1.3 Intervalle und Absolutbetrag

Def.: Es seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen. Dann definiert man die folgenden Intervalle:

$$\left.\begin{array}{ll} [a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & (\text{abgeschlossenes Intervall, beachte } [a,a] = \{a\}) \\ (a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & (\text{offenes Intervall, beachte } (a,a) = \emptyset) \\ \left.\begin{array}{l} [a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{array}\right\} & (\text{halboffene Intervalle, } (a,a] = [a,a) = \emptyset) \end{array}\right\} \text{beschränkte Intervalle}$$

Zusätzlich definiert man:

$$\left.\begin{array}{l} [a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\ (-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \end{array}\right\} \text{unbeschränkte, abgeschlossene Intervalle}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\ (-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \end{array}\right\} \text{unbeschränkte, offene Intervalle}$$

Schließlich ist $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Def.: Der Absolutbetrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert als $|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

Folgerungen: 1) $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$ und $|a| = 0 \iff a = 0$

2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \ \forall a,b \in \mathbb{R}$. Wir verwenden eine Fallunterscheidung:

Falls $a,b \geq 0$, so $a \cdot b \geq 0$ und $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$.

Falls $a,b < 0$, so $a \cdot b > 0$ und $|a \cdot b| = a \cdot b = (-a)\cdot(-b) = |a| \cdot |b|$

Falls $a < 0 \leq b$, so $a \cdot b \leq 0$ und $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|$

Falls $b < 0 \leq a$, so $a \cdot b \leq 0$ und $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$

3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ \forall a,b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$ (Übung)

2.3.2021

4) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

($\Rightarrow$) Wegen $0 \leq |a| \leq b$ ist $b \geq 0$. Falls $a \geq 0$, so $-b \leq 0 \leq |a| = a \leq b$.

Falls $a < 0$, so $0 < -a = |a| \leq b \Rightarrow -b \leq a < 0 \leq b$

($\Leftarrow$) $-b \leq a \leq b \Rightarrow -b \leq b \Rightarrow 2b = b + b \geq b + (-b) = 0 \Rightarrow b \geq 0$

Falls $a \geq 0$, so $|a| = a \leq b$.

Falls $a < 0$, so $-b \leq a \leq b \Rightarrow -b \leq -a \leq b \Rightarrow |a| = -a \leq b$

5) $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Dreiecksungleichung)

Wegen $|a| \leq |a| \ \forall a \in \mathbb{R}$ folgt aus 4) ($\Rightarrow$) $-|a| \leq a \leq |a| \ \forall a \in \mathbb{R}$

Da ebenso $-|b| \leq b \leq |b|$, erhält man durch Addition

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

woraus wegen 4) ($\Leftarrow$) $|a+b| \leq |a| + |b|$ folgt.

6) $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Übung)