1.4 Die reellen Zahlen sind vollständig

Def.: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

1) $a \in \mathbb{R}$ heißt Maximum von M, wenn $a \in M$ und $x \leq a \ \forall x \in M$,

2) $a \in \mathbb{R}$ heißt Minimum von M, wenn $a \in M$ und $a \leq x \ \forall x \in M$.

Man schreibt dafür kurz $a = \max M$ bzw. $a = \min M$.

Bspe.: 1) $\max [0,1] = \max (0,1] = 1$ (nach Definition dieser Intervalle)

2) $\max \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = 1$ (da $n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

3) Die Intervalle $(0,1)$ und $[0,1)$ besitzen kein Maximum.

Bemerkungen: 1) Eine nichtleere Menge braucht weder Minimum noch Maximum zu besitzen. (Das ist z.B. für das Intervall $(0,1)$ so.)

2) Wenn das Maximum $\max M$ einer Menge $M (\subseteq \mathbb{R})$ existiert, ist es eindeutig bestimmt. (Es sei $a = \max M$ und $b = \max M$. Dann gelten $a, b \in M$ und $a \geq x \ \forall x \in M$ und $b \geq x \ \forall x \in M$. Daher ist $a \geq b$ und $b \geq a$, woraus $a = b$ folgt.)

Ebenso ist $\min M$ eindeutig bestimmt, wenn es existiert

Def.: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

1) Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M wenn $x \leq s \ \forall x \in M$.

2) Besitzt M eine obere Schranke, so heißt M nach oben beschränkt.
Besitzt M keine obere Schranke, so heißt M nach oben unbeschränkt.

3) Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke von M wenn $s \leq x \ \forall x \in M$.

4) Besitzt M eine untere Schranke, so heißt M nach unten beschränkt.
Besitzt M keine untere Schranke, so heißt M nach unten unbeschränkt.

5) Wenn M nach oben und unten beschränkt ist, heißt M beschränkt.

Bspe.: 1) Es sei $M = [0,1)$. Jede der Zahlen $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{22}{7}, e, \pi, 100, 1000000, \ldots$ ist eine obere Schranke für M. Jede der Zahlen $0, -1, -2, -\frac{7}{2}, -1000, \ldots$ ist eine untere Schranke für M.

Bemerkung: Bsp. 1) zeigt:

1. Eine obere oder untere Schranke für M kann, aber muss nicht in M liegen.
2. Gibt es eine obere (bzw. untere) Schranke s, so gibt es unendlich viele, da jedes $t \geq s$ (bzw. $t \leq s$) ebenfalls obere (bzw. untere) Schranke für M ist.

Bspe. (Fortsetzung): 2) Allgemeiner ist jedes beschränkte Intervall $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ bzw. (a,b) (mit $a<b$) beschränkt, da a untere und b obere Schranke ist.

3) Die Menge $\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ ist beschränkt, da $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \ \forall n\geq 1$.

4) Das Intervall $[-1,+\infty)$ ist nach unten beschränkt (z. B. durch -1) aber nach oben unbeschränkt.

5) Allgemeiner ist jedes Intervall der Gestalt $[a,+\infty)$ bzw. $(a,+\infty)$ nach unten beschränkt (z. B. durch a) aber nach oben unbeschränkt. Ebenso ist jedes Intervall der Gestalt $(-\infty,a]$ bzw. $(-\infty,a)$ nach oben beschränkt (z. B. durch a) aber nach unten unbeschränkt.

6) $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt (z. B. durch 0) aber nach oben unbeschränkt

4.3.2021

Def.: Es sei $M\subseteq\mathbb{R}$. Ein $s\in\mathbb{R}$ heißt Supremum von M (kurz $s=\sup M$), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1) s ist eine obere Schranke von M,

2) Ist t ebenfalls eine obere Schranke von M, so gilt $s\leq t$.

Bemerkungen: 1) Das Supremum von M ist also das Minimum aller oberen Schranken von M.

2) Es folgt, dass ein Supremum (wenn es existiert!) eindeutig bestimmt ist. (Gelten $s=\sup M$ und $t=\sup M$, so ist $s\leq t$ und $t\leq s$, also $s=t$.)

3) Gilt $m=\max M$, so ist $m=\sup M$. (Denn m ist eine obere Schranke für M und ist s eine andere obere Schranke für M, so muss $m\leq s$ gelten.)

Beispiele: 1) $\sup[0,1)=1$. (Einerseits ist $1>x \ \forall x\in[0,1)$ nach Definition des Intervalls, d.h. 1 ist obere Schranke für $[0,1)$. Ist $s=\sup[0,1)$, so muss also $s\leq 1$ gelten. Angenommen, es gäbe ein $s<1$, das obere Schranke von $[0,1)$ ist. Dann gilt $0\leq s<\frac{1+s}{2}<1$, d.h. $\frac{1+s}{2}\in[0,1)$ aber $s<\frac{1+s}{2}$, Wid.)

2) $\sup\{1-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\} = \sup\{1-1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, \dots\} = \sup\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\} = 1$.

(Es ist $1\geq 1-\frac{1}{n} \ \forall n\geq 1$, d.h. 1 ist obere Schranke. Angenommen, es gäbe ein $s<1$, das obere Schranke ist. Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, gibt es ein $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$ mit der Eigenschaft $n>\frac{1}{1-s}$ (sonst wäre $\frac{1}{1-s}$ obere Schranke für $\mathbb{N}$) und $n>\frac{1}{1-s} \Rightarrow 1-s>\frac{1}{n} \Rightarrow 1-\frac{1}{n}>s$, Wid.)

Bemerkung: Beide vorangegangenen Beispiele zeigen, dass das Supremum einer Menge M nicht Element von M sein muss.

Def.: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M (kurz $s = \inf M$), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1) s ist eine untere Schranke von M,

2) Ist t ebenfalls eine untere Schranke von M, so gilt $t \leq s$.

Bemerkung: Für das Infimum gelten mutatis mutandis analoge Aussagen wie für das Supremum:

- Das Infimum $\inf M$ ist das Maximum aller unteren Schranken der Menge M,
- Existiert das Infimum, so ist es eindeutig bestimmt,
- Existiert $\min M$, so ist $\inf M = \min M$,
- Das Infimum von M muss nicht in M liegen.

Wir können nun die Eigenschaft von $\mathbb{R}$ vollständig zu sein (d.h. „keine Löcher zu haben") formulieren:

(S) Wenn $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt ist, dann existiert $\sup M (\in \mathbb{R})$.

Beweisskizze: Es sei $U_s := \bigcup_{x \in M} U_x$ die Untermenge von s (wobei U_x die Untermenge von $x \in M$ bezeichnen soll). Dann ist s ein Dedekindscher Schnitt und (nach Def. von $<$ auf der Menge der Schnitte $\mathbb{R}$) $x \leq s \ \forall x \in M$.

Ist t eine obere Schranke für M, so ist $x \leq t \ \forall x \in M$ und daher $U_x \subseteq U_t \ \forall x \in M$ (wobei U_t die Untermenge von t bezeichnen soll).

Daher gelten $\bigcup_{x \in M} U_x \subseteq U_t$, d.h. $U_s \subseteq U_t$ und daher $s \leq t$.

Bemerkungen: 1) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind durch ihre Eigenschaft, ein angeordneter Körper zu sein (d.h. Axiome (1.1) bis (4.4) zu erfüllen) und (S) vollständig festgelegt.

2) Man kann die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ durch zahlreiche andere Aussagen (die zu (S) äquivalent sind) zum Ausdruck bringen.

Satz 1 (Archimedisches Axiom) Sind $a, b > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $na > b$.

Beweis: Wäre $na \leq b$ $\forall n \geq 1$, so wäre $n \leq \frac{b}{a}$ $\forall n \geq 1$, d.h. $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt, Wid.

Korollar 2 Ist $a > 0$, so $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{n} < a$.

Beweis: Das ist ein Spezialfall von Satz 1 (mit $b = 1$).

Satz 3 Es seien $a < b$. Dann ist $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (d.h. $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$).

Beweis: Es sei zunächst $0 < a (< b)$. Nach Korollar 2 $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{n} < b - a$.
Betrachte die Menge $A := \{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{n} > a\}$. Wegen Satz 1 ist $A \neq \emptyset$ und besitzt daher ein kleinstes Element k_0, d.h. $\frac{k_0 - 1}{n} \leq a < \frac{k_0}{n}$ (was auch stimmt, falls $k_0 = 1$ sein sollte). Weiters ist

$$b = \underbrace{a}_{\geq \frac{k_0-1}{n}} + \underbrace{(b-a)}_{> \frac{1}{n}} > \frac{k_0 - 1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{k_0}{n}, \text{ also insgesamt } a < \frac{k_0}{n} < b.$$

Ist $a \leq 0$, so wähle ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $m > -a$. Dann ist $0 < a + m < b + m$ und nach dem schon bewiesenen Fall $\exists q_1 \in \mathbb{Q} : a + m < q_1 < b + m$ und daher $a < q_1 - m < b$, womit die Beh. bewiesen ist, da $q_1 - m \in \mathbb{Q}$.

Bemerkungen: 1) Als unmittelbare Folgerung erhält man: Ist $a < b$, so enthält das Intervall (a, b) unendlich viele rationale Zahlen, denn $\exists q_1 \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, $\exists q_2 \in (a, q_1) \cap \mathbb{Q}$, $\exists q_3 \in (a, q_2) \cap \mathbb{Q}$, ... usw.

2) Man beschreibt den Sachverhalt von Satz 3 mit der Formulierung: „$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$".

Satz 4 (Intervallschachtelungsprinzip) Für $n \geq 1$ sei $I_n = [a_n, b_n]$ (mit $a_n \leq b_n$) ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und es gelte

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots.$$

Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

Beweis: Offensichtlich gelten $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$ und $\cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$.
Weiters gilt $a_n \leq b_m$ $\forall m, n \geq 1$. (Das folgt für $m = n$ aus der Voraussetzung. Ist $n < m$, so $a_n \leq a_m \leq b_m$. Ist $n > m$, so $a_n \leq b_n \leq b_m$.) Die Menge $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ist $\neq \emptyset$ und nach oben beschränkt (z.B. durch b_n mit $n \geq 1$ beliebig).

Daher $\exists\, s := \sup\{a_n \mid n \geq 1\}$ und folglich $a_n \leq s \;\forall n \geq 1$. Es gilt aber auch $s \leq b_n \;\forall n \geq 1$, da b_n eine obere Schranke von $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ist. Also ist $s \in [a_n, b_n] \;\forall n \geq 1$ und daher $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Bemerkung: Man kann die reellen Zahlen auch durch Intervallschachtelungen $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q} \;\forall n \geq 1$ einführen, für die die Länge $b_n - a_n$ beliebig klein wird. Z. B. wird $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ durch die Intervallschachtelung $[1, 2] \supseteq [1.4, 1.5] \supseteq [1.41, 1.42] \supseteq [1.414, 1.415] \supseteq \cdots$ festgelegt.

Satz 5 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) $s = \sup M$,

(ii) $x \leq s \;\forall x \in M$
und $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, x \in M : s - \varepsilon < x$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es gilt $x \leq s \;\forall x \in M$, da s obere Schranke für M ist. Andererseits kann $s - \varepsilon$ keine obere Schranke sein, also $\exists\, x \in M : s - \varepsilon < x$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Da $x \leq s \;\forall x \in M$ ist s obere Schranke für M. Daher $\exists\, t := \sup M$ und $t \leq s$. Wäre $t < s$, so wäre $x \leq t \;\forall x \in M$. Wähle nun ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $\varepsilon \leq s - t$. Dann ist $s - \varepsilon \geq s - (s - t) = t$ und es kann kein $x \in M$ mit der Eigenschaft $s - \varepsilon < x$ geben, Wid.

Also $s = t$.

Bemerkung: Analog kann man zeigen:

$$s = \inf M \iff s \leq x \;\forall x \in M \text{ und } \forall \varepsilon > 0 \;\exists\, x \in M : x < s + \varepsilon$$

Def.: Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$, $M, N \neq \emptyset$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann seien

$$-M = \{-x \mid x \in M\} \quad (= \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in M : y = -x\})$$

$$M + N = \{x + y \mid x \in M, y \in N\} \quad (= \{z \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in M \;\exists\, y \in N : z = x + y\})$$

$$cM = \{cx \mid x \in M\} \quad (= \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in M : y = cx\})$$

Bsp.: Ist $M = [0, 1]$, $N = \{2, 4\}$, $c = 4$ und $d = -2$, so sind $-M = [-1, 0]$, $-N = \{-4, -2\}$, $M + N = [2, 3] \cup [4, 5]$, $cM = [0, 4]$, $cN = \{8, 16\}$, $dM = [-2, 0]$ und $dN = \{-8, -4\}$.

Lemma 6 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Dann gelten:

(i) s ist obere Schranke von M $\iff$ $-s$ ist untere Schranke von $-M$,

(ii) $s = \sup M \iff -s = \inf(-M)$ (oder kurz: $\inf(-M) = -\sup M$)

Beweis: (i) $x \leq s \ \forall x \in M \iff -s \leq -x \ \forall x \in M \iff -s \leq y \ \forall y \in -M$

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists x \in M : s - \varepsilon < x$ und daher $-s + \varepsilon > -x$,

d.h. $\exists y \in -M : -s + \varepsilon > y$. Daraus folgt (wegen (i)) $-s = \inf(-M)$.

Die Umkehrung zeigt man analog.

Satz 7 (i) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Wenn M nach unten beschränkt ist, $\exists \inf M \in \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $\emptyset \neq M \subseteq N \subseteq \mathbb{R}$. Wenn N nach oben (bzw. unten) beschränkt ist,

dann ist auch M nach oben (bzw. unten) beschränkt und

$\sup M \leq \sup N$ (bzw. $\inf M \geq \inf N$).

Beweis: (i) M ist nach unten beschränkt $\Rightarrow$ $-M$ ist nach oben beschränkt

$\Rightarrow \exists \sup(-M) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \inf M = -\sup(-M) \in \mathbb{R}$

(ii) N ist nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists \sup N \in \mathbb{R}$. Da $\sup N$ eine obere

Schranke von N ist, ist es auch eine obere Schranke von M und daher

$\sup M \leq \sup N$. (Der Beweis der 2. Aussage verläuft analog.) 8.3.2021

Satz 8 Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$, $M, N \neq \emptyset$ und $c > 0$. Dann gelten:

(i) Sind M und N nach oben beschränkt, dann ist auch $M+N$ nach oben beschränkt und $\sup(M+N) = \sup M + \sup N$.

(ii) Ist M nach oben beschränkt, dann ist auch cM nach oben beschränkt und $\sup(cM) = c \sup M$.

Beweis: (i) Es seien s bzw. t obere Schranken für M bzw. N, d.h.

$x \leq s \ \forall x \in M$ und $y \leq t \ \forall y \in N$. Dann ist $x + y \leq s + t \ \forall x \in M \ \forall y \in N$,

d.h. $z \leq s + t \ \forall z \in M+N$. Also ist $s+t$ eine obere Schranke für $M+N$.

Es seien $s = \sup M$, $t = \sup N$ und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists x \in M : s - \frac{\varepsilon}{2} < x$

und $\exists y \in N : t - \frac{\varepsilon}{2} < y$ und daher $s + t - \varepsilon = (s - \frac{\varepsilon}{2}) + (t - \frac{\varepsilon}{2}) < x + y$.

Aus Satz 5 folgt $s + t = \sup(M+N)$, d.h. $\sup M + \sup N = \sup(M+N)$.

(ii) Es sei s eine obere Schranke für M, d.h. $x \le s \ \forall x \in M$. Dann ist $cx \le cs \ \forall x \in M$, d.h. cs ist eine obere Schranke für cM.

Es sei $s = \sup M$ und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists x \in M: s - \frac{\varepsilon}{c} < x$ und daher $cs - \varepsilon < cx$. Aus Satz 5 folgt $c \sup M = cs = \sup(cM)$.

Korollar 9 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt und $c < 0$. Dann ist cM nach unten beschränkt und $\inf(cM) = c \sup M$.

Beweis: Ist s eine obere Schranke für M, so ist $x \le s \ \forall x \in M$ und daher $cs \le cx \ \forall x \in M$ (d.h. cs ist untere Schranke für cM) und es gilt

$$\inf(cM) = \inf(-|c|M) \overset{\text{Lemma 6 (iii)}}{=} -\sup(|c|M) \overset{\text{Satz 8 (ii)}}{=} -(|c| \sup M) = c \sup M.$$

Bemerkung: Analog zu Satz 8 und Korollar 9 gelten die folgenden Eigenschaften:

1) Sind $M, N \subseteq \mathbb{R}$, $M, N \neq \emptyset$ beide nach unten beschränkt, dann ist auch $M + N$ nach unten beschränkt und $\inf(M+N) = \inf M + \inf N$.
2) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach unten beschränkt und $c > 0$, so ist auch cM nach unten beschränkt und $\inf(cM) = c \inf M$.
3) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach unten beschränkt und $c < 0$, so ist cM nach oben beschränkt und $\sup(cM) = c \inf M$.

Bspe.: 1) Es seien $M = (1,2)$ und $N = (3,4)$. Dann ist $M+N = (4,6)$ und $\sup(M+N) = 6 = 2+4 = \sup M + \sup N$.

2) Ist $c = 4$, so ist $cM = (4,8)$ und $\sup(cM) = 8 = 4 \cdot 2 = 4 \sup M = c \sup M$.

3) Ist $d = -2$, so ist $dM = (-4,-2)$ und $\inf(dM) = -4 = (-2) \cdot 2 = d \cdot \sup M$.