2. Folgen

2.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

Def.: Eine Zahlenfolge (oder kurz Folge) ist eine Abbildung $\mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.
Man schreibt dafür $(a_n)_{n\geq 1}$.

Bemerkung: Eine Folge kann auch mit einem anderen Index beginnen, also z.B. eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder $\{p, p+1, p+2, \dots\} \to \mathbb{R}$ (mit $p \in \mathbb{Z}$) sein. Man schreibt dann $(a_n)_{n\geq 0}$ oder $(a_n)_{n\geq p}$.

Def.: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{a_n | n \geq 1\}$ beschränkt ist, d.h. wenn $\exists M > 0$, sodass $|a_n| \leq M \ \forall n \geq 1$.

Def.: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt konvergent mit Grenzwert (oder Limes) $a \,(\in \mathbb{R})$ wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.
Man schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Eine Folge heißt konvergent wenn sie gegen einen Grenzwert konvergiert, anderenfalls heißt sie divergent.

Def.: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt Nullfolge wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt.

(D.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, sodass $|a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.)

Def.: Eine Folge $(b_k)_{k\geq 1}$ heißt Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wenn es eine Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ gibt, sodass $b_k = a_{n_k} \ \forall k \geq 1$.

Bemerkungen: 1) Anschaulich besagt die Def. der Konvergenz gegen $a \in \mathbb{R}$ folgendes: Für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

2) Kann man nur zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$, dann gilt bereits $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. (Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so $\exists n_0 \geq 1$, sodass $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ gilt.)

3) Man kann die Def. der Konvergenz gegen a auch so formulieren: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_1$. (Man sieht die Äquivalenz dieser Def. wenn man $n_0 = n_1 + 1$ wählt.)

4) Die Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist äquivalent dazu, dass $(a_n - a)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

Satz 19 (i) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(iii) Ist eine Folge konvergent, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen und zwar gegen denselben Grenzwert.

Beweis: (i) Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ wobei oBdA $a<b$.

Es sei $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)$. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt, dass $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_1$

Ebenso $\exists n_2 \geq 1 : |a_n - b| < \varepsilon \ \forall n \geq n_2$ (da $\lim_{n\to\infty} a_n = b$). Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt daher einerseits $a_n - a < \frac{b-a}{2}$ und daher $a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ und andererseits $a_n - b > -\frac{b-a}{2} = \frac{a-b}{2}$ und daher $a_n > b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, ein Widerspruch.

(ii) Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wähle $\varepsilon = 1 > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < 1 \ \forall n \geq n_0$.

Für $n \geq n_0$ gilt dann $|a_n| - |a| \leq \big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < 1$ und daher $|a_n| < 1 + |a|$.

Insgesamt ist $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a|+1\} \ \forall n \geq 1$.

(iii) Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ (und $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$). Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

Offenbar gilt $n_k \geq k \ \forall k \geq 1$. (Formal genauer: Beweis mit Induktion nach k)

Ist nun $k \geq n_0$, so ist daher $n_k \geq n_0$ und daher $|a_{n_k} - a| < \varepsilon \ \forall k \geq n_0$

Bsple.: 1) Die konstante Folge $(a)_{n\geq 1}$ (dh $a_n = a \in \mathbb{R} \ \forall n \geq 1$) erfüllt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. (Es sei $\varepsilon > 0$. Für $n_0 = 1$ gilt $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \ \forall n \geq 1$.)

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Korollar 2 $\exists n_0 \geq 1 : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Für $n \geq n_0$ gilt dann $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, dh $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.)

3) Es sei $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$. (Das folgt aus dem vorangegangenen Bsp. und Satz 19(iii), da $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 1}$ eine Teilfolge von $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist.)

4) Es sei $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$. (Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Bsp. 2 $\exists n_0 \geq 1: \frac{1}{n} < \varepsilon^p \ \forall n \geq n_0$. Aus Satz 14 folgt $0 < \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$, d.h. $\left|\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \varepsilon$.)

5) Es sei $|q| < 1$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. (Für $q = 0$ folgt das aus Bsp. 1). Es sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist $\frac{1}{|q|} > 1$, d.h. $\exists h > 0: \frac{1}{|q|} = 1 + h$, woraus $|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \overset{\text{Satz 18}}{<} \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$ folgt. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon h}$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $|q^n - 0| = |q^n| < \frac{1}{nh} \leq \frac{1}{n_0 h} < \varepsilon$.)

6) Die Folge $(n)_{n\geq 1}$ ist divergent, da sie nicht beschränkt ist.

7) Ist $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, so ist (allgemeiner) die Folge $(n^p)_{n\geq 1}$ divergent, da sie nicht beschränkt ist.

11.3.2021

8) Die Folge $((-1)^n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt (da $|(-1)^n| \leq 1 \ \forall n \geq 1$) und divergent. (Angenommen, es wäre $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = a \in \mathbb{R}$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Falls $a \geq 0$, so gilt für alle ungeraden n, dass

$$|(-1)^n - a| = |-1-a| = a + 1 \geq 1 > \varepsilon, \text{ Wid.}$$

Falls $a < 0$, so gilt für alle geraden n, dass

$$|(-1)^n - a| = |1 - a| = 1 + |a| > 1 > \varepsilon, \text{ Wid.})$$