2.3 Konvergenzkriterien

<u>Def.</u>: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wird monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend) genannt, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n\geq 1$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$) gilt.

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wird monoton fallend (bzw. streng monoton fallend) genannt, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n\geq 1$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$ $\forall n\geq 1$) gilt.

Eine Folge heißt monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

<u>Satz 22</u> Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monotone Folge. Dann sind äquivalent:

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent,

(ii) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

Gelten diese beiden Aussagen, so ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n\geq 1\} = \sup_{n\geq 1} a_n \quad \text{falls } (a_n)_{n\geq 1} \text{ monoton wächst}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \geq 1\} = \inf_{n\geq 1} a_n \quad \text{falls } (a_n)_{n\geq 1} \text{ monoton fällt.}$$

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Gilt allgemein und wurde in Satz 19 (ii) bewiesen.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und $a := \sup\{a_n \mid n\geq 1\}$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : a_{n_0} > a - \varepsilon$ (wegen Satz 5) und daher

$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Daraus folgt sofort $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

und somit $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Es sei nun $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend. Dann ist $(-a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend (da aus $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n\geq 1$ folgt, dass $-a_n \leq -a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$). Daher ist

$$-\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\text{Satz 21 (iv)}}{=} \lim_{n\to\infty}(-a_n) = \sup\{-a_n \mid n\geq 1\} \overset{\text{Lemma 6 (ii)}}{=} -\inf\{a_n \mid n\geq 1\}$$

und folglich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n\geq 1\}$

15.3.2021

<u>Bsp.</u>: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend für jedes feste $x \geq -1$ (woraus $1 + \frac{x}{n} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \geq 0$ $\forall n\geq 1$ folgt):

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \overset{\text{Satz 17}}{\leq} \left(\frac{1}{n+1}\left(1+n\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1+n+x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

Insbesondere sind die beiden Folgen $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ und $((1-\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ beide monoton wachsend. Aus der zweiten Aussage folgt, dass die Folge

$$\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}\right)_{n\geq 2} = \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}\right)_{n\geq 1}$$

monoton fällt. Wegen

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(\frac{n+1-1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ist also die Folge $((1+\frac{1}{n})^{n+1})_{n\geq 1}$ monoton fallend. Da

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 2^2 = 4 \quad \forall n\geq 1$$

ist $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt und daher konvergent nach Satz 22.

Def.: $e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n\geq 1\right\}$

Bemerkung: Die Zahl $e = 2{,}7182818\ldots$ wird Eulersche Zahl genannt. Sie ist irrational. (Tatsächlich ist sie sogar transzendent, d.h. sie ist nicht Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten – mit Ausnahme des Nullpolynoms natürlich.) Die Folge $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ konvergiert aber so langsam gegen e, dass sie zur Berechnung von e nicht gut geeignet ist.

Bsp.: Sei $a>0$. Wähle $x_0>0$ beliebig und definiere die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ iterativ durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ (für $n\geq 0$).

Wir zeigen zunächst, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiert. Mit Induktion nach n sieht man sofort $x_n>0$ $\forall n\geq 0$. Tatsächlich gilt sogar $x_n \geq \sqrt{a}$ $\forall n\geq 1$, da

$\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_{n+1}$ $\forall n\geq 0$ wegen Satz 17. Insbesondere ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt. Es folgt

$$x_n^2 \geq a \;\; \forall n\geq 1 \implies \frac{a}{x_n} \leq x_n \;\; \forall n\geq 1 \implies x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}\cdot 2x_n = x_n \;\; \forall n\geq 1.$$

D.h. die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend. Wegen Satz 22 $\exists\, \xi := \lim_{n\to\infty} x_n$ und nach Satz 20(i) gilt $\xi \geq \sqrt{a} > 0$.

Wir zeigen nun, dass $\xi = \sqrt{a}$ gilt. Es ist

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{a}{\xi}\right)$$

$$\Rightarrow 2\xi = \xi + \frac{a}{\xi} \Rightarrow \xi = \frac{a}{\xi} \Rightarrow \xi^2 = a \Rightarrow \xi = \sqrt{a}.$$

Bemerkung: Das in diesem Bsp. beschriebene Verfahren liefert eine Folge, die sehr rasch gegen $\sqrt{a}$ konvergiert und zur numerischen Berechnung von Quadratwurzeln gut geeignet ist.

Satz 23 (Satz von Bolzano-Weierstrass) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Beweis: Wir beweisen, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monotone Teilfolge enthält. Da $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist, folgt die Beh. dann aus Satz 22.

Wir nennen einen Index $m \geq 1$ „Gipfelstelle" von $(a_n)_{n\geq 1}$ wenn $a_m > a_n \; \forall n > m$.

1. Fall: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt unendlich viele Gipfelstellen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ Dann gilt $a_{m_1} > a_{m_2} > a_{m_3} > \dots$, dh $(a_{m_k})_{k\geq 1}$ ist eine streng monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

2. Fall: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt nur endlich viele Gipfelstellen. Wähle ein $n_1 \geq 1$, das größer ist als die größte Gipfelstelle. Dann ist n_1 keine Gipfelstelle. Daher $\exists n_2 > n_1 : a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Da auch n_2 keine Gipfelstelle ist, $\exists n_3 > n_2 : a_{n_2} \leq a_{n_3}$. Verfahre weiter so: Sind $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$ schon gefunden, so existiert $n_{k+1} > n_k : a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}}$. (da n_k keine Gipfelstelle ist). Die Folge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ ist eine monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Def.: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt Cauchyfolge wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \geq 1 \; \forall m,n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$

Satz 24 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent,

(ii) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchyfolge.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Es sei $\varepsilon > 0$.

Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq n_0$. Daraus folgt

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall m,n \geq n_0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist.

Zu $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists n_0 \geq 1$ $\forall m,n \geq n_0$: $|a_m - a_n| < 1$. Daraus folgt

$|a_n| - |a_{n_0}| \leq \big||a_n| - |a_{n_0}|\big| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1$ $\forall n \geq n_0$ und daher $|a_n| < |a_{n_0}| + 1$ $\forall n \geq n_0$.

Damit erhält man sofort $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}$ $\forall n \geq 1$.

Wegen Satz 23 existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Wir zeigen nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \geq 1$: $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m,n \geq N$.

Wähle nun ein $n_{k_0} \geq 1$ (dh den Index eines Glieds der konvergenten Teilfolge), sodass $n_{k_0} \geq N$ und $|a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N, \quad \text{dh} \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Bemerkung: Satz 24 ermöglicht es, die Konvergenz (oder Divergenz) einer Folge zu beweisen, ohne dass man ihren Grenzwert kennt.

Bspe.: 1) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist keine Cauchyfolge (und daher divergent): Für n gerade und m ungerade ist $|a_n - a_m| = |1 - (-1)| = 2$. Für $0 < \varepsilon < 2$ gibt es daher kein $n_0 \geq 1$, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall m,n \geq n_0$.

2) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ keine Cauchyfolge (und daher divergent), da

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

dh für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ gibt es kein $n_0 \geq 1$, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon$. $\forall m,n \geq n_0$. Da $(a_n)_{n\geq 1}$ streng monoton wächst, folgt aus Satz 22, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ unbeschränkt ist.

3) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge ist. OBdA sei $m > n$, dh $m = n+k$ für ein $k \geq 1$. Dann gilt

$$a_{n+k} - a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k}$$

$$= (-1)^n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k}\right)$$

Dabei ist $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}>0$. Für gerades k ist

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\dots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}>0.$$

Für ungerades k ist

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+k-2}-\frac{1}{n+k-1}\right)+\frac{1}{n+k}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\dots+\frac{1}{(n+k-2)(n+k-1)}+\frac{1}{n+k}>0$$

Andererseits ist $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}<\frac{1}{n+1}$. Für gerades k ist

$$\frac{1}{n+1}-\underbrace{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)}_{>0}-\underbrace{\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)}_{>0}-\dots-\underbrace{\left(\frac{1}{n+k-2}-\frac{1}{n+k-1}\right)}_{>0}-\underbrace{\frac{1}{n+k}}_{>0}<\frac{1}{n+1}$$

Für ungerades k ist

$$\frac{1}{n+1}-\underbrace{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)}_{>0}-\underbrace{\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)}_{>0}-\dots-\underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}<\frac{1}{n+1}.$$

Insgesamt gilt also

$$|a_{n+k}-a_n|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}<\frac{1}{n+1}.$$

Ist $\varepsilon>0$ vorgegeben, so wähle $n_0\geq 1$, derart dass $\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$. Für $m,n\geq n_0$ ist dann

$$|a_m-a_n|<\frac{1}{\min\{m,n\}+1}\leq\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon.$$

Da $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchyfolge und daher konvergent.

<u>Bemerkung</u>: Mit anderen Methoden kann man $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=\log 2$ beweisen. (Dabei bezeichnet log den natürlichen Logarithmus zur Basis e.)

<u>Satz 25</u> Es sei $x\in\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n=x$. Die Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ kann monoton wachsend gewählt werden.

<u>Beweis</u>: Es sei $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Nach Satz 3 $\exists\, q_n\in\left(x-\frac{1}{n},x-\frac{1}{n+1}\right)\cap\mathbb{Q}$. Dann ist $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen und wegen $q_n<x-\frac{1}{n+1}<q_{n+1}$ $\forall n\geq 1$ streng monoton wachsend. Da $x-\frac{1}{n}<q_n<x$ $\forall n\geq 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} q_n=x$ aus Satz 20 (ii).

Bemerkung: Man kann Cauchyfolgen benützen, um $\mathbb{R}$ (ausgehend von $\mathbb{Q}$) zu konstruieren. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Cauchyfolgen rationaler Zahlen. (Man muss dabei in der Def. der Cauchyfolge $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ fordern.) Auf $\mathcal{F}$ definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1}$, wenn $(a_n - b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist. (Auch in der Def. der Nullfolge wird $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ gefordert.) Auf der Menge $\mathcal{F}/\sim$ der Äquivalenzklassen definiert man die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ folgendermaßen: Bezeichnet $[(a_n)_{n\geq 1}]$ die Äquivalenzklasse, in der $(a_n)_{n\geq 1}$ liegt, so seien

$$[(a_n)_{n\geq 1}] + [(b_n)_{n\geq 1}] := [(a_n + b_n)_{n\geq 1}] \quad \text{und} \quad [(a_n)_{n\geq 1}] \cdot [(b_n)_{n\geq 1}] := [(a_n b_n)_{n\geq 1}].$$

(Beides ist wohldefiniert, da aus $(a_n)_{n\geq 1} \sim (a'_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1} \sim (b'_n)_{n\geq 1}$ folgt, dass $(a_n + b_n)_{n\geq 1} \sim (a'_n + b'_n)_{n\geq 1}$ und $(a_n b_n)_{n\geq 1} \sim (a'_n b'_n)_{n\geq 1}$.)

Die Menge $\mathbb{R}$ wird als die Menge der Äquivalenzklassen definiert, die Verknüpfungen sind wie oben angegeben und die rationalen Zahlen werden folgendermaßen eingebettet: Ist $q \in \mathbb{Q}$, so identifiziert man q mit $[(q, q, q, \ldots)]$.