22. Zerfällungskörper eines Polynoms, algebraischer Abschluss eines Körpers

Satz 201: Es seien K ein Körper und $p \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom (d.h. ein irreduzibles Element von $K[X]$). Dann gibt es eine (endliche) Körpererweiterung L/K mit $[L:K] = \operatorname{grad} p$, derart dass p in L eine Nullstelle besitzt.

Beweis: Es sei $L := K[X]/(p)$. Nach Korollar 167 ist $K[X]$ ein Hauptidealbereich und nach Satz 132 (ii) ist (p) ein maximales Ideal von $K[X]$. Wegen Satz 77 ist L daher ein Körper. Es bezeichne $\pi : K[X] \to L$, $\pi(q) = q + (p)$ die übliche Projektion und $\overline{\pi} : K \to L$ ihre Einschränkung auf K. (Dabei ist die Abbildung $\overline{\pi}$ ebenfalls ein Ringhomomorphismus, da sie Verknüpfung der Homomorphismen $K \hookrightarrow K[X] \xrightarrow{\pi} L$ ist.) Nach Lemma 68 (i) ist $\ker \overline{\pi}$ ein Ideal von K, das wegen Korollar 81 (ii) entweder $\ker \overline{\pi} = \{0\}$ oder $\ker \overline{\pi} = K$ erfüllt. Wäre $\ker \overline{\pi} = K$, so wäre $\overline{\pi}$ die Nullabbildung, d.h. $\overline{\pi}(1) = 0_L = \overline{\pi}(0)$ oder $1 + (p) = (p)$. Daraus würde aber $1 \in (p)$ und damit $(p) = K[X]$ folgen, ein Widerspruch. Also ist $\ker \overline{\pi} = \{0\}$ und $\overline{\pi}$ injektiv (nach Lemma 68 (ii)). D.h. $\overline{\pi}$ bettet K in L ein und man kann K als Teilkörper von L auffassen. Ist

$$p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad (\text{mit } a_n \neq 0),$$

so kann man p daher auch als Polynom

$$\sum_{i=0}^{n} \big(a_i + (p)\big) X^i \in L[X]$$

auffassen. Als solches besitzt p die Nullstelle $b := X + (p) \in L$, denn

$$\begin{aligned} p(b) = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i &= \sum_{i=0}^{n} \big(a_i + (p)\big)\big(X + (p)\big)^i = \sum_{i=0}^{n} \big(a_i + (p)\big)\big(X^i + (p)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \big(a_i X^i + (p)\big) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i + (p) = (p) = 0_L \end{aligned}$$

ist das Nullelement von L. Da p in $K[X]$ irreduzibel ist, ist $a_n^{-1} p = m_{b,K}$, wobei klarerweise $\operatorname{grad}(a_n^{-1} p) = \operatorname{grad} p$ gilt. Nun folgen $L = K[X]/(p) = K[X]/(m_{b,K}) \cong K(b)$ und

$$[L:K] = [K(b):K] = \operatorname{grad} m_{b,K} = \operatorname{grad} p$$

aus Satz 197.

Korollar 202: Es sei K ein Körper und $p \in K[X] \setminus K$. Dann gibt es eine Körpererweiterung L/K mit $[L:K] \leq \operatorname{grad} p$, derart dass p in L eine Nullstelle besitzt.

Beweis: Nach Korollar 160 kann p als Produkt irreduzibler Polynome $p_1, \dots, p_n \in K[X]$ geschreiben werden, d.h. $p = p_1 \cdots p_n$. Nach Satz 201 gibt es eine Körpererweiterung L/K mit $[L : K] = \operatorname{grad} p_1 \leq \operatorname{grad} p$, derart dass p_1 (und daher auch p) in L eine Nullstelle besitzt.

Definition: Es sei K ein Körper und $p \in K[X] \setminus K$. Ein Erweiterungskörper L von K heißt Zerfällungskörper von p, wenn er die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1) p zerfällt über L in Linearfaktoren, d.h.

$$\exists a_1, \dots, a_n \in L \;\; \exists c \in K : p(X) = c(X - a_1) \cdots (X - a_n),$$

2) $L = K(a_1, \dots, a_n)$.

Satz 203: Es sei K ein Körper und $p \in K[X] \setminus K$. Dann gibt es einen Zerfällungskörper L von p mit $[L : K] \leq (\operatorname{grad} p)!$.

Beweis: Wir verwenden Induktion nach $n := \operatorname{grad} p$.
Ist $n = 1$, so ist $p(X) = aX + b$ mit $a, b \in K$ und $a \neq 0$. Dann besitzt p die (einzige) Nullstelle $-a^{-1}b \in K$. Offenbar ist K Zerfällungskörper von p, dann $p(X) = a(X + a^{-1}b)$ und $K = K(-a^{-1}b)$. Schließlich ist $[K : K] = 1 \leq 1!$.
Es sei nun $n > 1$. Nach Korollar 202 gibt es eine Körpererweiterung L_1/K mit der Eigenschaft $[L_1 : K] \leq n$ und ein $a_1 \in L_1$, das Nullstelle von p ist. Da $K(a_1) \subseteq L_1$, folgt (nach einem Resultat aus der Linearen Algebra) $[K(a_1) : K] \leq [L_1 : K] \leq n$. Man kann daher o.B.d.A. $L_1 = K(a_1)$ wählen. Wegen Satz 168 (i) gibt es ein $q \in L_1[X]$ mit der Eigenschaft $p(X) = (X - a_1)q(X)$, woraus $\operatorname{grad} q = n - 1$ folgt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Erweiterungskörper L von L_1, der Zerfällungskörper von q ist. D.h.

$$\exists a_2, \dots, a_n \in L \;\; \exists c \in L_1 : q(X) = c(X - a_2) \cdots (X - a_n)$$

und $L = L_1(a_2, \dots, a_n)$. Weiters muss $[L : L_1] \leq (n - 1)!$ gelten. Es folgt

$$p(X) = (X - a_1)q(X) = c(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n)$$

(woraus man sofort $c \in K$ erhält) und

$$L = L_1(a_2, \dots, a_n) = K(a_1)(a_2, \dots, a_n) = K(a_1, \dots, a_n).$$

Schließlich ist $[L : K] = [L : L_1] \cdot [L_1 : K] \leq (n - 1)! \cdot n = n!$.

Beispiele: 1) Es sei $K = \mathbb{Q}$ und $p(X) = X^2 + 1 \in K[X]$. Dann ist $\mathbb{Q}(i)$ Zerfällungskörper von p, denn $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ und $\mathbb{Q}(i, -i) = \mathbb{Q}(i)$.
2) Es sei $K = \mathbb{R}$ und $p(X) = X^2 + 1 \in K[X]$. Dann ist $\mathbb{C}$ Zerfällungskörper von p, denn $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ und $\mathbb{R}(i, -i) = \mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$.
3) Es sei $K = \mathbb{Q}$ und $p(X) = X^2 - 2 \in K[X]$. Dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ Zerfällungskörper von p, denn $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

4) Es sei $K = \mathbb{R}$ und $p(X) = X^2 - 2 \in K[X]$. Dann ist $\mathbb{R}$ Zerfällungskörper von p, denn $X^2 - 2 = \big(X - \sqrt{2}\big)\big(X + \sqrt{2}\big)$ und $\mathbb{R}\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \mathbb{R}$.
5) Es sei $K = \mathbb{Q}$ und $p(X) = (X^2+1)(X^2-2) \in K[X]$. Dann ist $\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}, i\big)$ Zerfällungskörper von p, dann $p(X) = (X+i)(X-i)(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i, -i\big) = \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}, i\big)$.

Bemerkung: Die Beispiele 1) bis 4) oben zeigen, dass der Zerfällungskörper eines Polynoms $p \in K[X]$ nicht nur vom Polynom p, sondern auch vom Körper K abhängt.

Lemma 204: Es seien K und L Körper und $\varphi : K \to L$ ein Isomorphismus. Dann ist die Abbildung $\overline{\varphi} : K[X] \to L[X]$, $\overline{\varphi}(p) = p^\varphi$, d.h.

$$\overline{\varphi}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) X^i,$$

ebenfalls ein Isomorphismus (der φ fortsetzt). (Die Bezeichnung p^φ wurde unmittelbar nach Korollar 165 eingeführt.)

Beweis: In Korollar 165 wurde bewiesen, dass $\overline{\varphi}$ ebenfalls ein Homomorphismus ist, der φ fortsetzt. Da $\varphi^{-1} : L \to K$ ebenfalls ein Isomorphismus ist, ist auch die Abbildung $L[X] \to K[X]$, $p \mapsto p^{\varphi^{-1}}$ ein Homomorphismus. Dieser ist zu $\overline{\varphi}$ invers ist, denn

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi^{-1}\big(\varphi(a_i)\big) X^i = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi\big(\varphi^{-1}(b_i)\big) X^i = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i.$$

Daher ist $\overline{\varphi}$ bijektiv.

Satz 205: Es seien K und L Körper, $\varphi : K \to L$ ein Isomorphismus und $p \in K[X]$ irreduzibel. Ist a Nullstelle von p (in einem Erweiterungskörper von K) und b Nullstelle von p^φ (in einem Erweiterungskörper von L), so gibt es einen Isomorphismus $\widetilde{\varphi} : K(a) \to L(b)$ mit der Eigenschaft $\widetilde{\varphi}(a) = b$, der φ fortsetzt (d.h. $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)\ \forall x \in K$).

Beweis: Es bezeichne $\operatorname{grad} p = n$.
Ist $n = 1$, so ist $p(X) = \alpha_1 X + \alpha_0$ mit $\alpha_1, \alpha_0 \in K$ und $\alpha_1 \neq 0$. Daher ist $a = -\alpha_1^{-1}\alpha_0$ und $p^\varphi(X) = \varphi(\alpha_1)X + \varphi(\alpha_0)$ und daher

$$b = -\varphi(\alpha_1)^{-1}\varphi(\alpha_0) = \varphi(-\alpha_1^{-1}\alpha_0) = \varphi(a).$$

D.h. man kann $\widetilde{\varphi} = \varphi$ wählen.

Es sei nun $n > 1$. Dann ist $a \notin K$ und nach Satz 197 ist $1, a, \ldots, a^{n-1}$ eine Basis von $K(a)$ als K-Vektorraum. Es sei nun $\widetilde{\varphi} : K(a) \to L(b)$, $\widetilde{\varphi}\big(f(a)\big) = f^{\varphi}(b)$. Dabei ist $f \in K[X]$ mit $\operatorname{grad} f < n$ und

$$\widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha_i) b^i$$

mit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$. Wir zeigen nun, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Homomorphismus ist. Es seien $f_1, f_2 \in K[X]$ mit $\operatorname{grad} f_1 < n$ und $\operatorname{grad} f_2 < n$. Dann ist

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}\big(f_1(a) + f_2(a)\big) &= \widetilde{\varphi}\big((f_1 + f_2)(a)\big) = (f_1 + f_2)^{\varphi}(b) \\ &= (f_1^{\varphi} + f_2^{\varphi})(b) = f_1^{\varphi}(b) + f_2^{\varphi}(b) = \widetilde{\varphi}\big(f_1(a)\big) + \widetilde{\varphi}\big(f_2(a)\big).\end{aligned}$$

Weiters existieren $q, r \in K[X]$ mit den Eigenschaften $f_1 \cdot f_2 = qp + r$ und $\operatorname{grad} r < n$. Es folgt $(f_1 \cdot f_2)(a) = q(a)p(a) + r(a) = r(a)$ und

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}\big(f_1(a)f_2(a)\big) &= \widetilde{\varphi}\big(r(a)\big) = r^{\varphi}(b) = (f_1 f_2 - qp)^{\varphi}(b) = (f_1^{\varphi} f_2^{\varphi} - q^{\varphi} p^{\varphi})(b) \\ &= f_1^{\varphi}(b) f_2^{\varphi}(b) - q^{\varphi}(b) p^{\varphi}(b) = f_1^{\varphi}(b) f_2^{\varphi}(b) = \widetilde{\varphi}\big(f_1(a)\big)\widetilde{\varphi}\big(f_2(a)\big).\end{aligned}$$

Da p irreduzibel ist und $\overline{\varphi} : K[X] \to L[X]$ ein Isomorphismus ist (was in Lemma 204 bewiesen wurde), ist $\overline{\varphi}(p) = p^{\varphi} \in L[X]$ irreduzibel und $\operatorname{grad} p^{\varphi} = \operatorname{grad} p = n$. Daher ist $1, b, \ldots, b^{n-1}$ eine Basis von $L(b)$ als L-Vektorraum. Da auch $\varphi^{-1} : L \to K$ ein Isomorphismus ist, ist auch die Abbildung $\widetilde{\varphi^{-1}} : L(b) \to K(a)$, $\widetilde{\varphi^{-1}}\big(f(b)\big) = f^{\varphi^{-1}}(a)$ ein Homomorphismus, der zu $\widetilde{\varphi}$ invers ist, d.h. $\widetilde{\varphi}$ ist bijektiv.

Korollar 206: Ist K ein Körper, $p \in K[X]$ irreduzibel und a, b zwei Nullstellen von p (in einem Erweiterungskörper von K), so gibt es einen Isomorphismus $\varphi : K(a) \to K(b)$ mit den Eigenschaften $\varphi(x) = x \ \forall x \in K$ und $\varphi(a) = b$.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 205 (wobei φ eine Fortsetzung von $\mathrm{id}_K : K \to K$ ist).

Beispiele: 1) Es sei $K = \mathbb{Q}$. Dann ist $p(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel mit Nullstellen $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(-\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ (mit $a, b \in \mathbb{Q}$) ist ein Isomorphismus, der die Bedingungen von Korollar 206 erfüllt.
2) Es sei $K = \mathbb{Q}$. Dann ist $p(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel und besitzt die drei Nullstellen $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\, e^{2\pi i/3}, \sqrt[3]{2}\, e^{4\pi i/3} \in \mathbb{C}$. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}\big) \to \mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}\, e^{2\pi i/3}\big),\ \varphi\big(a + \sqrt[3]{2} b + \sqrt[3]{4} c\big) = a + \sqrt[3]{2}\, e^{2\pi i/3} b + \sqrt[3]{4}\, e^{4\pi i/3} c$$

(mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$) ist ein Isomorphismus, der die Bedingungen von Korollar 206 erfüllt.

Satz 207: Es seien K und L Körper, $\varphi : K \to L$ ein Isomorphismus und $p \in K[X] \setminus K$. Ist $\widetilde{K}$ ein Zerfällungskörper von $p (\in K[X])$ und $\widetilde{L}$ ein Zerfällungskörper von $p^{\varphi} \in L[X]$, so gibt es einen Isomorphismus $\Phi : \widetilde{K} \to \widetilde{L}$, der $\varphi : K \to L$ fortsetzt (d.h. $\Phi(x) = \varphi(x) \ \forall x \in K$).

Beweis: Wir verwenden Induktion nach $n := \bigl[\widetilde{K} : K\bigr]$.
Ist $n = 1$, so ist $\widetilde{K} = K$ und p zerfällt über K in Linearfaktoren, d.h.

$$\exists c, a_1, \dots, a_m \in K : p(X) = c(X - a_1) \cdots (X - a_m).$$

Daher ist

$$p^\varphi(X) = \varphi(c)\bigl(X - \varphi(a_1)\bigr) \cdots \bigl(X - \varphi(a_m)\bigr),$$

d.h. p^φ zerfällt über L in Linearfaktoren, $\widetilde{L} = L$ und man kann $\Phi = \varphi$ setzen.
Es sei nun $n > 1$ und der Satz für $\bigl[\widetilde{K} : K\bigr] < n$ bereits bewiesen. Nach Voraussetzung besitzt p eine Nullstelle $a \in \widetilde{K} \setminus K$. Dann besitzt p einen irreduziblen Faktor $q \in K[X]$, der a als Nullstelle besitzt (d.h. $q(a) = 0$). Es sei $r \in K[X]$ derart dass $p = qr$. Dann ist $p^\varphi = q^\varphi r^\varphi$ und $q^\varphi \in L[X]$ ist irreduzibel. Es sei $b \in \widetilde{L}$ eine Nullstelle von q^φ. Nach Satz 205 gibt es einen Isomorphismus $\widetilde{\varphi} : K(a) \to L(b)$ mit den Eigenschaften $\widetilde{\varphi}(a) = b$ und $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)\ \forall x \in K$. Nun ist $\widetilde{K}$ auch Zerfällungskörper von p als Element von $K(a)[X]$ und $\widetilde{L}$ Zerfällungskörper von p^φ als Element von $L(b)[X]$. Da $a \notin K$ ist $[K(a) : K] > 1$ und

$$\bigl[\widetilde{K} : K(a)\bigr] = \frac{\bigl[\widetilde{K} : K\bigr]}{[K(a) : K]} = \frac{n}{[K(a) : K]} < n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung kann $\widetilde{\varphi} : K(a) \to L(b)$ zu einem Isomorphismus $\Phi : \widetilde{K} \to \widetilde{L}$ mit $\Phi(x) = \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)\ \forall x \in K$ fortgesetzt werden.

Korollar 208: Es sei K ein Körper, $p \in K[X] \setminus K$ und L_1 und L_2 zwei Zerfällungskörper von p. Dann gibt es einen Isomorphismus $\Phi : L_1 \to L_2$ mit $\Phi(x) = x\ \forall x \in K$. (Insbesondere ist der Zerfällungskörper eines Polynoms bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.)

Beweis: Folgt sofort aus Satz 207 (wobei Φ Fortsetzung von $\mathrm{id}_K : K \to K$ ist).

Satz 209: Es sei K ein Körper. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Jedes Polynom $p \in K[X] \setminus K$ besitzt eine Nullstelle in K.
(ii) Jedes Polynom $p \in K[X] \setminus K$ zerfällt über K in Linearfaktoren.
(iii) Die normierten irreduziblen Polynome in $K[X]$ sind genau die Polynome der Gestalt $X - a$ (mit $a \in K$).
(iv) Ist L/K eine algebraische Körpererweiterung, so ist $L = K$.
(v) Ist L/K eine endliche Körpererweiterung, so ist $L = K$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Wir verwenden Induktion nach $n = \operatorname{grad} p$.
Ist $n = 1$, so ist $p(X) = aX + b$ mit $a, b \in K$, $a \neq 0$ und daher $p(X) = a(X + a^{-1}b)$, d.h. p zerfällt in Linearfaktoren. Ist $n > 1$, so besitzt p eine Nullstelle $c \in K$. Daher $\exists q \in K[X] : p(X) = (X - c)q(X)$ mit $\operatorname{grad} q = n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung zerfällt q in Linearfaktoren. Daraus folgt sofort, dass auch p in Linearfaktoren zerfällt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist $p \in K[X]$ und $\operatorname{grad} p > 1$, so zerfällt p in mindestens zwei Linearfaktoren und ist daher reduzibel. Ist $\operatorname{grad} p = 1$, so ist p nach Lemma 177 (ii) irreduzibel. D.h. die normierten irreduziblen Polynome in $K[X]$ haben genau die Gestalt $X - a$ für ein $a \in K$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Es sei $a \in L$. Dann ist a algebraisch über K und $m_{a,K} \in K[X]$ ist irreduzibel und normiert und besitzt a als Nullstelle. Daher ist $m_{a,K}(X) = X - a \in K[X]$ und somit $a \in K$.
(iv) $\Rightarrow$ (v) Folgt sofort aus Satz 198 (i).
(v) $\Rightarrow$ (i) Jedes Polynom $p \in K[X] \setminus K$ besitzt nach Korollar 202 eine Nullstelle a in einem Erweiterungskörper L von K mit $[L : K] \leq \operatorname{grad} p$. D.h. L/K ist eine endliche Körpererweiterung und daher $L = K$. Also ist $a \in K$ Nullstelle von p.

Definition: Ein Körper K, der eine (und damit alle) der Bedingungen aus Satz 209 erfüllt, wird algebraisch abgeschlossen genannt.

Beispiele: 1) $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen nach dem Fundamentalsatz der Algebra.
2) $\mathbb{R}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, da $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.
3) $\mathbb{Q}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, da $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ besitzt.
4) $\mathbb{Z}_2$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, da $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ keine Nullstelle in $\mathbb{Z}_2$ besitzt.
5) Allgemein gilt: Ist K ein endlicher Körper, so ist K nicht algebraisch abgeschlossen. Ist nämlich $K = \{a_1, \ldots, a_n\}$, so besitzt
$$(X - a_1) \cdots (X - a_n) + 1 \in K[X]$$
keine Nullstelle in K.

Definition: Ein Körper $\overline{K}$ heißt algebraischer Abschluss eines Körpers K, wenn $\overline{K}/K$ eine algebraische Körpererweiterung ist und $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Beispiel: $\mathbb{C}$ ist algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$.

Satz 210: Jeder Körper K besitzt eine algebraischen Abschluss.

Beweis: Wähle eine überabzählbare Menge S mit der Eigenschaft $K \subseteq S$ und $|S| > |K|$. Auf der Menge
$$\mathcal{A} = \{L \mid K \subseteq L \subseteq S, L/K \text{ ist eine algebraische Körpererweiterung}\}$$
führt man die folgende Ordnung ein: Es sei $L_1 \leq L_2$ wenn L_2/L_1 eine Körpererweiterung ist. Es ist $\mathcal{A} \neq \varnothing$ (da $K \in \mathcal{A}$) und durch $\leq$ ist auf $\mathcal{A}$ eine partielle Ordnung gegeben. Ist $(L_i)_{i\geq 1}$ eine aufsteigende Kette von Elementen von $\mathcal{A}$, so ist
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \in \mathcal{A}$$

eine obere Schranke dieser Kette. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathcal{A}$ ein maximales Element $\overline{K}$. Wir behaupten, dass $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Wäre $\overline{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen, so würde es ein $p \in \overline{K}[X] \setminus \overline{K}$ geben, das keine Nullstelle in $\overline{K}$ besitzt. Nach Korollar 202 gibt es eine algebraische Körpererweiterung $L_0/\overline{K}$, derart dass p in L_0 eine Nullstelle a besitzt. Dabei gilt $\overline{K} \subsetneqq L_0$ und man kann (wegen der Kardinalität von S) verlangen, dass $L_0 \subseteq S$. Dann ist $\overline{K}(a)/\overline{K}$ eine algebraische Körpererweiterung und wegen Satz 199 ist auch $\overline{K}(a)/K$ eine algebraische Körpererweiterung. Da $\left[\overline{K}(a) : \overline{K}\right] > 1$ widerspricht das der Maximalität von $\overline{K}$.

Satz 211: Es sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, A ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\varphi : K \to A$ ein Monomorphismus. Dann gibt es einen Homomorphismus $\psi : L \to A$, der φ fortsetzt.

Beweis: Wir führen auf der Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} = \{(M, \psi) \mid\ & M \text{ ist Zwischenkörper der Körpererweiterung } L/K,\\ & \psi : M \to A \text{ ist Homomorphismus und setzt } \varphi \text{ fort}\}\end{aligned}$$

die folgende Ordnung ein: Es sei $(M_1, \psi_1) \leq (M_2, \psi_2)$ wenn M_2/M_1 eine Körpererweiterung ist und ψ_2 die Abbildung ψ_1 fortsetzt. Dann ist $\mathcal{Z} \neq \varnothing$ (da $(K, \varphi) \in \mathcal{Z}$) und durch $\leq$ ist auf $\mathcal{Z}$ eine partielle Ordnung gegeben. Ist $\big((M_i, \psi_i)\big)_{i\geq 1}$ eine aufsteigenden Kette von Elementen von $\mathcal{Z}$, so ist

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, \overline{\psi}\right) \in \mathcal{Z}$$

eine obere Schranke dieser Kette. (Dabei ist $\overline{\psi}(x) = \psi_i(x)$ für $x \in M_i$.) Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathcal{Z}$ ein maximales Element $(M_0, \psi_0) \in \mathcal{Z}$. Wir behaupten, dass $M_0 = L$ gelten muss. Wäre das nicht so, gäbe es ein $a \in L \setminus M_0$. Dann ist $M_0(a)$ Zwischenkörper der Körpererweiterung L/M_0 (und daher der Körpererweiterung L/K). Nach Satz 205 gäbe es einen Homomorphismus $\widetilde{\psi} : M_0(a) \to A$, der ψ_0 von M_0 auf $M_0(a)$ fortsetzt (und daher auch φ von K auf $M_0(a)$ fortsetzt). Also wäre $\big(M_0(a), \widetilde{\psi}\big) \in \mathcal{Z}$, was der Maximalität von (M_0, ψ_0) widerspricht.

Korollar 212: Es seien K und L zwei Körper, $\varphi : K \to L$ ein Isomorphismus, $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von L. Dann gibt es einen Isomorphismus $\psi : \overline{K} \to \overline{L}$, der φ fortsetzt.

Beweis: Nach Satz 211 gibt es eine Homomorphismus $\psi : \overline{K} \to \overline{L}$, der φ fortsetzt. Daher ist $\psi\big(\overline{K}\big)$ ein algebraisch abgeschlossener Zwischenkörper der algebraischen Körpererweiterung $\overline{L}/L$. Daher ist $\overline{L}/\psi\big(\overline{K}\big)$ eine algebraische Körpererweiterung. Nach Satz 209 ist $\overline{L} = \psi\big(\overline{K}\big)$, d.h. ψ ist ein Isomorphismus.

Korollar 213: Es sei K ein Körper und L_1 und L_2 zwei algebraische Abschlüsse von K. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi : L_1 \to L_2$ mit der Eigenschaft $\varphi(x) = x \; \forall x \in K$. (D.h. der algebraische Abschluss eines Körpers ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.)

Beweis: Das ist ein Spezialfall von Korollar 212 (in dem φ die Abbildung $\mathrm{id}_K : K \to K$ fortsetzt).