2.4 Potenzen mit irrationalen Exponenten

Lemma 26 Es sei $a>0$ und $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = 1$.

Beweis: Nach Bsp. 2 in 2.2 gilt $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ und daher

$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{1/n}} = 1$.

Es sei $\varepsilon>0$. Dann gibt es ein $m\geq 1$, sodass $|a^{1/m}-1|<\varepsilon$ und $|a^{-1/m}-1|<\varepsilon$.

Zu $\frac{1}{m}>0$ $\exists n_0\geq 1$, sodass $|q_n|<\frac{1}{m}$ $\forall n\geq n_0$, d.h. $-\frac{1}{m}<q_n<\frac{1}{m}$ $\forall n\geq n_0$

Für $a=1$ ist $a^{q_n}=1$ $\forall n\geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a^{q_n}=1$ folgt trivialerweise.

Für $a>1$ folgt aus Kor. 15 (i) $1-\varepsilon < a^{-1/m} < a^{q_n} < a^{1/m} < 1+\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$,

d.h. $|a^{q_n}-1|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$.

Für $0<a<1$ gilt wegen Kor. 15 (ii) $1-\varepsilon < a^{1/m} < a^{q_n} < a^{-1/m} < 1+\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$,

d.h. $|a^{q_n}-1|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Def.: Es sei $a>0$ und $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dann sei $a^x := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$, wobei $(q_n)_{n\geq 1}$ irgendeine Folge rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ sei.

Bemerkung: Nach Satz 25 gibt es eine Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Wählt man die Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ monoton (was nach Satz 25) möglich ist, so ist die Folge $(a^{q_n})_{n\geq 1}$ nach Korollar 15 ebenfalls monoton. Da sie auch beschränkt ist, ist sie nach Satz 22 konvergent, d.h. $\lim_{n\to\infty} a^{q_n}$ existiert.

Sind $(p_n)_{n\geq 1}$ und $(q_n)_{n\geq 1}$ zwei Folgen rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = x$, so ist $(p_n-q_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und wegen Lemma 26 gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = \lim_{n\to\infty} a^{(p_n-q_n)+q_n} \overset{\text{Satz 13(i)}}{=} \lim_{n\to\infty} a^{p_n-q_n}\cdot a^{q_n}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} a^{p_n-q_n}\right)}_{=1}\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a^{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}.$$

D.h. $\lim_{n\to\infty} a^{q_n}$ existiert auch wenn die Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ nicht monoton ist und hängt nicht von der Wahl der Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ ab.

16.3.2021

<u>Satz 27</u> Es seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(ii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iv) $a^x b^x = (ab)^x$,

(v) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

<u>Beweis</u>: (i) Es seien $(q_n)_{n\geq 1}$ und $(p_n)_{n\geq 1}$ Folgen rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} p_n = y$. (Sollte $x \in \mathbb{Q}$ bzw. $y \in \mathbb{Q}$ sein, so sei $q_n = x$ $\forall n \geq 1$ bzw. $p_n = y$ $\forall n \geq 1$.) Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(q_n + p_n) = x + y$ und daher

$$a^x a^y = \left(\lim_{n\to\infty} a^{q_n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a^{p_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{q_n} a^{p_n} \overset{\text{Satz 13 (i)}}{=} \lim_{n\to\infty} a^{q_n + p_n} = a^{x+y}.$$

(ii) – (v) Ohne Beweis

<u>Bemerkung</u>: Es gilt $a^x > 0$ $\forall a > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{Q}$ folgt das aus Satz 12. Es sei nun $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Aus Satz 27 (i) folgt $a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$ und daher $a^x \neq 0$. Ist $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n = x$, so folgt aus Satz 12 $a^{q_n} > 0$ $\forall n \geq 1$ und wegen Satz 20 (i) daher $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n} \geq 0$. Zusammen erhält man $a^x > 0$.