir  $X$  so wählen, dass  $O \in [X, P]$  gilt, dann ist das Dreieck  $(P, X, Q)$  rechtwinklig in  $Q$  (nach dem Satz von Thales). Es folgt  $\sin(\alpha) = \frac{d(P, Q)}{2r}$  (vgl. Korollar 18.8).

**Aufgabe 11.3.** Es sei in  $\mathbb{R}^2$  der Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m$  und Radius  $r > 0$  durch die Kreisgleichung  $\langle x - m \mid x - m \rangle = r^2$  gegeben.

- (1) Sei  $p$  ein Punkt auf dem Kreis  $k$ . Finden Sie die Normalvektordarstellung der Tangente in  $p$  an den Kreis  $k$ .  
 (2) Sei  $m = (1, 2)$  und  $r = 1$ . Finden Sie die Geradengleichung der Tangente in  $p = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$  an den Kreis mit Mittelpunkt  $m$  und Radius  $r$ .

*Lösung.* (1) Nach der Definition der Tangente in  $p$ , ist  $p - m$  ein Normalvektor der Tangente in  $p$ . Die Normalvektordarstellung der Tangente in  $p$  ist also

$$\langle p - m \mid x - p \rangle = 0.$$

(2) Der Punkt  $p$  liegt auf dem Kreis, denn

$$\langle p - m \mid p - m \rangle = \left\| \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \right\|^2 = 1.$$

Die Normalvektordarstellung der Tangente ist

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \mid (x_1, x_2) - \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}) \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \left\langle \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \mid (x_1, x_2) - (1, 2) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \mid \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \right\rangle \\ & \Leftrightarrow \left\langle \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \mid (x_1, x_2) - (1, 2) \right\rangle = 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 - 2) = 1 \\ & \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.4.** Es sei in  $\mathbb{R}^2$  der Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m$  und Radius  $r > 0$  durch die Kreisgleichung  $\langle x - m \mid x - m \rangle = r^2$  gegeben. Sei  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{m\}$  ein beliebiger Punkt. Die Gerade  $g$  mit der Geradengleichung  $\langle p - m \mid x - m \rangle = r^2$  heißt *Polare* von  $p$  bzgl. des Kreises  $k$ .

- (1) Berechnen Sie die Normalvektordarstellung der Geraden  $g$ . Schließen Sie, dass  $g \perp g(m, p)$  und dass im Fall  $p \in k$  die Polare  $g$  die Tangente an  $k$  in  $p$  ist.
- (2) Berechnen Sie den Abstand  $d(m, g)$  und schließen Sie, dass der Durchschnitt  $k \cap g$  genau dann aus zwei verschiedenen Punkten besteht, wenn  $p$  im Äußeren des Kreises  $k$  liegt.
- (3) Wir nehmen nun an, dass  $p$  im Äußeren des Kreises  $k$  liegt. Sei  $x \in k \cap g$ . Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren  $x - m$  und  $x - p$  orthogonal zueinander sind. Schließen Sie, dass  $x$  der Berührungspunkt einer Tangente durch  $p$  an den Kreis  $k$  ist.

*Lösung.* (1) Um die Normalvektorform zu finden, formen wir die Geradengleichung von  $g$  um:

$$\begin{aligned}
 \langle p - m \mid x - m \rangle = r^2 &\Leftrightarrow \langle p - m \mid x - m \rangle - r^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle p - m \mid x - m \rangle - r^2 \frac{\langle p - m \mid p - m \rangle}{\|p - m\|^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left\langle p - m \mid x - m - r^2 \frac{p - m}{\|p - m\|^2} \right\rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle p - m \mid x - a \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

wobei

$$a := m + r^2 \frac{p - m}{\|p - m\|^2}.$$

Dass  $g \perp g(m, p)$  ist nun offensichtlich.

Wenn  $p \in k$ , dann ist  $\|p - m\| = r$  und folglich  $a = p$ . Die Polare  $g$  hat dann die Normalvektorform  $\langle p - m \mid x - p \rangle = 0$  und ist also die Tangente an  $k$  in  $p$ .

(2) Es gilt

$$d(m, g) = \frac{|\langle p - m \mid m - a \rangle|}{\|p - m\|} = \frac{|\langle p - m \mid -r^2 \frac{p - m}{\|p - m\|^2} \rangle|}{\|p - m\|} = \frac{r^2}{\|p - m\|}.$$

Der Durchschnitt  $k \cap g$  besteht genau dann aus zwei Punkten, wenn  $d(m, g) < r$  (vgl. Proposition 20.9). Nach der Formel für  $d(m, g)$  ist die Bedingung  $d(m, g) < r$  äquivalent zur Bedingung  $r < \|p - m\|$ , was genau dann der Fall ist, wenn  $p$  im Äußeren des Kreises liegt.

(3) Wenn  $x$  im Durchschnitt  $k \cap g$  liegt, dann muss  $x$  die beiden Gleichungen

$$\langle x - m \mid x - m \rangle = r^2 \quad \text{und} \quad \langle p - m \mid x - m \rangle = r^2$$

erfüllen. Wenn wir die zweite Gleichung von der ersten abziehen, erhalten wir

$$0 = \langle x - m \mid x - m \rangle - \langle p - m \mid x - m \rangle = \langle x - p \mid x - m \rangle,$$

d.h. die Vektoren  $x - m$  und  $x - p$  sind orthogonal.

Weil  $x \in k$  und  $g(x, m) \perp g(x, p)$ , ist  $g(x, p)$  eine Tangente durch  $p$  an den Kreis  $k$ .

**Aufgabe 11.5.** Sei  $p = (7, 0)$ . Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangenten durch  $p$  an den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m = (1, 0)$  und Radius 2.

*Lösung.* Die Polare von  $p$  bzgl.  $k$  hat die Normalvektorform

$$\langle (6, 0) \mid (x_1, x_2) - (1, 0) \rangle = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6(x_1 - 1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{5}{3}.$$

Die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten erhalten wir, indem wir die Polare mit dem Kreis schneiden. Die Kreisgleichung ist

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4.$$

Die Berührungspunkte müssen also

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + x_2^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \pm \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

erfüllen. Die beiden Berührungspunkte sind also  $\frac{1}{3}(5, \pm 4\sqrt{2})$ . Dann sind  $(2\sqrt{2}, \mp 1)$  Richtungsvektoren und folglich  $(1, \pm 2\sqrt{2})$  Normalvektoren der entsprechenden Tangenten durch  $p = (7, 0)$ . Die Tangenten haben also die Geradengleichung

$$\begin{aligned} \langle (1, \pm 2\sqrt{2}) \mid (x_1, x_2) - (7, 0) \rangle = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 7 \pm 2\sqrt{2}x_2 = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \quad x_1 \pm 2\sqrt{2}x_2 = 7. \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.6.** In der Situation von Aufgabe 11.4 soll der Punkt  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{m\}$  jetzt im Inneren des Kreises  $k$  liegen. Sei  $h$  eine Sekante durch  $p$  mit  $m \notin h$ . Sei  $v$  ein Richtungsvektor und  $n$  ein Normalvektor von  $h$ . Sei  $[a_1, a_2] \subseteq h$  die entsprechende Sehne.

- (1) Berechnen Sie den Skalar  $s \in \mathbb{R}$  (in Abhängigkeit von  $r$ ,  $m$  und  $p$ ), sodass der Punkt  $x = m + sn$  auf der Polaren  $g$  von  $p$  bzgl. des Kreises  $k$  liegt.
- (2) Zeigen Sie, dass der Punkt  $x$  auf den beiden Tangenten an  $k$  in den Punkten  $a_1$  und  $a_2$  liegt. Hinweis: Verwenden Sie (1) und die Geradengleichung der Tangenten.
- (3) Schließen Sie, dass die Polare  $g$  die Menge der Schnittpunkte der beiden Tangenten an  $k$  in den Endpunkten aller Sehnen durch  $p$  ist, die  $m$  nicht enthalten.

*Lösung.* (1) Weil  $x = m + sn$  auf der Polaren  $g$  liegt, gilt

$$\langle p - m \mid m + sn - m \rangle = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad s \langle p - m \mid n \rangle = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{r^2}{\langle p - m \mid n \rangle}.$$

Weil  $m \notin h$ , ist  $\langle p - m \mid n \rangle \neq 0$ .

(2) Der Punkt  $a_i$  hat die Gestalt  $a_i = p + t_i v$  für ein  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Die Gleichung der Tangente in  $a_i$  an  $k$  ist

$$\langle a_i - m \mid x - m \rangle = r^2.$$

Für  $a_i = p + t_i v$  und  $x = m + sn$  gilt (dank  $\langle v \mid n \rangle = 0$ )

$$\langle a_i - m \mid x - m \rangle = \langle p + t_i v - m \mid sn \rangle = s \langle p - m \mid n \rangle = r^2$$

nach (1).

(3) Nach (1) und (2) liegen besagte Schnittpunkte auf der Polaren  $g$ . Ist umgekehrt  $y$  ein beliebiger Punkt auf  $g$ , dann können wir die Sekante durch  $p$  mit Normalvektor  $y - m$  betrachten. Dann muss  $y$  mit dem Punkt  $x$  aus (1) übereinstimmen.

**Aufgabe 11.7.** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$  und  $a \neq b \in \mathbb{R}^2$ . Der *Kreis des Apollonios* ist die Menge  $A$  aller Punkte  $x \in \mathbb{R}^2$ , die

$$d(a, x) = \lambda d(x, b)$$



erfüllen. Zeigen Sie, dass es sich dabei tatsächlich um einen Kreis handelt und bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius in Abhängigkeit von  $\lambda$ ,  $a$  und  $b$ .

*Lösung.* Es gilt  $x \in A$  genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
 d(a, x) = \lambda d(x, b) &\Leftrightarrow \langle x - a \mid x - a \rangle = \lambda^2 \langle x - b \mid x - b \rangle \\
 &\Leftrightarrow \|x\|^2 - 2\langle a \mid x \rangle + \|a\|^2 = \lambda^2 (\|x\|^2 - 2\langle b \mid x \rangle + \|b\|^2) \\
 &\Leftrightarrow (1 - \lambda^2)\|x\|^2 - 2\langle a - \lambda^2 b \mid x \rangle + \|a\|^2 - \lambda^2\|b\|^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1 - \lambda^2) \left( \|x\|^2 - 2 \frac{\langle a - \lambda^2 b \mid x \rangle}{1 - \lambda^2} + \frac{\|a - \lambda^2 b\|^2}{(1 - \lambda^2)^2} \right) \\
 &\quad - \frac{\|a - \lambda^2 b\|^2}{1 - \lambda^2} + \|a\|^2 - \lambda^2\|b\|^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1 - \lambda^2) \left\langle x - \frac{a - \lambda^2 b}{1 - \lambda^2} \mid x - \frac{a - \lambda^2 b}{1 - \lambda^2} \right\rangle = R,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{1 - \lambda^2} \left( \|a\|^2 + \lambda^4\|b\|^2 - 2\lambda^2\langle a \mid b \rangle - \|a\|^2 + \lambda^2\|b\|^2 + \lambda^2\|a\|^2 - \lambda^4\|b\|^2 \right) \\
 &= \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} \left( \|a\|^2 - 2\langle a \mid b \rangle + \|b\|^2 \right) \\
 &= \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} \|a - b\|^2.
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : d\left(x, \frac{1}{1 - \lambda^2}(a - \lambda^2 b)\right) = \frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|} \|a - b\| \right\}.$$

Der Mittelpunkt des Kreises  $A$  ist  $\frac{1}{1 - \lambda^2}(a - \lambda^2 b)$  und der Radius ist  $\frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|} \|a - b\|$ .

*Bemerkung:* Wenn  $\lambda = 1$ , dann ist  $A$  die Streckensymmetrale von  $a$  und  $b$ .

## 12. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 1. BIS 5. JUNI

**Aufgabe 12.1.** Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad b_3) =$$

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

*Lösung.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 9 \\ 20 & -75 & 73 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ b_3) &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \\ (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & -13 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 5 \\ -6 & -18 & 2 & 0 \\ -4 & -20 & 4 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.2.** Bestimmen Sie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Berechnen Sie  $f \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

*Lösung.* Seien  $e_1$  und  $e_2$  die Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^2$ . Dann sind  $f(e_1)$  und  $f(e_2)$  die Spalten der Matrix  $3 \times 2$  Matrix  $A$ , für welche  $f(x) = f_A(x) = Ax$  gilt (vgl. Theorem 26.6). Nun gilt

$$2f(e_1) - f(e_2) = f(2e_1 - e_2) = f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$-5f(e_1) + 3f(e_2) = f(-5e_1 + 3e_2) = f\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$f(e_1) = 3(2f(e_1) - f(e_2)) + (-5f(e_1) + 3f(e_2)) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Und weiters

$$f(e_2) = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 10 \\ 14 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

und insbesondere

$$f\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 10 \\ 14 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 34 \\ 76 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 12.3.** Sind die folgenden Teilmengen lineare Teilräume des reellen Vektorraums  $\mathbb{R}^3$ ? Begründen Sie!

- (1)  $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$ .
- (2)  $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 0\}$ .
- (3)  $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ .
- (4)  $A_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1\}$ .
- (5)  $A_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\}$ .
- (6)  $A_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$ .
- (7)  $A_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) = t(1, -3, 5) + s(2, 0, -3)\}$ .

*Lösung.* (1)  $A_1 = \ker f_1$ , wobei  $f_1$  die lineare Abbildung  $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1$  ist. Es folgt, dass  $A_1$  ein linearer Teilraum ist (vgl. Lemma 27.3).

(2)  $A_2$  ist kein linearer Teilraum:  $(1, 1, 0) \in A_2$  und  $(0, 1, 1) \in A_2$ , aber  $(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 2, 1) \notin A_2$ .

(3)  $A_3$  ist ein linearer Teilraum, denn  $A_3$  ist der Kern der linearen Abbildung  $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3$ .

(4)  $A_4$  ist kein linearer Teilraum, denn  $(0, 0, 0) \notin A_4$ .

(5)  $A_5$  ist ein linearer Teilraum, weil  $A_5$  der Kern der linearen Abbildung  $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3)$  ist. Alternativ:  $A_5$  ist der Durchschnitt der linearen Teilräume  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$  und  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ . Nach Korollar 27.2 ist also  $A_5$  ein linearer Teilraum.

(6)  $A_6$  ist kein linearer Teilraum, weil  $(1, 0, 0) \in A_6$  aber  $(-1)(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin A_6$ .

(7)  $A_7$  ist ein linearer Teilraum, weil  $A_7$  das Bild der linearen Abbildung  $f_7 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(t, s) \mapsto t(1, -3, 5) + s(2, 0, -3)$  ist (vgl. Lemma 27.6).

**Aufgabe 12.4.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $U, W \subseteq V$  lineare Teilräume.

- (1) Zeigen Sie, dass  $U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$  ein linearer Teilraum von  $V$  ist.
- (2) Sei  $V := \mathbb{R}^3$  und  $U := \text{span}(e_1 + e_2, e_2)$ . Finden Sie einen Vektor  $w_1 \in \mathbb{R}^3$ , sodass mit  $W_1 := \text{span}(w_1)$  die Identität  $U + W_1 = \mathbb{R}^3$  gilt, und einen Vektor  $w_2 \in \mathbb{R}^3$ , sodass mit  $W_2 := \text{span}(w_2)$  die Identität  $U + W_2 = \mathbb{R}^3$  nicht gilt.

*Lösung.* (1) Es gilt natürlich  $0 \in U + W$  (weil  $0 \in U$ ,  $0 \in W$  und  $0 = 0 + 0$ ). Seien  $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$ . Dann ist

$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W,$$

weil  $u_1 + u_2 \in U$  und  $w_1 + w_2 \in W$ . Wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann folgt

$$\lambda(u_1 + w_1) = \lambda u_1 + \lambda w_1 \in U + W,$$

denn  $\lambda u_1 \in U$  und  $\lambda w_1 \in W$ .

- (2) Für  $w_1$  genügt es einen Vektor zu wählen, der zusammen mit

$$e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist, also z.B.

$$w_1 := e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden die drei Vektoren eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  und es folgt  $U + W_1 = \mathbb{R}^3$ .

Für  $w_2$  müssen wir einen Vektor wählen, der in  $U$  liegt, z.B.  $w_2 := e_1$ . Dann ist  $W_2 \subseteq U$  und daher  $U + W_2 = U \neq \mathbb{R}^3$  (z.B. liegt  $e_3$  nicht in  $U$ ).

**Aufgabe 12.5.** Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .
- (2)  $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (3)  $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ .

*Lösung.* (1) Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  so, dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Es müssen also die folgenden drei Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 6\lambda_2 &= 0, \\ -2\lambda_1 + 8\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste und die dritte Gleichung implizieren leicht  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , und nach der zweiten Gleichung muss dann auch  $\lambda_3 = 0$  gelten. Die drei Vektoren sind also linear unabhängig.

Alternativ kann man die Matrix, deren Spalten die drei Vektoren sind, durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 20 & 1 \\ 0 & -17 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist also 3 und nach der Dimensionsformel (vgl. Theorem 28.17) hat ihr Kern die Dimension  $3 - 3 = 0$ . Die drei Vektoren sind also linear unabhängig.

(2) Seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  so, dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = 0,$$

oder äquivalent dazu

$$\lambda_1 \cos \alpha - \lambda_2 \sin \alpha = 0, \tag{7}$$

$$\lambda_1 \sin \alpha + \lambda_2 \cos \alpha = 0. \tag{8}$$

Nehmen wir zunächst an, dass  $\cos \alpha \neq 0$  und  $\sin \alpha \neq 0$ . Wir können dann die erste Gleichung mit  $\cos \alpha$ , die zweite mit  $\sin \alpha$  multiplizieren:

$$\lambda_1 \cos^2 \alpha - \lambda_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Addition der beiden Gleichung ergibt  $\lambda_1(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \lambda_1 = 0$  und dann resultiert auch  $\lambda_2 = 0$ .

Wenn  $\cos \alpha = 0$ , folgt  $\sin \alpha = \pm 1$ . Dann impliziert (7), dass  $\lambda_2 = 0$ , und mit (8) folgt  $\lambda_1 = 0$ .

Wenn  $\sin \alpha = 0$ , folgt  $\cos \alpha = \pm 1$  und man sieht analog, dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ , muss also  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  gelten, d.h. die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

Alternativ kann man die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

berechnen. Die Determinante ist immer 1; daher sind die beiden Vektoren immer linear unabhängig.

(3) Wir bringen die Matrix, deren Spalten die drei Vektoren sind, durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 9 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 41 & 10 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 41 & 10 \\ 0 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 41 & 10 \\ 0 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist 3 und die Dimension des Kernes ist  $3 - 3 = 0$ . Die drei Vektoren sind also linear unabhängig.

**Aufgabe 12.6.** Sei  $\mathcal{P}_n$  die Menge aller Polynome  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  mit reellen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  vom Grad  $\leq n$ .

(1) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{P}_n$  mit der Addition

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \\ := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) := \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n$$

ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist.

(2) Können Sie ein Basis von  $\mathcal{P}_n$  angeben?

(3) Sind die Polynome  $x(x-1)^2$ ,  $x(x-1)$  und  $x^3 - x$  in  $\mathcal{P}_3$  linear unabhängig?

(4) Bilden die Polynome der Gestalt  $ax^2 + bx^7$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ , einen linearen Teilraum von  $\mathcal{P}_{13}$ ?

*Lösung.* (1) Wir können jedes Polynom  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  mit dem  $n+1$  Tupel  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  identifizieren. Dann entspricht  $\mathcal{P}_n$  mit der angegebenen Addition und Skalarmultiplikation genau dem reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

(2) Vermöge der Identifikation in (1) entspricht die Standardbasis  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  dem Tupel  $\mathcal{B} := (1, x, \dots, x^n)$ , welches also eine Basis von  $\mathcal{P}_n$  ist. Dann ist

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n, \quad (a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

der kanonische Basisisomorphismus.

(3) Es gilt

$$x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x = 1(x^3 - x) - 2(x^2 - x) = 1(x^3 - x) - 2(x(x-1)),$$

d.h. die drei Polynome sind linear abhängig.

(4)  $U := \{ax^2 + bx^7 : a, b \in \mathbb{R}\} = \text{span}(x^2, x^7)$  bilden einen Teilraum von  $\mathcal{P}_{13}$ , denn offensichtlich gilt  $x^2, x^7 \in \mathcal{P}_{13}$ .

**Aufgabe 12.7.** (1) Charakterisieren Sie, für welche  $a, b \in \mathbb{R}$  die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig in } \mathbb{R}^2 \text{ sind.}$$

(2) Finden Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in  $\mathbb{R}^3$  sind.

*Lösung.* (1) Die beiden Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$$

gilt. Existiert so ein  $\lambda$ , dann muss  $\lambda = 1$  und folglich  $a = b$  sein. Umgekehrt sind in diesem Fall die beiden Vektoren trivialerweise linear abhängig. Die beiden Vektoren sind also genau dann linear unabhängig, wenn  $a \neq b$  gilt.

Alternativ berechnet man die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Die Determinante  $b - a$  ist genau dann Null, wenn  $a = b$ .

(2) Wenn  $x = 0$ , dann sind die Vektoren offensichtlich linear abhängig (der erste und der dritte Vektor sind gleich). Nehmen wir nun an, dass  $x \neq 0$  und  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  so sind, dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = 0,$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned} x\lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_1 + x\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_2 + x\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ziehen wir die dritte von der ersten Gleichung ab, finden wir

$$x(\lambda_1 - \lambda_3) = 0,$$

d.h.  $\lambda_1 = \lambda_3$ , weil  $x \neq 0$ . Die zweite Gleichung liefert dann

$$2\lambda_1 + x\lambda_2 = 0.$$

Weil  $\lambda_2 = -x\lambda_1$  (erste Gleichung), folgt

$$\lambda_1(2 - x^2) = 0.$$

Falls  $x^2 \neq 2$ , folgt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Zusammenfassend haben wir also gezeigt: wenn  $x \neq 0$  und  $x^2 \neq 2$ , dann sind die Vektoren linear unabhängig.

Umgekehrt sehen wir, dass

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0.$$

Die drei Vektoren sind also genau dann linear unabhängig, wenn  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}\}$ .

Auch hier kann man die Determinante verwenden oder durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{x \neq 0} \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 - x^2 & -x \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1 - x^2 & -x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 2 - x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{x^2 \neq 2} \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}\}$  die Vektoren linear unabhängig sind. Wenn  $x = 0$ , sieht man gleich, dass die erste Matrix nur Rang 2 hat. Wenn  $x \neq 0$  aber  $x^2 = 2$ , dann hat die vierte Matrix nur Rang 2. Somit gilt: Die drei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}\}$ .

**Aufgabe 12.8.** Seien die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linear unabhängig im reellen Vektorraum  $V$ . Sei  $w \in V$ .

- (1) Zeigen Sie: Wenn die Vektoren  $v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_n + w$  linear abhängig sind, dann gilt  $w \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .
- (2) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Umkehrung nicht gilt.

*Lösung.* (1) Angenommen die Vektoren  $v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_n + w$  sind linear abhängig. Dann gibt es Skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , nicht alle 0, sodass

$$\lambda_1(v_1 + w) + \lambda_2(v_2 + w) + \dots + \lambda_n(v_n + w) = 0.$$

Es folgt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)w.$$

Nun gilt, dass  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$ , denn sonst würde die lineare Unabhängigkeit von  $v_1, \dots, v_n$  implizieren, dass alle  $\lambda_i$  Null sind. Das bedeutet, die Gleichung kann durch  $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$  dividiert werden und man sieht, dass  $w \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

- (2) Man kann z.B. einfach  $w = 0$  setzen. Oder:

Sei  $v \neq 0$ ; dann ist  $\{v\}$  linear unabhängig und  $w := v \in \text{span}(v)$ . Dann gilt  $v + w = 2v \neq 0$  und  $\{v + w\}$  ist also linear unabhängig.

Konkreter: Die Einheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$  in  $\mathbb{R}^2$  sind linear unabhängig. Weiters gilt natürlich  $e_1 \in \text{span}(e_1, e_2)$  und  $e_1 + e_1$  und  $e_1 + e_2$  sind ebenfalls linear unabhängig.



13. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 8. BIS 12. JUNI

**Aufgabe 13.1.** Bestimmen Sie den Rang und Parameterdarstellungen des Kerns und des Bildes der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Lösung.* Wir bringen die Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit gilt  $\text{rank}(A) = 2$  und  $\dim \ker(A) = 4 - 2 = 2$ . Eine Basis des Kerns von  $A$  ist

$$e_3 - \frac{4}{11}e_1 + \frac{5}{11}e_2 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 - \frac{13}{11}e_1 - \frac{3}{11}e_2 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

und folglich ist  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \ker(A)$  mit

$$\varphi \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t_1 - 13t_2 \\ 5t_1 - 3t_2 \\ 11t_1 \\ 11t_2 \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung von  $\ker(A)$ . Das Bild von  $A$  ist

$$\text{im}(A) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Aufgabe 13.2.** Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die inverse Matrix  $A^{-1}$  und lösen Sie die Gleichung  $AX = B$ .

Lösung.

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -2 & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{20} & \frac{7}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 \\ 12 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von  $AX = B$  ist

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 \\ 12 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 & -2 & -11 \\ 8 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 13.3.** Für welche  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Berechnen Sie für solche  $\lambda$  die inverse Matrix  $A^{-1}$ . Hinweis: Verwenden Sie das Verfahren zur Matrixinversion und achten Sie darauf, für welche  $\lambda$  die einzelnen Schritte zulässig sind.

*Lösung.* Wenn  $\lambda = 0$ , dann ist  $A = I_4$  invertierbar mit  $A^{-1} = I_4$ . Wir nehmen nun an, dass  $\lambda \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow_{\lambda^2 \neq 1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda^3}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\lambda & 1 \end{array} \right)$$

Falls  $\lambda^2 \neq 1$  ist  $A$  also invertierbar mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda^3}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn  $\lambda^2 = 1$  dann ist die zweite Zeile der zweiten Matrix gleich  $(0, 0, 0, 0 | -\lambda, 1, 0, 0)$ . Das bedeutet, dass  $\text{rank}(A) < 4$  und somit ist  $A$  nicht invertierbar.

**Aufgabe 13.4.** Zeigen Sie Lemma 29.4: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Das inhomogene lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  besitzt Lösungen.
- (2)  $b \in \text{im}(A)$ .
- (3)  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | b)$ .

*Lösung.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2) Es gilt  $b \in \text{im}(A)$  genau dann, wenn es ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax = b$  gibt.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Die Bedingung  $b \in \text{im}(A)$  impliziert  $\text{im}(A | b) = \text{im}(A)$ , denn wenn  $a_1, \dots, a_n$  die Spalten von  $A$  sind, dann gilt

$$\text{im}(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_n) = \text{span}(a_1, \dots, a_n, b) = \text{im}(A | b).$$

Es folgt  $\text{rank}(A) = \dim \text{im}(A) = \dim \text{im}(A | b) = \text{rank}(A | b)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Klarerweise gilt  $\text{im}(A) \subseteq \text{im}(A | b)$ . Wenn diese beiden linearen Teilräume von  $\mathbb{R}^m$  die gleiche Dimension haben, dann sind sie gleich (vgl. Korollar 28.15). Insbesondere gilt  $b \in \text{im}(A)$ .

**Aufgabe 13.5.** Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

*Lösung.* Die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A | b) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & 4 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 39 & -15 & 57 \end{pmatrix} \\
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 15 & -10 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 10 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 39 & -15 & 57 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 15 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 10 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 39 & -15 & 57 \end{pmatrix} \\
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 13 & -5 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 65 & 0 & 0 & -5 & -20 \\ 0 & 65 & 0 & -85 & -15 \\ 0 & 0 & 13 & -5 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} & -\frac{4}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{13} & -\frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$-\frac{4}{13}e_1 - \frac{3}{13}e_2 + \frac{19}{13}e_3 = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems  $Ax = b$  und

$$\text{span}(e_4 + \frac{1}{13}e_1 + \frac{17}{13}e_2 + \frac{5}{13}e_3) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{17}{13} \\ \frac{5}{13} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \right)$$

die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$ . Die Lösungsmenge von  $Ax = b$  ist also

$$\left\{ \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Aufgabe 13.6.** (1) Bestimmen Sie Parameterdarstellungen des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ -3x_1 + 4x_3 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung der linearen Abbildung  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 5x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

*Lösung.* (1) Es gilt  $f(x) = Ax$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Weiters gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \text{im}(f), \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung des Bildes von  $f$  und

$$\mathbb{R} \rightarrow \ker(f), \quad t \mapsto t \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung des Kerns von  $f$ .

(2) Es gilt  $g(x) = Bx$  mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Inverse von  $B$ :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 19 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 3 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 33 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 2 & 23 & -11 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{19}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung  $g^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2x_1 + 23x_2 - 11x_3 \\ x_1 + 19x_2 - 8x_3 \\ -10x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 13.7.** Beschreiben Sie

(1) den affinen Teilraum

$$H := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{span} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

von  $\mathbb{R}^3$  als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems,

(2) die Menge  $L := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 4\}$  durch eine Parameterdarstellung.

Lösung. (1) Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

und bringen sie durch elementare Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -13 \\ 0 & -28 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & \frac{28}{13} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{28}{13} & \frac{28}{13} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{7}{13} & \frac{28}{13} \end{pmatrix}$$

Dadurch bleibt das Bild der Matrix erhalten (vgl. Lemma 29.7). Dieses Bild ist der Lösungsraum der linearen Gleichung

$$-\frac{7}{13}x_1 - \frac{28}{13}x_2 + x_3 = 0.$$

Durch Einsetzen des Punktes  $(1, 2, 3)$  erhalten wir

$$-\frac{7}{13} - \frac{28}{13} \cdot 2 + 3 = -\frac{24}{13}.$$

Die gesuchte Gleichung ist also

$$-\frac{7}{13}x_1 - \frac{28}{13}x_2 + x_3 = -\frac{24}{13}$$

oder äquivalent dazu

$$7x_1 + 28x_2 - 13x_3 = 24.$$

Das heißt  $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 + 28x_2 - 13x_3 = 24\}$ .

(2) Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(1 \quad 3 \quad -11 \quad 4)$$

und sie ist schon in reduzierter Zeilenstufenform. Somit ist

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung und

$$e_2 - 3e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 + 11e_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis für den Lösungsraum der homogenen Gleichung. Eine Parameterdarstellung des Lösungsraums der inhomogenen Gleichung ist also

$$L = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Aufgabe 13.8.** Für welche  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= a \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= b \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 &= c \end{aligned}$$

lösbar? Bestimmen Sie in diesem Fall eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

*Lösung.* Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & a \\ 2 & 3 & -5 & b \\ 1 & 4 & -9 & c \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & a \\ 2 & 3 & -5 & b \\ 1 & 4 & -9 & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & a \\ 0 & 5 & -13 & b-2a \\ 0 & 5 & -13 & c-a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & a \\ 0 & 5 & -13 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+a \end{pmatrix}.$$

Das inhomogenen Gleichungssystem ist nur dann lösbar, wenn  $c - b + a = 0$ . In diesem Fall gilt weiter

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & a \\ 0 & 5 & -13 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & a \\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} & \frac{1}{5}(b-2a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5}(b+3a) \\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} & \frac{1}{5}(b-2a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist somit

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} b+3a \\ b-2a \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left( \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

#### 14. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 15. BIS 19. JUNI

**Aufgabe 14.1.** Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \\ 55 & -88 & 15 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Lösung.*

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 8 & -7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{8} \end{pmatrix} = -18.$$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -7 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \\
&= -7(-1-4) - 3(-1)(40-55) = -10.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det C &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \\
&= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det D &= \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -10 & -13 \\ 0 & -21 & -27 \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -10 & -13 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -10 & -13 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

$$\det E = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\det F = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \\ 55 & -88 & 15 \end{pmatrix} = 2 \cdot 10 \cdot 15 = 300.$$

$$\det G = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{weil } \text{rank}(G) < 3.$$

**Aufgabe 14.2.** Berechnen Sie die Determinante der  $n \times n$  Matrix

$$A_n = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $a_{ij} = 1$  wenn  $i + j = n + 1$  und  $a_{ij} = 0$  andernfalls.

*Lösung.* Die Matrix  $A_n$  kann durch Zeilenvertauschungen in die Einheitsmatrix  $I_n$  verwandelt werden: die erste Zeile wird mit der letzten Zeile vertauscht, die zweite Zeile mit der vorletzten, usw. Dafür sind  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  Zeilenvertauschungen nötig. Daher gilt

$$\det A_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det I_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Alternativ kann man z.B. nach der ersten Spalte entwickeln:

$$\det A_n = (-1)^{n+1} \det A_{n-1}.$$



Durch Rekursion folgt

$$\begin{aligned} \det A_n &= (-1)^{(n+1)+n} \det A_{n-2} = (-1)^{(n+1)+n+(n-1)} \det A_{n-3} \\ &= \dots = (-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\dots+3} \det A_1 \\ &= (-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\dots+3} = (-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}-3} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}. \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass  $(-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  für alle natürlichen  $n \geq 1$  gilt, genügt es zu zeigen, dass die Exponenten entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Wenn  $n = 2k$  gerade ist, dann sind

$$\frac{(n-1)(n+4)}{2} = (2k-1)(k+2) \quad \text{und} \quad \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k$$

genau dann gerade wenn  $k$  gerade ist. Wenn  $n = 2k+1$  ungerade ist, dann sind

$$\frac{(n-1)(n+4)}{2} = k(2k+5) \quad \text{und} \quad \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k$$

genau dann gerade wenn  $k$  gerade ist.

**Aufgabe 14.3.** Beweisen Sie die *Regel von Sarrus*:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

*Lösung.* Wir entwickeln nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 14.4.** Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Hierbei ist  $A = (a_{ij})$  eine  $p \times p$  Matrix,  $B = (b_{ij})$  eine  $q \times q$  Matrix,  $C = (c_{ij})$  eine  $p \times q$  Matrix und

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & c_{11} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & c_{p1} & \cdots & c_{pq} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q1} & \cdots & b_{qq} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Identität zuerst im Fall  $A = I_p$  und dann im Fall  $B = I_q$ . Führen Sie dann die allgemeine Situation auf diese Spezialfälle zurück, indem Sie die Produktformel für die Determinante verwenden.

*Lösung.* Durch Entwicklung nach der letzten Zeile (bzw. ersten Spalte) und Rekursion ist leicht einzusehen, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det A \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det B.$$

Nehmen wir an, dass  $\det B \neq 0$ . Dann ist  $B$  invertierbar und es gilt

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & CB^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & CB^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Wenn  $\det B = 0$ , dann sind Zeilen von  $B$  linear abhängig und somit sind die Zeilen von  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  linear abhängig. In diesem Fall gilt die Identität, denn beide Seiten sind Null.

**Aufgabe 14.5.** Sei  $U$  der lineare Teilraum von  $\mathbb{R}^3$ , der von den Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

- (1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $U$ .
- (2) Ergänzen Sie die gefundene Orthonormalbasis von  $U$  zu einer Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ .
- (3) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion  $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow U$  auf  $U$ .

*Lösung.* (1) Wir setzen

$$v_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$v_2 := \frac{x_2 - \langle x_2 | v_1 \rangle v_1}{\|x_2 - \langle x_2 | v_1 \rangle v_1\|}$$

wobei

$$x_2 - \langle x_2 | v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und

$$\|x_2 - \langle x_2 | v_1 \rangle v_1\| = \frac{1}{5} \sqrt{36 + 64 + 225} = \sqrt{13}$$

und daher

$$v_2 := \frac{1}{5\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet  $(v_1, v_2)$  eine Orthonormalbasis von  $U$ .

(2) Wir berechnen das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ -60 \\ 50 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{81 + 144 + 100} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}.$$

Mit  $v_3 := \frac{1}{5\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$  ist  $(v_1, v_2, v_3)$  also eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ .

(3) Die Orthogonalprojektion  $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow U$  ist

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \langle x | v_1 \rangle v_1 + \langle x | v_2 \rangle v_2 = \frac{4x_1 - 3x_2}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6x_1 + 8x_2 + 15x_3}{325} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 14.6.** Seien  $x, y, z$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie:

- (1)  $\det(x, y, z) = \langle x \times y | z \rangle = \langle x | y \times z \rangle$ .
- (2)  $(x \times y) \times z = \langle z | x \rangle y - \langle y | z \rangle x$ .
- (3)  $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x | y \rangle^2$ .
- (4)  $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$ .

*Lösung.* (1) Entwicklung nach der dritten Spalte liefert

$$\det(x, y, z) = z_1 \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} - z_2 \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} + z_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \langle x \times y | z \rangle.$$

Analog liefert Entwicklung nach der ersten Spalte die zweite Identität.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} (x \times y) \times z &= \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_3 - (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_2 \\ -(x_2 y_3 - x_3 y_2) z_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_1 \\ (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_2 - (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_1 - (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) x_1 \\ (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_2 - (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) x_2 \\ (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_3 - (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) x_3 \end{pmatrix} \\ &= \langle z | x \rangle y - \langle y | z \rangle x. \end{aligned}$$

(3) Mit (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned}\|x \times y\|^2 &= \langle x \times y \mid x \times y \rangle = \langle (x \times y) \times x \mid y \rangle = \langle \langle x \mid x \rangle y - \langle y \mid x \rangle x \mid y \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle - \langle y \mid x \rangle \langle x \mid y \rangle = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x \mid y \rangle^2.\end{aligned}$$

(4) Nach (2) gilt:

$$\begin{aligned}(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y \\ = \langle z \mid x \rangle y - \langle y \mid z \rangle x + \langle x \mid y \rangle z - \langle z \mid x \rangle y + \langle y \mid z \rangle x - \langle x \mid y \rangle z = 0.\end{aligned}$$

**Aufgabe 14.7.** Berechnen Sie das Volumen und den Flächeninhalt der Seitenflächen des Parallelepipeds, welches von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

*Lösung.* Für das Volumen gilt

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right| = |3(4 - 20) + (4 + 2)| = 42.$$

Die Flächeninhalte der Seitenflächen sind

$$\begin{aligned}A_1 &= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = 6 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 6\sqrt{6}, \\ A_2 &= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} \right\| = 7 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 7\sqrt{6}, \\ A_3 &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -16 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 2 \left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{69}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 14.8.** Die beiden Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sind *windschief*, d.h. sie sind weder parallel noch schneiden sie sich.

- (1) Bestimmen Sie die Gerade  $h$ , die  $g_1$  und  $g_2$  orthogonal schneidet. Hinweis: Bestimmen Sie die affine Ebene, in der  $g_1$  und  $h$  liegen, und schneiden Sie diese mit  $g_2$ .
- (2) Berechnen Sie den Abstand  $d(g_1, g_2)$  der beiden Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , welcher durch

$$d(g_1, g_2) = \|p_1 - p_2\|$$

definiert ist, wobei  $g_i \cap h = \{p_i\}$ ,  $i = 1, 2$ .

*Lösung.* (1) Ein Richtungsvektor von  $h$  ist

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die affine Ebene, in der  $g_1$  und  $h$  liegen, ist

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{span} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ein Normalvektor für  $E$  ist

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Sei  $p_2$  der Schnittpunkt von  $g_2$  mit  $E$ :

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

ist äquivalent zu

$$1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = -t \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5t.$$

Somit gilt

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Gerade  $h$  ist also

$$h = \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) Der Schnittpunkt  $p_1$  von  $h$  und  $g_1$  ist

$$p_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

impliziert  $s = -\frac{1}{5}$  und  $t = 2$ .

Der Abstand der beiden Geraden ist

$$d(g_1, g_2) = \|p_1 - p_2\| = \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2}.$$

**Aufgabe 14.9.** Seien allgemein  $g_1 = \{a_1 + tv_1 : t \in \mathbb{R}\}$  und  $g_2 = \{a_2 + tv_2 : t \in \mathbb{R}\}$  windschiefe Geraden in  $\mathbb{R}^3$ . Begründen Sie die Formel

$$d(g_1, g_2) = \frac{|\langle v_1 \times v_2 \mid a_1 - a_2 \rangle|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n \mid x - a_2 \rangle = 0\}$  mit  $n := \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$  und verwenden Sie, dass der Abstand eines Punktes  $p$  von  $H$  durch  $|\langle n \mid p - a_2 \rangle|$  gegeben ist (vgl. Proposition 25.6).

*Lösung.* Der Vektor  $v_1 \times v_2$  steht orthogonal zu  $v_1$  und  $v_2$  und ist ein Richtungsvektor der Geraden  $h$ , die  $g_1$  und  $g_2$  orthogonal schneidet. Betrachten wir nun

$$n := \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|},$$

und die Ebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n \mid x - a_2 \rangle = 0\}$ . Dann liegt  $g_2$  in  $H$ , denn

$$\langle n \mid a_2 + tv_2 - a_2 \rangle = t\langle n \mid v_2 \rangle = 0$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Weiters haben alle Punkte in  $g_1$  den gleichen Abstand zu  $H$ , denn

$$|\langle n \mid a_1 + tv_1 - a_2 \rangle| = |\langle n \mid a_1 - a_2 \rangle + t\langle n \mid v_1 \rangle| = |\langle n \mid a_1 - a_2 \rangle|$$

ist unabhängig von  $t$ . Dass  $|\langle n \mid p - a_2 \rangle|$  der Abstand von  $p$  zu  $H$  ist, zeigt man analog zu Proposition 25.6. Insbesondere gilt

$$d(g_1, g_2) = |\langle n \mid a_1 - a_2 \rangle|.$$

## 15. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 22. BIS 26. JUNI

**Aufgabe 15.1.** Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  diagonalisierbar?

*Lösung.* Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind also  $-1$  und  $4$ . Es gilt

$$E_{-1} = \ker(A + I_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$E_4 = \ker(A - 4I_2) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Das charakteristische Polynom von  $B$  ist

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -5 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(4 - \lambda) - 5 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte von  $B$  sind also  $-1$  und  $5$ . Es gilt

$$E_{-1} = \ker(B + I_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$E_5 = \ker(B - 5I_2) = \ker \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

Das charakteristische Polynom von  $C$  ist

$$P_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Die Eigenwerte von  $C$  sind also  $0$  und  $2$ . Es gilt

$$E_0 = \ker(C) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$E_2 = \ker(C - 2I_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Alle drei Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind diagonalisierbar.

**Aufgabe 15.2.** Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sind die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  diagonalisierbar?

*Lösung.* Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ -2 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^3 + 2 - (1 - \lambda) - 2(1 - \lambda) \\ &= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 1 + \lambda - 2 + 2\lambda \\ &= 3\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= \lambda^2(3 - \lambda). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 0 und 3. Es gilt

$$\begin{aligned} E_0 = \ker(A) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E_3 = \ker(A - 3I_3) &= \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von  $B$  ist

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 2 und 3. Es gilt

$$\begin{aligned} E_2 = \ker(B - 2I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E_3 = \ker(B - 3I_3) &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von  $C$  ist

$$P_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(1 - \lambda).$$



Die Eigenwerte sind also 0 und 1. Es gilt

$$E_0 = \ker(C) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$E_1 = \ker(C - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Weder  $A$  noch  $B$  sind diagonalisierbar, denn die entsprechenden Eigenvektoren bilden keine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Die Matrix  $C$  hingegen ist diagonalisierbar.

**Aufgabe 15.3.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  beliebig. Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix},$$

d.h. finden Sie die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  und eine Matrix  $P$  mit  $P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

*Lösung.* Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha - \lambda \end{pmatrix} = -(\cos \alpha - \lambda)(\cos \alpha + \lambda) - \sin^2 \alpha \\ &= \lambda^2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also  $-1$  und  $1$ . Wenn  $\sin \alpha = 0$ , dann ist die Matrix  $A$  schon in Diagonalform (für  $P := I_2$ ). Wir können also annehmen, dass  $\sin \alpha \neq 0$  und somit  $\cos \alpha \neq \pm 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \ker \begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ \sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{span} \left( \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 1 + \cos \alpha \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Weil  $A$  symmetrisch ist, sind die Eigenräume  $E_{-1}$  und  $E_1$  orthogonal. Somit folgt

$$E_1 = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right).$$

Setzen wir

$$P := \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & 1 + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

dann gilt  $P^t A P = \text{Diag}(1, -1)$ . Geometrisch beschreibt  $A$  also eine Spiegelung mit Spiegelungsachse  $E_1$ .

**Aufgabe 15.4.** Zeigen Sie:

- (1) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann ist  $\lambda$  genau dann ein Eigenwert von  $A$ , wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A^t$  ist.
- (2) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Dann gilt  $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ .

- (3) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar. Wenn  $\lambda \neq 0$  ein Eigenwert von  $A$  ist, dann ist  $\lambda^{-1}$  ein Eigenwert von  $A^{-1}$ .

*Lösung.* (1) Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert von } A &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n)^t = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A^t - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert von } A^t. \end{aligned}$$

- (2) Es gibt eine invertierbare Matrix  $B$  mit  $B^{-1}AB = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n &= \det \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \det(B^{-1}AB) \\ &= \det(B^{-1}) \det A \det B = (\det B)^{-1} \det A \det B = \det A. \end{aligned}$$

- (3) Es existiert  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , sodass  $Av = \lambda v$ . Dann folgt

$$v = A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v) = \lambda A^{-1}v$$

und somit  $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$ .

**Aufgabe 15.5.** Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie eine orthogonale Matrix  $P$ , sodass  $P^tAP$  eine Diagonalmatrix ist.

*Lösung.* Wir ermitteln zuerst die Eigenwerte von  $A$ :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} &= (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) - 2(1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2) = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 0, 1 und 3. Nun bestimmen wir die entsprechenden Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_0 &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \\ E_1 &= \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \\ E_3 &= \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Die drei normierten Eigenvektoren

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ . Sie sind die Spalten der gesuchten Matrix  $P$ ,

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

für welche  $P^t A P = \text{Diag}(0, 1, 3)$  gilt.

**Aufgabe 15.6.** Verwenden Sie die Hauptachsentransformation, um die Quadrik

$$q(x) = 9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$$

durch eine geeignete Isometrie von  $\mathbb{R}^2$  in Hauptlage zu bringen. Um welchen Typ von Quadrik handelt es sich?

*Lösung.* Wir schreiben

$$q(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-2, -4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1$$

und diagonalisieren zunächst die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 9 - \lambda & -12 \\ -12 & 16 - \lambda \end{pmatrix} = (9 - \lambda)(16 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25).$$

Die Eigenwerte sind 0 und 25. Die entsprechenden Eigenräume sind

$$E_0 = \ker \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

$$E_{25} = \ker \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Die Matrix

$$R := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist ein Element von  $\text{SO}(2)$  und erfüllt  $R^t A R = \text{Diag}(0, 25)$ . Wir setzen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R \bar{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} q(\bar{x}) &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + (-2, -4) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + 1 \\ &= 25\bar{x}_2^2 - 4\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + 1. \end{aligned}$$

Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$q(\bar{x}) = 25\left(\bar{x}_2^2 - \frac{2}{25}\bar{x}_2 + \frac{1}{625}\right) - 4\bar{x}_1 + 1 - \frac{1}{25} = 25\left(\bar{x}_2 - \frac{1}{25}\right)^2 - 4\left(\bar{x}_1 - \frac{6}{25}\right).$$

Durch die Substitution

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bringen wir die Quadrik also auf die Form

$$\tilde{x}_2^2 = \frac{4}{25}\tilde{x}_1.$$

Dabei handelt es sich um eine Parabel in Hauptlage.

**Aufgabe 15.7.** Führen Sie die Hauptachsentransformation an der Quadrik

$$q(x) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 6x_1 + 2x_2 - \frac{133}{6} = 0$$

durch. Um welchen Kegelschnitt handelt es sich?

*Lösung.* Wir schreiben

$$q(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-6, 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{133}{6}$$

und diagonalisieren zunächst die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 4)(\lambda - 6).$$

Die Eigenwerte sind also 4 und 6. Die entsprechenden Eigenräume sind

$$E_4 = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$E_6 = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Die Matrix

$$R := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Element von  $SO(2)$  und erfüllt also  $R^t A R = \text{Diag}(4, 6)$ . Wir setzen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$q(\bar{x}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + (-6, 2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{133}{6}$$

$$= 4\bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_2^2 - 2\sqrt{2}\bar{x}_1 + 4\sqrt{2}\bar{x}_2 - \frac{133}{6}.$$

Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$\begin{aligned} q(\bar{x}) &= 4\left(\bar{x}_1^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x}_1 + \frac{1}{8}\right) + 6\left(\bar{x}_2^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\bar{x}_2 + \frac{2}{9}\right) - \frac{133}{6} - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \\ &= 4\left(\bar{x}_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(\bar{x}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 24. \end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{12} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

bringen wir die Quadrik also auf die Form

$$4\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tilde{x}_1^2}{6} + \frac{\tilde{x}_2^2}{4} = 1.$$

Dabei handelt es sich um eine Ellipse in Hauptlage mit den Halbachsen  $\sqrt{6}$  und 2.

**Aufgabe 15.8.** Bestimmen Sie die Achsen der Kegelschnitte in Aufgabe 15.6 und Aufgabe 15.7.

*Lösung.* Die Quadrik  $\{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = 0\}$  aus Aufgabe 15.6 ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade  $\tilde{x}_1 = 0$  wird unter der Translation

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf die Gerade  $\bar{x}_1 = \frac{6}{25}$  abgebildet. Dank

$$\bar{x} = R^t x = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass die erste Achse der Parabel die Geradengleichung

$$\frac{6}{25} = \frac{1}{5}(4x_1 + 3x_2) \quad \Leftrightarrow \quad 20x_1 + 15x_2 = 6$$

hat. Analog finden wir die Geradengleichung der zweiten Achse:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5}(-3x_1 + 4x_2) \quad \Leftrightarrow \quad -15x_1 + 20x_2 = 1.$$

Die Quadrik  $\{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = 0\}$  aus Aufgabe 15.7 ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $\sqrt{6}$  und 2 und mit Mittelpunkt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{12} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade  $\tilde{x}_1 = 0$  wird unter der Translation

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{12} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

auf die Gerade  $\bar{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$  abgebildet. Dank

$$\bar{x} = R^t x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass die erste Achse der Ellipse die Geradengleichung

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 = 1$$

hat. Analog finden wir die Geradengleichung der zweiten Achse:

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 - 3x_2 = 2.$$