Übungen zu
"Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie"

Andreas Cap

Sommersemester 2010

Kapitel 1: Einleitung

(1) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ diskutiere analog zur Vorlesung das Lösungsverhalten der Gleichung $ax = b$ in einer Variablen $x \in \mathbb{Z}$.

(2) Analysiere analog zu Abschnitt 1.2. der Vorlesung das Lösungsverhalten eines Systems von zwei Gleichungen in zwei Variablen im Fall dass $a_{12} \neq 0$ gilt. Verifiziere insbesondere, dass sich die gleiche Bedingung für die Existenz eindeutiger Lösungen ergibt wie in der Vorlesung.

(3) Bestimme genau, unter welchen Bedingungen ein System von drei Gleichungen in zwei Variablen, für das $a_{11} \neq 0$ gilt, mindestens eine Lösung besitzt.

(4) Verifiziere direkt, dass für $a_{11} \neq 0$

$$(a_{22} - a_{11}^{-1}a_{21}a_{12})(a_{33} - a_{11}^{-1}a_{31}a_{13}) - (a_{23} - a_{11}^{-1}a_{21}a_{13})(a_{32} - a_{11}^{-1}a_{31}a_{12}) \neq 0$$

äquivalent ist zu

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} \neq 0.$$

(5) Beschreibe alle möglichen Lagen von zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$. Finde für jede dieser Lagen ein System von zwei Gleichungen in zwei Variablen, dass in der "zeilenweisen Interpretation" zwei Gerade in dieser Lage beschreibt.

(6) Beschreibe die möglichen Lagen von zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$ und bestimme in jedem Fall den Durchschnitt der beiden Ebenen.

(7) Seien E_1, E_2 und E_3 Ebenen in $\mathbb{R}^3$ deren Normalvektoren alle in einer fixen Ebene durch den Ursprung liegen. Beschreibe unter Benutzung des vorherigen Beispiels anschaulich die möglichen Lagen solcher Ebenen und bestimme in jedem Fall den Schnitt $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

(8) Begründe zeichnerisch, warum für zwei Vektoren u und v in $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden durch Null liegen, jeder Vektor in $\mathbb{R}^2$ eindeutig in der Form $ru + sv$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

(9) Diskutiere die "spaltenweise Interpretation" von Systemen von drei Gleichungen in einer bzw. zwei Variablen.

(10) Diskutiere die "spaltenweise Interpretation" von Systemen von drei Gleichungen in drei Variablen.

Kapitel 2: Vektorräume und lineare Abbildungen

(11) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $s \in \mathbb{K}$ ein Element mit $s \neq 0$. Zeige: Falls $sr = r$ für ein Element $r \in \mathbb{K}$ mit $r \neq 0$ gilt, dann ist $s = 1$.

(12) Zeige, dass multiplikativ inverse Elemente in einem Körper eindeutig bestimmt sind.

(13) Sei $m \in \mathbb{N}$ eine fixe Zahl ≥ 2. Zeige, dass $a \sim_m b$ genau dann, wenn $b - a$ ein (ganzzahliges) Vielfaches von m ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert, also $a \sim a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt, aus $a \sim b$ auch $b \sim a$ folgt und mit $a \sim b$ und $b \sim c$ automatisch auch $a \sim c$ gelten muss.

(14) Für die Relation $\sim_m$ aus dem letzten Beispiel zeige, dass jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ äquivalent zu genau einer der Zahlen $0, \dots, m-1$.

Anleitung: Dividiere a mit Rest durch m.

(15) Für die Relation $\sim_m$ aus den letzten Beispielen zeige, dass aus $a_1 \sim_m a_2$ und $b_1 \sim_m b_2$ schon $(a_1 + b_1) \sim_m (a_2 + b_2)$ und $a_1 b_1 \sim_m a_2 b_2$ folgen.

(16) Auf der Menge $\mathbb{Z}_m := \{\overline{0}, \dots, \overline{m-1}\}$ definiere eine Addition durch $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$, wobei $c \in \{0, \dots, m-1\}$ die eindeutige Zahl ist, die $c \sim a + b$ erfüllt. Benutze das letzte Beispiel um zu zeigen, dass diese Operation assoziativ ist, und verifiziere direkt, dass sie kommutativ ist, $\overline{0}$ ein neutrales Element ist und inverse Elemente besitzt.

(17) Analog zum letzten Beispiel definiere eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}_m$ durch $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{c}$, wobei $c \in \{0, \dots, m-1\}$ die eindeutige Zahl ist, die $c \sim a \cdot b$ erfüllt. Zeige, dass diese Multiplikation assoziativ, kommutativ und distributiv bezüglich der Addition aus dem letzten Beispiel ist, und das $\overline{1}$ ein neutrales Element ist.

(18) Zeige, dass für eine Primzahl p die Menge $\mathbb{Z}_p$ mit den Operationen aus den letzten Beispielen ein Körper ist.

Anleitung: Es fehlt nur noch die Existenz multiplikativ inverser Elemente. Zeige dafür zunächst, dass für Elemente $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_p$, die beide ungleich $\overline{0}$ sind, auch $\overline{a} \cdot \overline{b} \neq \overline{0}$ gilt. Schließe daraus, dass die Funktion $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, die gegeben ist durch $f(\overline{b}) := \overline{a} \cdot \overline{b}$ injektiv sein muss. Daher muss sie aber auch surjektiv sein, was die Existenz eines Elements $\overline{b}$ mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$ impliziert.

(19) Verifiziere die Vektorraumeigenschaften (V5)–(V7) für die Operationen auf $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, die in Beispiel 2.2 (4) der Vorlesung definiert wurden.

(20) Zeige, dass eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ genau dann ein Teilraum ist, wenn sie durch den Nullpunkt geht.

(21) Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Teilräume (mit Begründung)?
- (a) $\{(x, y, z) : z = 0\}$
- (b) $\{(x, y, z) : z = 1\}$
- (c) $\{(x, y, z) : x = 0 \text{ oder } y = 0\}$
- (d) $\{(x, y, z) : ax + by = cz\}$ für fixes $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- (e) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$

(22) Beschreibe geometrisch alle Teilräume von $\mathbb{R}^3$.

(23) Betrachte $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeige, dass die komplexe Konjugation $\overline{a+ib} := a - ib$ eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert. Ist diese Abbildung auch linear als Abbildung von dem $\mathbb{C}$–Vektorraum $\mathbb{C}$ auf sich selbst?

(24) Bestimme direkt Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $f(x, y, z) = (2x - z, y + z)$.

(25) Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, dass die Teilmenge $\{v \in V : f(v) = g(v)\}$ ein Teilraum von V ist.

(26) Sei $\mathbb{R}_n[x]$ der Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten und betrachte die Funktion $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, die gegeben ist durch $D(\sum_i a_i x^i) = \sum_i i a_i x^{i-1}$. Zeige, dass D linear ist, und bestimme $\ker(D)$ und $\mathrm{Im}(D)$.

(27) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$–Vektorräumen. Zeige, dass man für einen beliebigen $\mathbb{K}$–Vektorraum U durch $f_*(g) := f \circ g$ eine lineare Abbildung $f_* : L(U, V) \to L(U, W)$ definieren kann.

(28) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$–Vektorräumen. Zeige, dass man für einen beliebigen $\mathbb{K}$–Vektorraum U durch $f^*(g) := g \circ f$ eine lineare Abbildung $f^* : L(W, U) \to L(V, U)$ definieren kann.

Kapitel 3: Matrizen und lineare Gleichungssysteme

(29) Bestimme die Matrix zu der linearen Abbildung $f(x, y, z) = (2x - z, y + z)$ aus Beispiel (24).

(30) Für die folgenden Matrizen A und B bestimme AB, BA und $(AB)^2 = ABAB$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kann man $A^2 = AA$ oder $B^2 = BB$ bilden?

(31) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2-i \\ 0 & 3+2i & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{C})$ und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ berechne Ax und Ay.

(32) Berechne $A^2 = AA$ und A^3 für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(33) Zeige, dass für eine fixe Matrix $C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ die Vorschrift $A \mapsto CA$ eine lineare Abbildung $M_{n,k}(\mathbb{K}) \to M_{m,k}(\mathbb{K})$ definiert und vergleiche das mit Beispiel (27).

(34) Zeige, dass für eine fixe Matrix $C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ die Vorschrift $A \mapsto AC$ eine lineare Abbildung $M_{k,m}(\mathbb{K}) \to M_{k,n}(\mathbb{K})$ definiert und vergleiche das mit Beispiel (28).

(35) Finde eine 3×3–Matrix A über $\mathbb{R}$, sodass A und A^2 nicht die Nullmatrix sind, aber A^3 die Nullmatrix ist.

Anleitung: Suche eine geeignete lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(36) Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ berechne $A+B$ und das Matrizenprodukt AB und vergleiche das mit den entsprechenden Operationen für die komplexen Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$.

(37) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ finde einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, sodass $x \neq 0$ aber $Ax = 0$ gilt. Schließe daraus, dass die Matrix A nicht invertierbar sein kann.

(38) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine $n \times n$–Matrix, sodass A^k für ein $k \in \mathbb{N}$ die Nullmatrix ist. Zeige: $\mathbb{I}_n - A$ ist invertierbar, und die inverse Matrix $(\mathbb{I}_n - A)^{-1}$ ist gegeben durch $\mathbb{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

Anleitung: Berechne direkt die Produkte der angegebenen Matrizen.

(39) Bestimme alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(40) Für welche $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$ besitzt das folgende komplexe lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{aligned} x + y &= b_1 \\ 2x + y &= b_2 \\ ix - y &= b_3 \end{aligned}$$

(41) Bestimme Menge aller Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems für $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= b_1 \\ -x + y - 3z &= b_2 \end{aligned}$$

(42) Löse das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x + y + \bar{3}z &= \bar{2} \\ x + \bar{4}y + \bar{2}z &= 0 \\ \bar{2}x + \bar{6}y + z &= \bar{4} \end{aligned}$$

(43) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Bestimme, ob A invertierbar ist, und falls ja berechne die inverse Matrix.

(44) Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ invertierbar ist und bestimme die inverse Matrix.

(45) Bestimme Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ -x - 2z \\ 3x - 7y - z \end{pmatrix}$$

Kapitel 4: Basen und Dimension

(46) Betrachte die Teilmenge $A = \{(1, 1, t) : t \in \mathbb{R}\}$ des $\mathbb{R}$–Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Zeige: $\langle A \rangle = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2\}$, und interpretiere dieses Resultat geometrisch.

Anleitung: Zeige erst, daß $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2\}$ ein Teilraum ist, der A enthält. Dann zeige, daß $(1, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ in $\langle A \rangle$ liegen und folgere daraus die Behauptung.

(47) Zeige, daß $\{(1, 2, 0), (1, 0, 3), (0, 4, 1)\}$ ein Erzeugendensystem für den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist.

(48) Zeige direkt, daß die Teilmenge $\{(1, 0, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ linear unabhängig ist.

(49) Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und W ein Teilraum der Dimension $n - 1$. Zeige:
(a) Es gibt eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$, sodaß $W = \operatorname{Ker}(f)$ gilt.

Anleitung: Erweitere eine Basis für W zu einer Basis für V und definiere f auf den Elementen dieser Basis.

(b) Ist $g : V \to \mathbb{K}$ eine weitere lineare Abbildung mit $\operatorname{Ker}(g) = W$, dann gibt es ein Element $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, sodaß $g(v) = \lambda f(v)$ für alle $v \in V$ gilt.

(50) Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und W ein k–dimensionaler Teilraum von V. Zeige:
(a) Es gibt eine (surjektive) lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}^{n-k}$ sodaß $W = \operatorname{Ker}(f)$ gilt.
(b) Ist $g : V \to \mathbb{K}^{n-k}$ eine weitere lineare Abbildung mit $W = \operatorname{Ker}(g)$, dann gibt es einen (eindeutigen) linearen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{K}^{n-k} \to \mathbb{K}^{n-k}$, sodaß $g = \varphi \circ f$ gilt.

(51) Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und W ein k–dimensionaler Teilraum von V. Zeige:
(a) Es gibt eine (injektive) lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^k \to V$ sodaß $W = \operatorname{Im}(f)$ gilt.
(b) Ist $g : \mathbb{K}^k \to V$ eine weitere lineare Abbildung mit $W = \operatorname{Im}(g)$, dann gibt es einen (eindeutigen) linearen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$, sodaß $g = f \circ \varphi$ gilt.

(52) Zeige: Für jeden Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ mit $c \neq 0$ ist die Gerade $\{t(a, b, c) : t \in \mathbb{R}\}$ ein Komplement zur Ebene $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

(53) Beweise, dass für zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume V_1 und V_2 das kartesische Produkt $V_1 \times V_2$ die Vektorraumeigenschaften (V5) bis (V8) erfüllt.

(54) Zeige, dass die in der Vorlesung definierte Multiplikation von Polynomen assoziativ ist.

(55) Bestimme den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

(56) Zeige, dass für $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und eine invertierbare $(m \times m)$–Matrix D gilt, dass A und DA den gleichen Rang haben.

(57) Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ berechne die beiden Matrizen $[\mathrm{id}]^{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}$ und $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}$ zu den Basiswechseln zwischen der Standardbasis $\mathcal{S}$ und der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(58) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne die Matrixdarstellung $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(59) Zeige, dass $\mathcal{B} := \{x^2 - 1, x^2 - 3x + 2, x^2 - x - 2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_2[x]$ ist und bestimme die Koordinatenvektoren der Polynome 1, x und x^2 bezüglich dieser Basis.

(60) Berechne die Matrixdarstellung $[D]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ des Ableitungsoperators $D : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, der gegeben ist durch $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus dem letzten Beispiel.

(61) Zeige, dass es reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[x]_2$ die zugehörige Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$p(5) = a(p(-1)) + b(p(0)) + c(p(1))$$

erfüllt. Bestimme diese Zahlen explizit.

Kapitel 5: Einige Konstruktionen und Anwendungen

(62) Betrachte den Teilraum von $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Konstruiere explizit einen linearen Isomorphismus zwischen dem Quotientenraum $\mathbb{R}^3/W$ und dem Teilraum $\{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

(63) Seien U und V zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume und $W \subset V$ ein Teilraum. Zeige, dass man den Raum $L(U, W)$ von linearen Abbildungen als Teilraum von $L(U, V)$ betrachten kann und dass der Quotient $L(U, V)/L(U, W)$ isomorph zu $L(U, V/W)$ ist.

Anleitung: Der Isomorphismus kann durch die Abbildung π_* aus Beispiel (27) realisiert werden, wobei $\pi : V \to V/W$ die natürliche Quotientenabbildung ist.

(64) Seien V und Z zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume und $W \subset V$ ein Teilraum. Zeige, dass man den Raum $L(V/W, Z)$ von linearen Abbildungen mit dem Teilraum

$$\{\varphi \in L(V, Z) : \varphi(w) = 0 \quad \forall w \in W\} \subset L(V, Z)$$

identifizieren kann.

Anleitung: Der Isomorphismus kann durch die Abbildung π^* aus Beispiel (28) realisiert werden, wobei $\pi : V \to V/W$ die natürliche Quotientenabbildung ist.

(65) Betrachte den Raum $\mathbb{R}[x]_n$ von Polynomen mit reellen Koeffizienten, und betrache $p \in \mathbb{R}[x]_n$ auch als Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathrm{ev}_t(p) := p(t)$ ein Element des Dualraumes $(\mathbb{R}[x]_n)^*$ definiert. Zeige weiters, dass für $n + 1$ paarweise verschiedene Punkte $t_0, \dots, t_n$ die Menge $\{\mathrm{ev}_{t_0}, \dots, \mathrm{ev}_{t_n}\}$ eine Basis für $(\mathbb{R}[x]_n)^*$ bildet. Interpretiere Abschnitt 4.12 der Vorlesung und Bespiel (61) unter Benutzung dieses Resultats.