1. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

1.1. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Wir werden in dieser Vorlesung voraussetzen (und so tun, als wäre das alles selbstverständlich):

1) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ und ihre Addition und Multiplikation. Jede Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ besitzt ein kleinstes Element (dh $\min A$ existiert).

2) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ bilden mit ihrer Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselement, der nullteilerfrei ist (dh sind $x, y \in \mathbb{Z}$ und $x \cdot y = 0$, so muss $x = 0$ oder $y = 0$ gelten).

3) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Dabei kann man jedes Element von $\mathbb{Q}$ auf unendlich viele verschiedene Arten schreiben (zB $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots = \frac{-2}{-3} = \dots$). Man kann aber immer verlangen, dass $b > 0$ und dass $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ (dh der Bruch kann nicht weiter gekürzt werden). Die rationalen Zahlen bilden mit ihrer Addition und Multiplikation einen Körper.

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Analysis auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die aber viel weniger anschaulich sind als $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Wir werden uns darum kurz mit $\mathbb{Q}$ beschäftigen und wie man $\mathbb{R}$ ausgehend von $\mathbb{Q}$ konstruieren kann.

<u>Def.</u>: Es sei $K (\neq \emptyset)$ eine Menge und $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf K (dh zwei Abbildungen $+ : K \times K \to K$, $(a, b) \mapsto a + b$ und $\cdot : K \times K \to K$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$), die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(1.1) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K$ (Assoziativität der Addition)

(1.2) $\exists 0 \in K \;\; \forall a \in K : a + 0 = 0 + a = a$ (Existenz des Nullelements)

(1.3) $\forall a \in K \;\; \exists -a \in K : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (Existenz des additiven Inversen)

(1.4) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$ (Kommutativität der Addition)

(2.1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$ (Assoziativität der Multiplikation)

(2.2) $\exists 1 \in K$ (wobei $1 \neq 0$) $\forall a \in K : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (Existenz des Einselements)

(2.3) $\forall a \in K \setminus \{0\} \;\; \exists \frac{1}{a} \in K : a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ (Existenz des multiplikativen Inversen)

(2.4) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K$ (Kommutativität der Multiplikation)

$$\left.\begin{array}{ll} (3.1) & a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K \\ (3.2) & (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K \end{array}\right\} \text{(Distributivgesetze)}$$

Dann wird $(K, +, \cdot)$ ein Körper genannt.

Aus diesen Körperaxiomen kann man ableiten, dass man mit den Körperelementen „rechnen kann wie man es gewohnt ist und erwartet" (z. B. für $\mathbb{Q}$).

Wir stellen einige wichtige Folgerungen zusammen:

1) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in K$ (Aus $0 \cdot a \overset{(1.2)}{=} (0+0) \cdot a \overset{(3.2)}{=} (0 \cdot a) + (0 \cdot a)$ folgt durch Addition von $-(0 \cdot a)$ auf beiden Seiten

$$0 \overset{(1.3)}{=} -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) = -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) + (0 \cdot a) = 0 \cdot a.)$$

2) Das Nullelement ist eindeutig bestimmt (Angenommen, 0^* ist ebenfalls Nullelement, d.h. $a + 0^* = 0^* + a = a \ \forall a \in K$. Dann ist $0 = 0 + 0^* = 0^* + 0 = 0^*$.)

3) Zu gegebenem $a \in K$ ist das additive Inverse eindeutig bestimmt (Angenommen, $a^* \in K$ ist ebenfalls additives Inverses zu a, d.h. $a + a^* = a^* + a = 0$. Dann ist $-a = -a + 0 = -a + (a + a^*) = (-a + a) + a^* = 0 + a^* = a^*$.)

4) Das Einselement ist eindeutig bestimmt. (Übung)

5) Zu gegebenem $a \in K \setminus \{0\}$ ist das multiplikative Inverse eindeutig bestimmt (Übung)

6) Zu gegebenem $a, b \in K$ gibt es genau ein $x \in K$ mit der Eigenschaft $a + x = b$

(Existenz: Es sei $x = (-a) + b$. Dann ist

$$a + x = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Eindeutigkeit: Angenommen, $a + x_1 = b$ und $a + x_2 = b$ für gewisse $x_1, x_2 \in K$. Dann ist

$$x_1 = 0 + x_1 = ((-a) + a) + x_1 = (-a) + (a + x_1) = (-a) + (a + x_2) = ((-a) + a) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.)$$

<u>Def.</u>: Für die eindeutig bestimmte Zahl $x \, (= (-a) + b)$ mit der Eigenschaft $a + x = b$ schreibt man kurz $x = b - a$. Diese Zahl $b - a$ wird Differenz von b und a genannt.

7) Zu $a, b \in K$, $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in K$ mit der Eigenschaft $ax = b$ (Übung)

<u>Def.</u>: Für die eindeutig bestimmte Zahl $x \in K$ mit der Eigenschaft $a \cdot x = b$ (wobei $a \neq 0$) schreibt man kurz $x = \frac{b}{a}$ (oder auch $x = b/a$) und nennt sie Quotient von b und a.

<u>Bemerkung</u>: Diese Bezeichnung ist konsistent mit der Notation $\frac{1}{a}$, die sie erweitert. Es ist ja $x = \frac{1}{a}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a \cdot x = 1$.

8) Wenn $a \cdot b = 0$ dann $a = 0$ oder $b = 0$. (Falls $a = 0$ fertig. Falls $a \neq 0$, so $b = 1 \cdot b = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$.)

9) $-(-a) = a \quad \forall a \in K$ (Es gelten $a + (-a) = (-a) + a = 0$ und $(-(-a)) + (-a) = (-a) + (-(-a)) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit des additiven Inversen von $-a$ (d.h. von $-(-a)$) folgt $-(-a) = a$.)

10) $\frac{1}{1/a} = a \quad \forall a \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

11) $-(a+b) = (-a) + (-b) \quad \forall a, b \in K$ (Es gelten

$$(a+b) + ((-a) + (-b)) = ((-a) + (-b)) + (a+b) = 0$$

und $(a+b) + (-(a+b)) = (-(a+b)) + (a+b) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit des additiven Inversen von $a+b$ (d.h. von $-(a+b)$) folgt $-(a+b) = (-a) + (-b)$).

12) $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \quad \forall a, b \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

13) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \quad \forall a, b \in K$

(Wir zeigen $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$: Es gelten

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0 \quad \text{und} \quad a \cdot b + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit des additiven Inversen von $a \cdot b$ (d.h. von $-(a \cdot b)$) folgt $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Beweis von $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ als Übung.)

14) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \forall a, c \in K \quad \forall b, d \in K \setminus \{0\}$

15) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \forall a, c \in K \quad \forall b, d \in K \setminus \{0\}$

16) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc} \quad \forall a \in K \quad \forall b, c, d \in K \setminus \{0\}$

17) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \forall a, c \in K \quad \forall b, d \in K \setminus \{0\}$

(Übung)

Bemerkungen: 1) Wir haben einerseits $\mathbb{Q}$ als Menge der Quotienten $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ definiert und andererseits Quotienten $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in K$, $b \neq 0$ aufgrund von Folgerung 7) definiert. Dadurch entstehen keine Probleme. (Es ist ja z.B. $x = \frac{3}{4}$ tatsächlich jene rationale Zahl mit der Eigenschaft $4x = 3$.)

2) Es gibt außer $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ noch viele andere Körper K (d.h. Mengen mit zwei Verknüpfungen, die die Körperaxiome erfüllen). Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2$, der nur die Elemente 0 und 1 enthält mit den Verknüpfungen

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

3) Es stellt sich die Frage, warum man all diesen Aufwand betreibt, wenn man am Schluss doch nur erhält, „dass man rechnen kann, wie man es kennt und weiß?" Einerseits beruht dieses „Kennen und Wissen" zunächst nur auf Gewohnheit und lässt außer Acht, wie die verschiedenen Rechenregeln zusammenhängen. Andererseits hat diese Vorgangsweise den großen Vorteil, dass man, sobald man überprüft hat, dass K ein Körper ist, weiß, dass <u>alle Folgerungen für K ebenfalls gelten!</u>

Auf $K = \mathbb{Q}$ ist eine Ordnungsrelation $<$ definiert, die die folgenden Ordnungsaxiome erfüllt:

(4.1) Für $a, b \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen
$a < b$, $b < a$ oder $a = b$ (Trichotomie)

(4.2) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (Transitivität)

(4.3) Wenn $a < b$ und $c \in K$ dann $a + c < b + c$

(4.4) Wenn $a < b$ und $0 < c$ dann $a \cdot c < b \cdot c$

<u>Def.</u>: Zusätzlich legt man die folgenden Schreibweisen fest:

1) $a > b \;:\Longleftrightarrow\; b < a$

2) $a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; a < b$ oder $a = b$

3) $a \geq b \;:\Longleftrightarrow\; a > b$ oder $a = b$

Auch hier stellen wir einige wichtige Folgerungen zusammen:

1) $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$ $\quad(a > 0 \Longrightarrow 0 = a + (-a) > 0 + (-a) = -a$ und
$-a < 0 \Longrightarrow 0 = -a + a < 0 + a = a)$

2) $a < 0 \Longleftrightarrow -a > 0$ (Das folgt aus 1.) wenn man a durch $-a$ ersetzt und $-(-a) = a$ benützt.)

3) Wenn $a<b$ und $c<0$ dann $a\cdot c > b\cdot c$ (Wegen 2) ist $-c>0$. Aus (4.4) folgt $-a\cdot c = a\cdot(-c) < b(-c) = -bc$ und daher

$bc = -ac + (ac+bc) < -bc + (ac+bc) = ac$.)

4) Wenn $a\neq 0$ dann $a\cdot a>0$. (Ist $a>0$, so ist $a\cdot a > a\cdot 0 = 0$.
Ist $a<0$, so ist $-a>0$ und $a\cdot a = (-(-a))\cdot a = -((-a)\cdot a) = (-a)\cdot(-a) > 0$.)

5) $1>0$ (Denn $1\neq 0$ und $1 = 1\cdot 1 > 0$.) 1.3.2021

6) Wenn $a>0$ dann $\frac{1}{a}>0$. (Wäre $\frac{1}{a}=0$, so wäre $1 = a\cdot\frac{1}{a} = 0$, Wid.
Wäre $\frac{1}{a}<0$, so wäre $1 = \frac{1}{a}\cdot a < 0\cdot a = 0$, Wid.)

7) Wenn $a<b$ und $c<d$ dann $a+c<b+d$ (Denn $a+c<b+c<b+d$.)

8) Wenn $0<a<b$ und $0<c<d$ dann $a\cdot c<b\cdot d$ (Denn $ac<bc<bd$.)

9) Wenn $a,b>0$ (dh $a>0$ und $b>0$) dann $a+b>0$ und $ab>0$.

10) Wenn $a,b<0$ dann $a+b<0$ und $ab>0$

11) Wenn $a\cdot b>0$ dann gilt entweder ($a>0$ und $b>0$) oder ($a<0$ und $b<0$).

12) Wenn $a\cdot b<0$ dann gilt entweder ($a<0$ und $b>0$) oder ($a>0$ und $b<0$).

13) Wenn $0<a<b$ dann $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

14) Wenn $a\le b$ und $b\le c$ dann $a\le c$.

15) Wenn $a\le b$ und $c>0$ dann $a\cdot c\le b\cdot c$.

16) Wenn $a\le b$ und $c<0$ dann $a\cdot c\ge b\cdot c$.

17) Wenn $a\le b$ und $b\le a$ dann $a=b$.

<u>Bemerkung:</u> Ein Körper K, in dem die Axiome (4.1) – (4.4) gelten, wird angeordneter Körper genannt. In jedem angeordneten Körper gelten alle eben bewiesenen Folgerungen. Auf vielen Körpern kann man keine Ordnungsrelation $<$ finden, die (4.1) – (4.4) erfüllt. Z.B. ist das für $K=\mathbb{C}$ unmöglich, da wegen Folgerung 4) $-1 = i\cdot i > 0$ gelten würde. Daraus würde wegen Folgerung 2) folgen, dass $1<0$, was Folgerung 5) widerspricht.

Auch für $K=\mathbb{F}_2$ gibt es keine solche Ordnungsrelation, da in diesem Körper $-1 = 1 > 0$ und daher $1<0$ gelten würde.

In $\mathbb{Q}$ gibt es „Löcher", z.B. gibt es kein $x \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ (d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

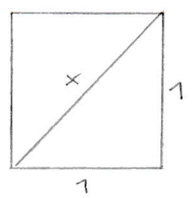
<u>Beweis:</u> Angenommen $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und $ggT(a,b) = 1$) erfüllt $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ ist gerade $\Rightarrow a$ ist gerade $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}: a = 2c$

$\Rightarrow 4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ ist gerade $\Rightarrow b$ ist gerade

$\Rightarrow ggT(a,b) \neq 1$, Wid.

Nach dem Satz des Pythagoras hat ein Quadrat mit Seitenlänge 1 eine Diagonale der Länge x mit der Eigenschaft $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



D.h. es ist notwendig, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu erweitern, „um die Löcher zu stopfen."