11. Bruchringe und Quotientenkörper

Lemma 82: Es sei R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Teilmenge von R mit der Eigenschaft $0 \notin S$. Definiert man auf $S \times R$ die Relation $\sim$ durch

$$(s,a) \sim (t,b) \;:\Leftrightarrow\; ta = sb,$$

so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis: $(s,a) \sim (s,a) \,\forall (s,a) \in S \times R$, da $sa = sa$. Aus $(s,a) \sim (t,b)$ folgt $ta = sb$, d.h. $sb = ta$ und daher $(t,b) \sim (s,a)$. Gelten $(s,a) \sim (t,b)$ und $(t,b) \sim (u,c)$, so $ta = sb$ und $ub = tc$, woraus $tua = sub = stc$ folgt. Da $t \neq 0$ folgt wegen Lemma 50 $ua = sc$ und daher $(s,a) \sim (u,c)$.

Definition: Es sei R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Teilmenge von R mit der Eigenschaft $0 \notin S$. Man schreibt $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse bezüglich der Relation $\sim$ aus Lemma 82, in der (s,a) liegt. Für die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ (d.h. $(S \times R)/\sim$) schreibt man $S^{-1}R$.

Satz 83: Es sei R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Teilmenge von R mit der Eigenschaft $0 \notin S$.
(i) Definiert man auf $S^{-1}R$ die beiden Verknüpfungen

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{ta + sb}{st} \quad \text{und} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st},$$

so ist $(S^{-1}R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich. Dabei ist $\frac{a}{s} \in (S^{-1}R)^*$ wenn $a \in S$.
(ii) Ist $S = R \setminus \{0\}$, so ist $(S^{-1}R, +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis: (i) Wir zeigen zunächst, dass die beiden Verknüpfungen wohldefiniert sind. Sind

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \quad \text{und} \quad \frac{b}{t} = \frac{b'}{t'},$$

so folgen nach Definition $s'a = sa'$ und $t'b = tb'$. Daraus erhält man

$$s't'(ta + sb) = (s'a)(t't) + (t'b)(s's) = (sa')(t't) + (tb')(s's) = st(t'a' + s'b'),$$

d.h.

$$\frac{ta + sb}{st} = \frac{t'a' + s'b'}{s't'}$$

und
$$(s't')(ab) = (s'a)(t'b) = (sa')(tb') = (st)(a'b'),$$
d.h.
$$\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}.$$
Die Addition ist assoziativ, da
$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) + \frac{c}{u} = \frac{ta+sb}{st} + \frac{c}{u} = \frac{u(ta+sb)+(st)c}{stu} = \frac{tua+sub+stc}{stu}$$
$$= \frac{(tu)a+s(ub+tc)}{stu} = \frac{a}{s} + \frac{ub+tc}{tu} = \frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right).$$
Nullelement ist $\frac{0}{1}(= \frac{0}{s}\,\forall s \in S)$ und additives Inverses zu $\frac{a}{s}$ ist $\frac{-a}{s}$. Die Addition ist kommutativ, da
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st} = \frac{sb+ta}{ts} = \frac{b}{t} + \frac{a}{s}.$$
Die Multiplikation ist assoziativ, da
$$\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u} = \frac{(ab)c}{(st)u} = \frac{a(bc)}{s(tu)} = \frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right).$$
Einselement ist $\frac{1}{1}(= \frac{s}{s}\,\forall s \in S)$, wobei $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$, da $1 \neq 0$. Ist $a \in S$, so ist $\frac{s}{a}$ multiplikatives Inverses von $\frac{a}{s}$. Die Multiplikation ist kommutativ, da
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} = \frac{ba}{ts} = \frac{b}{t} \cdot \frac{a}{s}.$$
Die Distributivgesetze gelten, da
$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{ub+tc}{tu} = \frac{a(ub+tc)}{stu} = \frac{uab+tac}{stu} = \frac{s}{s} \cdot \frac{uab+tac}{stu}$$
$$= \frac{s(uab+tac)}{s(stu)} = \frac{suab+stac}{s^2tu} = \frac{ab}{st} + \frac{ac}{su} = \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} + \frac{a}{s} \cdot \frac{c}{u}$$
und die Multiplikation kommutativ ist. Aus $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{0}{1}$ folgt $\frac{ab}{st} = \frac{0}{1}$ und daher $ab = 0$. Daraus erhält man $a = 0$ oder $b = 0$ und somit
$$\frac{a}{s} = \frac{0}{s} = \frac{0}{1} \quad \text{oder} \quad \frac{b}{t} = \frac{0}{t} = \frac{0}{1},$$
d.h. $\frac{0}{1}$ ist der einzige Nullteiler in $S^{-1}R$.
(ii) Ist $S = R \setminus \{0\}$, so ist nach oben
$$\left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a, s \in R \setminus \{0\} \right\} \subseteq (S^{-1}R)^*,$$

d.h. mit Ausnahme des Nullelements $\frac{0}{1}$ besitzt jedes Element von $S^{-1}R$ ein multiplikatives Inverses und $S^{-1}R$ ist daher ein Körper.

Definition: Es sei R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Teilmenge von R mit der Eigenschaft $0 \notin S$. Den Ring $(S^{-1}R, +, \cdot)$ nennt man den Bruchring von R nach der Nennermenge S. Im Fall, dass $S = R \setminus \{0\}$, nennt man $S^{-1}R$ den Quotientenkörper von R und wir schreiben $Q(R)$ dafür.

Korollar 84: Es sei R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Teilmenge von R mit der Eigenschaft $0 \notin S$.
(i) Die Abbildung $\varphi : R \to S^{-1}R$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ ist ein Monomorphismus, der Einselemente aufeinander abbildet und $\varphi(S) \subseteq (S^{-1}R)^*$ erfüllt.
(ii) Ist $S \subseteq R^*$, so ist φ ein Isomorphismus.

Beweis: (i) Es ist
$$\varphi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \varphi(a) + \varphi(b)$$
und
$$\varphi(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \varphi(a)\varphi(b)$$
sowie
$$\varphi(1_R) = \frac{1_R}{1_R} = 1_{S^{-1}R}.$$
Für $s \in S$ ist $\varphi(s) = \frac{s}{1} \in (S^{-1}R)^*$, da auch $\frac{1}{s} \in S^{-1}R$ und $\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1}$.

(ii) Ist $a \in R$ und $s \in R^*$, so ist auch $s^{-1}a \in R$ und
$$\varphi\big(s^{-1}a\big) = \frac{s^{-1}a}{1} = \frac{s}{s} \cdot \frac{s^{-1}a}{1} = \frac{ss^{-1}a}{s} = \frac{a}{s}$$
und φ daher auch surjektiv.

Bemerkungen: 1) Aus Korollar 84 (i) folgt, dass man einen Integritätsbereich R stets in seinen Quotientenkörper $Q(R)$ einbetten kann. In der Regel identifiziert man dabei R mit $\varphi(R) \subseteq Q(R)$, d.h. man unterscheidet nicht zwischen $a \in R$ und $\frac{a}{1} \in \varphi(R) \subseteq Q(R)$.

2) Wendet man die Konstruktion des Quotientenkörpers auf einen Körper K an, so ist $S = K \setminus \{0\} = K^*$ und wegen Korollar 84 (ii) ist φ ein Isomorphismus, d.h. $Q(K) \cong K$. Insbesondere liefert mehrfache Anwendung der Quotientenkörperkonstruktion auf einen Integritätsbereich R nichts Neues, da $Q\big(Q(R)\big) \cong Q(R)$ gilt.

Beispiele: 1) Für $R = \mathbb{Z}$ erhält man als Quotientenkörper $Q(R) = \mathbb{Q}$.
2) Ist p eine Primzahl, $R = \mathbb{Z}$ und $S = \{p^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, so ist

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{p^\alpha} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

3) Ist p eine Primzahl, $R = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \setminus (p) = \{b \in \mathbb{Z} \mid p \nmid b\}$, so ist

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}.$$

4) Ist R ein Integritätsbereich und $s \in R \setminus \{0\}$, so ist $S = \{s^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ eine multiplikative Teilmenge von R und

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{s^n} \,\middle|\, a \in R, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

(Dieses Beispiel enthält Bsp. 2 als Spezialfall.)
5) Ist R ein Integritätsbereich und P ein Primideal von R, so ist $S = R \setminus P$ nach Satz 75 eine multiplikative Teilmenge von R und

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in R, b \in R \setminus P \right\}.$$

(Dieses Beispiel enthält Bsp. 3 als Spezialfall.)

Bemerkung: Ein Bruchring wie in Bsp. 5 wird Lokalisierung von R in P genannt.