2.2 Rechnen mit konvergenten Folgen

Satz 20 (i) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \le b_n$ für fast alle n (d.h. für alle bis auf endlich viele n), dann $a \le b$.

(ii) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ und $a_n \le c_n \le b_n$ für fast alle n, dann ist auch die Folge $(c_n)_{n\ge 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

(iii) Ist $(a_n)_{n\ge1}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\ge1}$ beschränkt, so ist $(a_n b_n)_{n\ge1}$ eine Nullfolge.

Bemerkung: Für Satz 20 (ii) gibt es verschiedene Bezeichnungen wie „Einschnürungssatz" oder „Sandwich Theorem".

Beweis: (i) Angenommen, es wäre $a > b$. Wähle $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.
Dann $\exists n_1 \ge 1 : |a_n - a| < \frac{a-b}{2}\ \forall n \ge n_1$ und $\exists n_2 \ge 1 : |b_n - b| < \frac{a-b}{2}\ \forall n \ge n_2$.
Für $n \ge \max\{n_1, n_2\}$ wäre dann $a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} > b_n$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \ge 1 : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \ge n_1$ und $\exists n_2 \ge 1 : |b_n - a| < \varepsilon\ \forall n \ge n_2$.
Ist $a_n \le c_n \le b_n\ \forall n \ge n_3$, so gilt für $n \ge \max\{n_1, n_2, n_3\}$, dass
$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$, woraus $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$ und daher $|c_n - a| < \varepsilon$ folgt.

(iii) Da $(b_n)_{n\ge1}$ beschränkt ist, $\exists B > 0 : |b_n| \le B\ \forall n \ge 1$. Es sei $\varepsilon > 0$.
Da $(a_n)_{n\ge1}$ eine Nullfolge ist $\exists n_0 \ge 1 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{B}\ \forall n \ge n_0$. Daher ist
$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \le B \cdot |a_n| < B \cdot \frac{\varepsilon}{B} = \varepsilon\ \forall n \ge n_0$.

Satz 21 Es seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten

(i) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\ge1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(ii) Die Folge $(a_n - b_n)_{n\ge1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

(iii) Die Folge $(a_n b_n)_{n\ge1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \cdot b$.

(iv) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist die Folge $(\alpha a_n)_{n\ge1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a$.

(v) Die Folge $(|a_n|)_{n\ge1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

(vi) Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n, die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N}$ konvergiert

und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. (Dabei ist $N \geq 1$ so gewählt, dass $b_n \neq 0 \ \forall n \geq N$.)

(vii) Ist $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$, so ist $a \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Beweis: (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_1$ und $\exists n_2 \geq 1 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_2$.

Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii) Da die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, ist sie beschränkt, d.h. $\exists B > 0 : |b_n| \leq B \ \forall n \geq 1$.

Falls $a = 0$ folgt die Beh. aus Satz 20 (iii). Sei daher ab jetzt $a \neq 0$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B} \ \forall n \geq n_1$ und $\exists n_2 \geq 1 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|} \ \forall n \geq n_2$.

Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a) b_n + (b_n - b) a| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |b_n - b| \cdot |a|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot B + |b_n - b| \cdot |a| < \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B + \frac{\varepsilon}{2|a|} \cdot |a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iv) Ist ein Spezialfall von (iii) mit $b_n = \alpha \ \forall n \geq 1$.

(ii) Folgt aus (i) und (iv):

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n + (-b_n)) \overset{(i)}{=} \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} (-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} ((-1) b_n)$$

$$\overset{(iv)}{=} \lim_{n\to\infty} a_n + (-1) \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

(v) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \implies ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

(vi) Wir zeigen zunächst den Spezialfall $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Nach (v) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = |b| > 0$. Daher gilt: Zu $\frac{|b|}{2} > 0$

$\exists n_1 \geq 1 : ||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2} \ \forall n \geq n_1$ und folglich $|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \ \forall n \geq n_1$.

Also ist $b_n \neq 0$ und $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \ \forall n \geq n_1$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_2 \geq 1 : |b_n - b| < \frac{b^2 \varepsilon}{2}$.

Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b b_n}\right| = \frac{1}{|b| \cdot |b_n|} |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \frac{2}{b^2} \frac{b^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Aus (iii) und dem bisher gezeigten folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

(vii) Aus $a_n \geq 0 \;\forall n \geq 1$ folgt wegen Satz 20(i) $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$.

1. Fall: $a = 0$: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1: a_n = |a_n - 0| < \varepsilon^2 \;\forall n \geq n_0$ und daher

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

2. Fall: $a > 0$: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1: |a_n - a| < \sqrt{a}\,\varepsilon \;\forall n \geq n_0$ und daher

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\,\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Bemerkungen: 1) Man kann die Aussagen von Satz 21 kurz folgendermaßen formulieren:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

und $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$.

2) Beachte, dass in allen Aussagen von Satz 21 die Existenz von $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ vorausgesetzt wird! Eine Rechnung wie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + (-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + (-1)^n\right) + \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$$

ist falsch und unsinnig, da weder $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + (-1)^n\right)$ noch $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ existieren!

3) Wir werden später sehen, dass die beiden Aussagen $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$ und $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$ zur Stetigkeit der Betragsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ bzw. Wurzelfunktion $[0,+\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ äquivalent sind.

Beispiele: 1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Für $n \geq 2$ ist

$$1 = \sqrt[n]{1} \overset{\text{Satz 14}}{<} \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}^{\,2}\cdot 1^{n-2}} \overset{\text{Satz 17}}{\leq} \frac{1}{n}\left(2\sqrt{n} + n - 2\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Nach Bsp. 4 in 2.1 ist $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ und daher (wegen Satz 21(i) und (iv))

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + 2\cdot 0 = 1.$$

Aus Satz 20 (ii) folgt $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

2) Es sei $a>0$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Das ist trivial für $a=1$.

Für $a>1$ gilt $n>a$ für fast alle n und daher $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ für fast alle n.

Aus Bsp. 1) folgt mit Hilfe von Satz 20 (ii), dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Ist $0<a<1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$ und daher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$.

Mit Hilfe von Satz 21 (vi) folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{1} = 1$.

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + 7}{2n^3 + 5n} = \frac{3}{2}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + 7}{2n^3 + 5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{5}{n^2}} \overset{\text{Satz 21}}{=} \frac{3 - 4\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 7 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{2 + 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3+0+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

4) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$, denn

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

und die Beh. folgt wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (Bsp. 4 in 2.1) aus Satz 20 (ii).

5) Es sei $|q|<1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} (1+q+q^2+\dots+q^n) = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe)

Es gilt $1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\forall n \geq 1$ (und alle $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$)

Induktion nach n. $n=1$: $1+q = \frac{1-q^2}{1-q}$ ($\Leftrightarrow$ $(1+q)(1-q) = 1-q^2$)

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

und daher (jetzt für $|q|<1$)

$$\lim_{n\to\infty} (1+q+q^2+\dots+q^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\cdot q^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \underbrace{\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}_{=0} = \frac{1}{1-q},$$

wobei $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ in Bsp. 5) in 2.1 bewiesen wurde.