14. Operationen von Gruppen auf Mengen

Definition: Man sagt, eine Gruppe G operiert auf einer Menge M, wenn es eine Abbildung $G \times M \to M$, $(a,x) \mapsto a \cdot x$ mit den folgenden beiden Eigenschaften gibt:

1) $e \cdot x = x \ \forall x \in M$,
2) $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \ \forall a, b \in G \ \forall x \in M$.

Bemerkungen: 1) Statt $a \cdot x$ schreibt man oft kurz ax.
2) Die Verknüpfung der Gruppe G und die Operation der Gruppe G auf der Menge M werden beide mit einem Punkt geschrieben, d.h. in Eigenschaft 2) in der Definition hat der Punkt zwei verschiedene Bedeutungen.
3) Eine Gruppe kann auf verschiedene Arten auf einer Menge operieren. Genau genommen müsste man noch die Operation in die Notation aufnehmen.

Lemma 106: Wenn die Gruppe G auf der Menge M operiert, ist die Abbildung

$$\tau_a : M \to M,\ x \mapsto ax$$

für alle $a \in G$ eine Bijektion.

Beweis: Aus

$$(\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a)(x) = a^{-1}(ax) = \big(a^{-1}a\big)x = ex = x \ \forall x \in M$$

folgt $\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = \mathrm{id}_M$. Völlig analog zeigt man $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \mathrm{id}_M$.

Satz 107: Die Gruppe G operiere auf der Menge M.

(i) Die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow \exists a \in G : ax = y$ ist eine Äquivalenzrelation auf M,
(ii) $\forall x \in M : G_x := \{a \in G \mid ax = x\}$ ist eine Untergruppe von G.

Beweis: (i) $ex = x \ \forall x \in M \Rightarrow x \sim x \ \forall x \in M$,
$x \sim y \Rightarrow \exists a \in G : ax = y \Rightarrow a^{-1}y = a^{-1}(ax) = \big(a^{-1}a\big)x = ex = x \Rightarrow y \sim x$,
$x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow \exists a, b \in G : ax = y, by = z \Rightarrow (ba)x = b(ax) = by = z \Rightarrow x \sim z$.
(ii) Gilt $a, b \in G_x$, so $ax = bx = x$ und daher $(ab)x = a(bx) = ax = x$, d.h. $ab \in G_x$.
Ist $a \in G_x$, so $ax = x$ und daher $a^{-1}x = a^{-1}(ax) = \big(a^{-1}a\big)x = ex = x$, d.h. $a^{-1} \in G_x$.

Definition: Operiert die Gruppe G auf der Menge M und ist $x \in M$, so wird

$$\mathcal{B}_x := \{ax \mid a \in G\} (\subseteq M)$$

die Bahn von x und

$$G_x = \{a \in G \mid ax = x\} (\leq G)$$

die Isotropiegruppe von x genannt.

Beispiele: 1) Die symmetrische Gruppe S_n operiert auf der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mittels $(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$.
2) Die Diedergruppe D_n operiert auf der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mittels $(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$ (bzw. D_n operiert auf den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, wenn man D_n mit der Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks identifiziert).
3) Ist G eine Gruppe und $H \leq G$, so operiert H auf G mittels $H \times G \to G$, $(h, x) \mapsto hx$ (d.h. durch Linkstranslation). Insbesondere operiert G auf sich selbst durch Linkstranslation.
4) Ist G eine Gruppe und $H \leq G$, so operiert H auf G mittels $H \times G \to G$, $(h, x) \mapsto hxh^{-1}$ (d.h. durch Konjugation). Insbesondere operiert G auf sich selbst durch Konjugation. Die Bahn $\{axa^{-1} \mid a \in G\}$ wird die Konjugationsklasse von $x \in G$ genannt. Man sagt, dass x und axa^{-1} zueinander konjugiert sind.
5) Ist G eine Gruppe und bezeichnet $\mathcal{U}_G$ die Menge der Untergruppen von G, so operiert G auf $\mathcal{U}_G$ mittels $G \times \mathcal{U}_G \to \mathcal{U}_G$, $(a, H) \mapsto aHa^{-1}$ (d.h. durch Konjugation). Die Bahn $\{aHa^{-1} \mid a \in G\}$ wird die Konjugationsklasse von $H \in \mathcal{U}_G$ genannt. Man sagt, die Untergruppen H und aHa^{-1} seien zueinander konjugiert.

Definition: Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$.

1) Ist $x \in G$, so wird $C_H(x) := \{a \in H \mid axa^{-1} = x\} = \{a \in H \mid ax = xa\}$ der Zentralisator von x in H genannt. Ist $H = G$, so wird $C_G(x)$ der Zentralisator von x genannt.
2) Ist $K \leq G$, so wird $N_H(K) := \{a \in H \mid aKa^{-1} = K\}$ der Normalisator von K in H genannt. Ist $H = G$, so wird $N_G(K)$ der Normalisator von K genannt.

Bemerkungen: 1) $C_H(x)$ ist die Isotropiegruppe für die Operation von H auf G durch Konjugation. Insbesondere folgt wegen Satz 107 (ii), dass $C_H(x) \leq H$.
2) $N_H(K)$ ist die Isotropiegruppe für die Operation von H auf $\mathcal{U}_G$ durch Konjugation. Insbesondere folgt wegen Satz 107 (ii), dass $N_H(K) \leq H$.
3) Offenbar gibt (nach der Definition des Normalteilers), dass $K \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(K) = G$.

Satz 108: Operiert die Gruppe G auf der Menge M und ist $x \in M$, so ist $|\mathcal{B}_x| = [G : G_x]$.

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{L}_x$ die Menge der Linksnebenklassen von G_x in G. Betrachte die Abbildung $\mathcal{L}_x \to \mathcal{B}_x$, $aG_x \mapsto ax$ (für $a \in G$). Da

$$ax = bx \Leftrightarrow a^{-1}bx = x \Leftrightarrow a^{-1}b \in G_x \Leftrightarrow aG_x = bG_x \text{ (für } a, b \in G)$$

ist diese Abbildung wohldefiniert und injektiv. Da sie trivialerweise surjektiv ist, folgt die Behauptung.

Definition: Operiert die Gruppe G auf der Menge M, so bezeichnet man ein $x \in M$ mit der Eigenschaft $ax = x \ \forall a \in G$ als Fixpunkt der Operation. Die Menge der Fixpunkte bezeichnet man mit

$$M^G := \{x \in M \mid ax = x \ \forall a \in G\} = \{x \in M \mid G_x = G\} = \big\{x \in M \mid \mathcal{B}_x = \{x\}\big\}.$$

Beispiele: 1) Für die Operation einer Gruppe G auf sich selbst durch Konjugation ist die Menge der Fixpunkte gerade

$$\big\{x \in G \mid axa^{-1} = x \ \forall a \in G\big\} = \big\{x \in G \mid ax = xa \ \forall a \in G\big\} = Z(G),$$

d.h. das Zentrum von G.
2) Für die Operation einer Gruppe G auf $\mathcal{U}_G$ durch Konjugation ist die Menge der Fixpunkte gerade die Menge der Normalteiler von G.

Satz 109: Die Gruppe G operiere auf der endlichen Menge M. Sind $x_1, \dots, x_n$ ein Repräsentantensystem für die Bahnen dieser Operation, so gilt

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} \big[G : G_{x_i}\big] = \big|M^G\big| + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ x_i \notin M^G}} \big[G : G_{x_i}\big].$$

Beweis: Wegen Satz 107 (i) bilden die Bahnen $\mathcal{B}_{x_1}, \dots, \mathcal{B}_{x_n}$ eine Partition von M. Daher ist

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{B}_{x_i}| \overset{\text{Satz 108}}{=} \sum_{i=1}^{n} \big[G : G_{x_i}\big].$$

Weil für $x_i \in M^G$ nach Definition $\mathcal{B}_{x_i} = \{x_i\}$ und daher $|\mathcal{B}_{x_i}| = \big[G : G_{x_i}\big] = 1$ folgt

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ x_i \in M^G}} \big[G : G_{x_i}\big] = \big|M^G\big|,$$

woraus sich sofort die zweite Gleichung ergibt.

Korollar 110 (Klassengleichung): Ist G eine endliche Gruppe und $x_1, \dots, x_n$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G, so ist

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ x_i \notin Z(G)}} \big[G : C_G(x_i)\big].$$

Beweis: Folgt sofort durch Anwendung von Satz 109 auf die Operation von G auf sich selbst durch Konjugation.