1.6 Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen

Erinnerung: 1) Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ setzt man $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (oder formal sauberer induktiv: $1! = 1$ und $(n+1)! = n!\cdot(n+1)$ für $n \geq 1$). Zusätzlich setzt man $0! = 1$. Die Fakultät $n!$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, n (verschiedene) Objekte aufzureihen: Beim ersten Objekt hat man n Möglichkeiten, beim zweiten $n-1$, usw. bis beim n-ten (und letzten) nur mehr eine Möglichkeit übrigbleibt.

2) Für $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ ist $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen: Man reiht die n Objekte so auf, dass zuerst die k ausgewählten liegen und dann die $n-k$ nicht ausgewählten. Es gibt $n!$ Möglichkeiten, die Objekte aufzureihen. Da es auf die Reihenfolge der ausgewählten nicht ankommt, muss man durch $k!$ dividieren. Ebenso kommt es auf die Reihenfolge der nicht ausgewählten nicht an und man muss auch durch $(n-k)!$ dividieren.

Es gelten:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$,

(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $0 \leq k < n$.

Eigenschaft (ii) kann mittels des sogenannten Pascalschen Dreieckes zur Berechnung von Binomialkoeffizienten verwendet werden:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Satz 16 (Binomischer Lehrsatz) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Beweis: Induktion nach n. $n=1$: $(x+y)^1 = x+y = \binom{1}{0}x^0y^1 + \binom{1}{1}x^1y^0$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n\cdot(x+y) \overset{IV}{=} \left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}\right)\cdot(x+y)$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{j+1}y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{j+1}y^{(n+1)-(j+1)} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}$$

$$= y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)x^j y^{n+1-j} + x^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}x^0y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j}$$

Bemerkungen: 1) Der binomische Lehrsatz erklärt die Bezeichnung „Binomialkoeffizient."

2) In Satz 16 haben wir die Konvention $0^0=1$ verwendet. (Es könnte ja $x=0$ oder $y=0$ sein.)

Satz 17 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)

Für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $x_1,\dots,x_n\geq 0$ gilt $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$.

Beweis: Die Behauptung ist erfüllt wenn $x_i=0$ für ein $i\in\{1,\dots,n\}$ (da dann $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} = 0 \leq \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$).

Ebenso ist sie erfüllt, wenn $x_1=\dots=x_n=:x$ (da dann $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} = x = \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$).

Es sei darum ab jetzt $x_i>0$ für $1\leq i\leq n$ und die x_i nicht alle gleich. Unter diesen Voraussetzungen führen wir Induktion nach n durch:

$n=1$: Trivial

$n=2$: Es sei $A := \frac{1}{2}(x_1+x_2)$. OBdA sei $x_1<x_2$. Dann gibt es ein $\delta>0$ mit der Eigenschaft $x_1 = A-\delta$ und $x_2 = A+\delta$ (nämlich $\delta = \frac{1}{2}(x_2-x_1)$).

Dann gilt $x_1x_2 = (A-\delta)(A+\delta) = A^2-\delta^2 \leq A^2$ und daher

$\sqrt{x_1x_2} \leq \sqrt{A^2} = A = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

Angenommen, die Beh. ist für $n \geq 2$ schon gezeigt. Es sei

$$A := \frac{1}{n+1}(x_1 + \dots + x_{n+1}).$$

Da $x_1, \dots, x_{n+1}$ nicht alle gleich sind, muss es $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ mit $x_i > A$ und $x_j < A$ geben. OBdA seien $x_n = A - \delta$ und $x_{n+1} = A + \varepsilon$ für gewisse $\delta, \varepsilon > 0$.

Dann ist

$$x_1 \cdots x_{n+1} = x_1 \cdots x_{n-1}(A-\delta)(A+\varepsilon) = x_1 \cdots x_{n-1}\left(A^2 + (\varepsilon - \delta)A - \delta\varepsilon\right)$$

$$< x_1 \cdots x_{n-1}\left(A^2 + (\varepsilon-\delta)A\right) = x_1 \cdots x_{n-1}(A - \delta + \varepsilon)A.$$

Wir wenden die Induktionsvoraussetzung nun auf die n Zahlen $x_1, \dots, x_{n-1}, A - \delta + \varepsilon$ an. Diese haben ebenfalls arithmetisches Mittel A, denn $A - \delta + \varepsilon = x_n + x_{n+1} - A$ und daher

$$\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_{n-1} + A - \delta + \varepsilon) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_{n+1} - A)$$

$$= \frac{1}{n}((n+1)A - A) = \frac{1}{n} \cdot nA = A.$$

Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}(A-\delta+\varepsilon)} \leq A \quad \Longrightarrow \quad x_1 \cdots x_{n-1}(A - \delta + \varepsilon) \leq A^n$$

$$\Longrightarrow x_1 \cdots x_{n+1} < x_1 \cdots x_{n-1}(A-\delta+\varepsilon)A \leq A^n \cdot A = A^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_{n+1}} \leq A = \frac{1}{n+1}(x_1 + \dots + x_{n+1}).$$

<u>Satz 18</u> (Bernoullische Ungleichung) Sind $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $x > -1$, $x \neq 0$, so gilt $(1+x)^n > 1 + nx$.

<u>Beweis</u>: Induktion nach n. $n = 2$: $(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$

Angenommen, die Beh. ist für ein $n \geq 2$ bereits gezeigt. Da $1 + x > 0$ folgt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{IV}{>} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} > 1 + (n+1)x.$$