1.2 Die reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte

Die Vorstellung der reellen Zahlen als Punkte auf einem ununterbrochenen Zahlenstrahl (ohne Löcher)

funktioniert gut und ist sehr hilfreich (insbesondere in der Schule), ist aus mathematischer Sicht aber unbefriedigend.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die reellen Zahlen aus den rationalen zu konstruieren.

Eine davon sind die sogenannten „Dedekindschen Schnitte". Ein Dedekindscher Schnitt besteht dabei aus einer (nichtleeren) Untermenge U und einer (nichtleeren) Obermenge O mit den folgenden Eigenschaften:

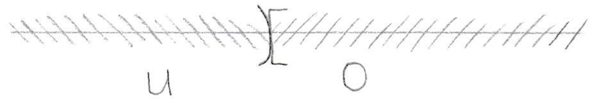
1) $U \cup O = \mathbb{Q}$

2) $\forall x \in U \ \forall y \in O : x < y$

3) U besitzt kein größtes Element

Aus 1) folgt sofort $U \subseteq \mathbb{Q}$ und $O \subseteq \mathbb{Q}$ und aus 2) folgt $U \cap O = \emptyset$ (denn wäre $x \in U \cap O$, so würde $x < x$ gelten, Wid.)

Anschaulich bedeutet das: Man teilt den „löchrigen" Zahlenstrahl, der nur rationale Zahlen enthält, in zwei Teile,



wobei der „Treffpunkt" in der Mitte zu O gehört (wenn er in $\mathbb{Q}$ liegt!).

Ist $q \in \mathbb{Q}$, so erhält man den „rationalen" Schnitt

$$U_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}, \quad O_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq q\}$$

Nicht alle Schnitte sind rational. Will man z.B. $\sqrt{2}$ beschreiben, kann man allerdings NICHT

$$U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}, \quad O = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$$

nehmen, da das Symbol $\sqrt{2}$ noch nicht sinnvoll definiert ist.

Man kann stattdessen aber

$$U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ oder } (x > 0 \text{ und } x^2 < 2)\}, \quad O = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}$$

definieren, ohne $\sqrt{2}$ zu verwenden.

Auf der Menge der Schnitte kann man nun Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und Ordnungsrelation $<$ definieren.

Um einen Schnitt zu kennen, reicht es, nur die Obermenge O oder die Untermenge U zu kennen (denn $O = \mathbb{Q} \setminus U$ und $U = \mathbb{Q} \setminus O$). Darum kann man diese Definitionen z.B. mit Hilfe der Untermengen alleine notieren:

- Sind s, t zwei Schnitte mit Untermengen U_s, U_t, so definiert man

  $$s < t \;:\Longleftrightarrow\; U_s \subsetneq U_t$$

- Ebenso setzt man $U_{s+t} = \{x + y \mid x \in U_s, y \in U_t\}$ für die Untermenge von $s+t$

- Schwieriger ist es, $s \cdot t$ zu definieren (da man die Vorzeichen berücksichtigen muss). Für $s, t > 0$ ist z.B. $O_{s \cdot t} = \{x \cdot y \mid x \in O_s, y \in O_t\}$ eine mögliche Definition der Obermenge von $s \cdot t$.

Man kann nun überprüfen, dass $s+t$ und $s \cdot t$ wieder Schnitte sind und dass die Menge der Schnitte einen angeordneten Körper bildet – die reellen Zahlen $\mathbb{R}$! Zuletzt identifiziert man jedes $q \in \mathbb{Q}$ mit dem Schnitt U_q, O_q und hat tatsächlich die reellen aus den rationalen Zahlen konstruiert (und es gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$). Hat man die Axiome (1.1) bis (4.4) überprüft, so weiß man, dass alle daraus abgeleiteten Folgerungen ebenfalls gelten.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Es gibt andere Möglichkeiten $\mathbb{R}$ zu konstruieren. Diese sind zum Teil geschickter, verwenden dann aber kompliziertere Hilfsmittel.

2) Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ „keine Löcher mehr hat". Dazu müssen wir noch eine exakte Formulierung dieser Tatsache finden.