1.5 Potenzen mit rationalen Exponenten

Def.: Für $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sei $a^0 := 1$.

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sei $a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Mal}}$.

(Will man sehr genau sein, kann man induktiv $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ definieren.)

Für $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sei $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$. (Insbesondere ist also $a^{-1} := \frac{1}{a}$.)

Bemerkung: Es ist in der Analysis oft sinnvoll, die Konvention $0^0 := 1$ zu verwenden. Sollte in dieser Vorlesung ein Ausdruck a^b auftreten, bei dem $a = b = 0$ möglich ist, so gilt diese Konvention (außer es wird explizit etwas anderes festgelegt).

Satz 10 Sind entweder ($a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$) oder ($a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), so gelten

(i) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

(ii) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Ohne Beweis, der mittels Induktion und Fallunterscheidungen geführt werden kann.

Lemma 11 Es seien $x, y > 0$ und $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann gilt $x < y \iff x^p < y^p$.

Beweis: ($\Rightarrow$) Induktion nach p. Für $p = 1$ gilt die Beh. laut Voraussetzung und $x^{p+1} = x^p \cdot x < y^p \cdot y = y^{p+1}$ (wegen Folgerungen 9) und 8) aus den Ordnungsaxiomen).

($\Leftarrow$) Wäre $x = y$, so wäre $x^p = y^p$. Wäre $y < x$, so wäre (nach der Implikation ($\Rightarrow$)) $y^p < x^p$, Wid. Also muss $x < y$ gelten.

Satz 12 Es sei $a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$, sodass $x^p = a$.

Beweis: Ist $a = 0$, so muss $x = 0$ gelten. Ist $p = 1$, so muss $x = a$ gelten.

Es sei darum ab jetzt $a > 0$ und $p > 1$.

Existenz: Die reelle Zahl x, die durch den Dedekindschen Schnitt mit Untermenge $U = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \text{ oder } (q \geq 0 \text{ und } q^p < a)\}$ gegeben ist, erfüllt $x^p = a$.

Eindeutigkeit: Ist $0 < y < x$, so ist $y^p < x^p = a$. Ist $x < y$, so ist $y^p > x^p = a$ (wegen Lemma 11).

Def.: Es sei $a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Das nach Satz 12 eindeutig bestimmte $x \geq 0$ mit $x^p = a$ wird als p-te Wurzel von a bezeichnet und man schreibt dafür $\sqrt[p]{a}$ oder $a^{1/p}$.

Bemerkungen: 1) Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man nur $\sqrt{a}$.

2) Beachte, dass $\sqrt[p]{a}$ (nach Definition) immer ≥ 0 ist. (Es gilt zwar z.B. auch $(-2)^2 = 4$, aber $\sqrt{4} = 2$.)

3) Es gilt $(\sqrt[p]{a})^p = a$ (nach Definition von $\sqrt[p]{a}$), aber $\sqrt[p]{x^p}$ muss nicht $= x$ sein. Z.B. ist $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. (Korrekt ist die Gleichung $\sqrt{x^2} = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.)

Def.: Es sei $a > 0$ und $r = \frac{p}{q}$, $r > 0$ mit $p, q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann sei $a^r := \sqrt[q]{a^p}$ und $a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$. Zusätzlich sei $0^r := 0$ (wieder für $r > 0$).

Bemerkung: a^r ist wohldefiniert. Es sei $r = \frac{p}{q} > 0$ (mit $p, q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\operatorname{ggT}(p,q) = 1$) und $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann ist

$$x = \sqrt[q]{a^p} \iff x^q = a^p \iff (x^q)^k = (a^p)^k \iff x^{kq} = a^{kp} \iff x = \sqrt[kq]{a^{kp}}.$$

Satz 13 Es seien $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gelten

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iv) $a^r b^r = (ab)^r$,

(v) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$.

Beweis: (i) Es seien $r = \frac{m}{q}$, $s = \frac{n}{q}$ (mit $m, n \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$). Dann gelten $x = a^r \iff x^q = a^m$ und $y = a^s \iff y^q = a^n$. Sind also $x = a^r$ und $y = a^s$, so folgt $(xy)^q = x^q y^q = a^m a^n = a^{m+n}$. Da $r + s = \frac{m+n}{q}$ und $z = a^{r+s} \iff z^q = a^{m+n}$ folgt $a^r a^s = xy = z = a^{r+s}$.

(ii) – (v) Ohne Beweis.

<u>Satz 14</u> Es seien $a, b > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$. Dann gelten:

(i) $a < b \iff a^r < b^r$ falls $r > 0$,

(ii) $a < b \iff a^r > b^r$ falls $r < 0$.

<u>Beweis:</u> (i) Es sei $r = \frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Dann gilt (wegen Lemma 11)

$$a < b \iff a^{1/q} < b^{1/q} \iff a^{p/q} < b^{p/q} \iff a^r < b^r.$$

(ii) Es sei $r = -\frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Dann gilt

$$a < b \overset{(i)}{\iff} a^{p/q} < b^{p/q} \iff \frac{1}{b^{p/q}} < \frac{1}{a^{p/q}} \iff b^{-p/q} < a^{-p/q} \iff b^r < a^r.$$

<u>Korollar 15</u> Es sei $a > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Dann gelten

(i) $a^r < a^s \iff a > 1$,

(ii) $a^r > a^s \iff (0 <)\, a < 1$.

<u>Beweis:</u> (i) Wegen $s - r > 0$ und $1^{s-r} = 1$ folgt aus Satz 14 (i)

$$a > 1 \iff a^{s-r} > 1 \iff \frac{a^s}{a^r} > 1 \iff a^s > a^r.$$

(ii) Analog