2.5 Divergente Folgen

<u>Def.</u>: Man sagt, die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ divergiert gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn gilt, dass $\forall M>0\ \exists n_0\geq 1\ \forall n\geq n_0: a_n\geq M$ (bzw. $\forall M>0\ \exists n_0\geq 1\ \forall n\geq n_0: a_n\leq -M$) und schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$).

<u>Bspe.</u>: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$ (Zu gegebenem $M>0$ wähle $n_0\geq M$. Dann ist $n\geq M\ \forall n\geq n_0$)

2) Es sei $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} n^p=+\infty$. (Zu gegebenem $M>0$ wähle wieder $n_0\geq M$. Dann ist $n^p\geq n\geq n_0\geq M\ \forall n\geq n_0$.)

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$ (Zu gegebenem $M>0$ wähle $n_0\geq M^2$. Dann ist $\sqrt{n}\geq\sqrt{n_0}\geq M\ \forall n\geq n_0$)

4) Es sei $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{n}=+\infty$. (Übung)

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$ (Die Folge $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ wächst offensichtlich monoton, ist aber – wie in Bsp. 2 in 2.3 gezeigt wurde – keine Cauchyfolge. Wegen Satz 22 ist sie unbeschränkt.)

<u>Satz 28</u> Es seien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c\ (\in\mathbb{R})$ und $\alpha\in\mathbb{R}$.

Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+c_n)=+\infty$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\begin{cases}+\infty & \text{falls } \alpha>0,\\ -\infty & \text{falls } \alpha<0,\end{cases}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=+\infty$,

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha}{a_n}=0$ (wobei verwendet wird, dass $a_n\neq 0$ für fast alle n).

<u>Beweis</u>: Übung

<u>Bemerkungen</u>: 1) Die Resultate von Satz 28 werden oft folgendermaßen kurz zusammengefasst:

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(+\infty)+c=+\infty$, $\alpha\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{falls } \alpha>0\\ -\infty & \text{falls } \alpha<0\end{cases}$, $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$, $\frac{\alpha}{+\infty}=0$.

2) Analog dazu gelten die folgenden Regeln:

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty,\ (-\infty)+c=-\infty,\ \alpha\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty & \text{falls } \alpha>0\\ +\infty & \text{falls } \alpha<0\end{cases},\ (-\infty)(-\infty)=+\infty,\ \frac{\alpha}{-\infty}=0,$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty,\ (-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$$

3) Für die folgenden „unbestimmten Ausdrücke" gibt es aber keine allgemeingültige Regeln, d.h. man muss sie von Fall zu Fall untersuchen:

- $(+\infty)-(+\infty)$, denn:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=+\infty,\ \text{da } n^2-n=n(n-1) \text{ und } \lim_{n\to\infty} n=\lim_{n\to\infty}(n-1)=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left((c+\sqrt{n+1})-\sqrt{n}\right)=c\ \forall c\in\mathbb{R},\ \text{da } \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-n^2)=-\infty,\ \text{da } n-n^2=-(n^2-n).$$

- $\frac{+\infty}{+\infty}$, denn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0,\ \text{da } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{cn^2+1}{n^2}=c\ \forall c>0,\ \text{da } \lim_{n\to\infty}\frac{cn^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{c+\frac{1}{n^2}}{1}=\lim_{n\to\infty}\left(c+\frac{1}{n^2}\right)=c,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=+\infty,\ \text{da } \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty} n=+\infty.$$

- $0\cdot(+\infty)$, denn (mit den selben Bspen wie für $\frac{+\infty}{+\infty}$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot n=0,\ \text{da } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(cn^2+1)=c\ \forall c>0,\ \text{da } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(cn^2+1)=\lim_{n\to\infty}\left(c+\frac{1}{n^2}\right)=c,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2=+\infty,\ \text{da } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2=\lim_{n\to\infty} n=+\infty.$$

Ebenso sind die analogen Ausdrücke mit $-\infty$ statt $+\infty$ unbestimmt.

Lemma 29 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ unendlich viele $n \geq 1$: $|a_n - \alpha| < \varepsilon$,

(ii) $\exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ von $(a_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei zunächst $\varepsilon = 1$. Dann $\exists n_1 \geq 1$: $|a_{n_1} - \alpha| < 1$. Es sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Da es unendlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ gibt, $\exists n_2 > n_1$: $|a_{n_2} - \alpha| < \frac{1}{2}$. Verfahre weiter so. Angenommen, es wurden bereits $n_1 < n_2 < \dots < n_j$ mit $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k}$ für $1 \leq k \leq j$ gefunden. Da es unendlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \alpha| < \frac{1}{j+1}$ gibt, $\exists n_{j+1} > n_j$: $|a_{n_{j+1}} - \alpha| < \frac{1}{j+1}$. Man erhält auf diese Weise eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ mit der Eigenschaft $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k}$ $\forall k \geq 1$ und daher $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists k_0 \geq 1$: $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ $\forall k \geq k_0$. Daher ist $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ $\forall n \in \{n_{k_0}, n_{k_0+1}, n_{k_0+2}, \dots\}$.

Def.: Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wenn eine (und damit beide) der Bedingungen aus Lemma 29 erfüllt sind, wird α Häufungswert (oder Häufungspunkt) der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ genannt.

18.3.2021

Korollar 30 (i) Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, so besitzt sie genau einen Häufungswert, nämlich $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(ii) Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungswert

(iii) Divergiert eine Folge gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so besitzt sie keinen Häufungswert.

Beweis: (i) Aus der Def. des Häufungswerts folgt sofort, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ ein Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist. Wegen Satz 19 (iii) kann es keine weiteren Häufungspunkte geben.

(ii) Das ist eine Umformulierung des Satzes von Bolzano-Weierstrass (Satz 23).

(iii) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bel. Zu $M := |\alpha| + 1 > 0$ gibt es ein $n_0 \geq 1$, sodass $a_n \geq M = |\alpha| + 1 \geq \alpha + 1$ $\forall n \geq n_0$. Das Intervall $(\alpha - 1, \alpha + 1)$ kann daher höchstens die Folgenglieder $a_1, \dots, a_{n_0 - 1}$ enthalten. D.h. es gibt nur endlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \alpha| < 1$ und α kann kein Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sein. Den Fall $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ beweist man analog.

<u>Bspe.</u>: 1) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = (-1)^n$ besitzt die Häufungswerte -1 und 1, da $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{2k} = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{2k-1} = -1$.

2) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

besitzt die Häufungswerte 0 und 1, da $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) = 1$.

3) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei durch das folgende Schema gegeben:

$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$\dots$
$1 + 1/2$	$1 + 1/3$	$1 + 1/4$	$1 + 1/5$	$1 + 1/6$	$\dots$
$2 + 1/2$	$2 + 1/3$	$2 + 1/4$	$2 + 1/5$	$2 + 1/6$	$\dots$
$3 + 1/2$	$3 + 1/3$	$3 + 1/4$	$3 + 1/5$	$3 + 1/6$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

D.h. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = 1 + \frac{1}{3}$, $a_6 = 2 + \frac{1}{2}$, $\dots$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ als Häufungswert. Insbesondere kann eine Folge unendlich viele Häufungswerte besitzen.

<u>Lemma 31</u> Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und H die Menge ihrer Häufungswerte. Ist $H \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt), so existiert $\max H$ (bzw. $\min H$), d.h. es existiert ein größter (bzw. kleinster) Häufungswert.

Beweis: Da nach Voraussetzung $H \neq \emptyset$ und H nach oben beschränkt ist, existiert $s := \sup H$. Nach Satz 5 gibt es einen Häufungswert $h_1 \in H$ mit der Eigenschaft $h_1 > s - \frac{1}{2}$. Da h_1 Häufungswert ist $\exists n_1 \geq 1 : |a_{n_1} - h_1| < \frac{1}{2}$. Wieder nach Satz 5 gibt es einen Häufungswert $h_2 \in H$ mit $h_2 > s - \frac{1}{4}$. Da h_2 Häufungswert ist, $\exists n_2 > n_1 : |a_{n_2} - h_2| < \frac{1}{4}$. Verfahre weiter so: Angenommen es wurden bereits Häufungswerte $h_1, \dots, h_{j-1} \in H$ mit der Eigenschaft $h_k > s - \frac{1}{2k}$ (für $1 \leq k \leq j-1$) und $n_1 < n_2 < \dots < n_{j-1}$ mit der Eigenschaft $|a_{n_k} - h_k| < \frac{1}{2k}$ (für $1 \leq k \leq j-1$) gefunden. Nach Satz 5 gibt es einen Häufungswert h_j mit der Eigenschaft $h_j > s - \frac{1}{2j}$. Da h_j Häufungswert ist $\exists n_j > n_{j-1} : |a_{n_j} - h_j| < \frac{1}{2j}$. Für alle $k \geq 1$ gilt nun

$$a_{n_k} > h_k - \frac{1}{2k} > \left(s - \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2k} = s - \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad a_{n_k} < h_k + \frac{1}{2k} \leq s + \frac{1}{2k} < s + \frac{1}{k}.$$

D.h. es gilt $s - \frac{1}{k} < a_{n_k} < s + \frac{1}{k}$ und daher $s = \lim_{k \to \infty} a_{n_k} \in H$.

(Die 2. Beh. kann analog bewiesen werden)

Def.: Ist die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ nach oben beschränkt und besitzt Häufungswerte, so bezeichnet man ihren größten Häufungswert als Limes superior und schreibt $\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n$ (oder $\limsup_{n \to \infty} a_n$) dafür.

Ist die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ nach unten beschränkt und besitzt Häufungswerte, so bezeichnet man ihren kleinsten Häufungswert als limes inferior und schreibt $\underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n$ (oder $\liminf_{n \to \infty} a_n$) dafür.

Ist die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ nach oben (bzw. unten) unbeschränkt, so setzt man $\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = +\infty$ (bzw. $\underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = -\infty$).

Bemerkung: Ist $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge, so existieren wegen Kor. 30 (ii) und Lemma 31 stets $\underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n$ und $\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n$ und es gilt offensichtlich

$$\underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n \leq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n.$$

Bspe.: 1) $\underline{\lim_{n \to \infty}} (-1)^n = -1$ und $\overline{\lim_{n \to \infty}} (-1)^n = 1$

2) Ist

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

so ist $\underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = 0$ und $\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = 1$

3) Ist

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \geq 1, \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \geq 0, \\ 2 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \geq 0, \end{cases}$$

so besitzt $(a_n)_{n\geq 1}$ die drei Häufungswerte 0, 1 und 2

(denn $\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3k} = 0$, $\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3k+1}\right) = 1$ und

$\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{1}{(3k+2)^2}\right) = 2$) und daher $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 2$.

4) Ist

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist}, \\ n & \text{falls } n \text{ ungerade ist}, \end{cases}$$

so ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Insbesondere braucht eine Folge, die nur einen Häufungswert besitzt, nicht konvergent zu sein.

<u>Satz 32</u> Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ sei eine Folge, die Häufungswerte besitzt und nach oben beschränkt ist. Dann sind äquivalent:

(i) $\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ gilt $a_n < \alpha + \varepsilon$ für fast alle $n \geq 1$ und $a_n > \alpha - \varepsilon$ für unendlich viele $n \geq 1$.

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Da α Häufungswert von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist, gibt es nach Lemma 29 unendlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Für diese $n \geq 1$ ist $a_n - \alpha > -\varepsilon$ und daher $a_n > \alpha - \varepsilon$.

Würde $a_n < \alpha + \varepsilon$ nicht für fast alle $n \geq 1$ gelten, so wäre $a_n \geq \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele n. Bezeichnet $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ die Teilfolge aller Folgenglieder a_n mit der Eigenschaft $a_n \geq \alpha + \varepsilon$ (d.h. $a_{n_k} \geq \alpha + \varepsilon$ $\forall k \geq 1$), so wäre $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ eine beschränkte Folge und würde daher wegen Satz 23 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}})_{\ell\geq 1}$ mit Grenzwert $\beta := \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}}$ besitzen.

Diese wäre ebenfalls eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ und β daher auch Häufungswert von $(a_n)_{n\geq 1}$. Wegen Satz 20 (i) würde $\beta \geq \alpha + \varepsilon > \alpha$ gelten, ein Widerspruch.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gilt $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ (und daher $-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$ und somit $|a_n - \alpha| < \varepsilon$) für unendlich viele $n \geq 1$, d.h. α ist Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.

Angenommen, es würde einen Häufungswert $\beta > \alpha$ geben. Zu $\frac{\beta - \alpha}{2} > 0$ würde es dann unendlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \beta| < \frac{\beta-\alpha}{2}$ geben. Für diese $n \geq 1$ würde $-\frac{\beta-\alpha}{2} < a_n - \beta$ und daher

$$a_n > \beta - \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$$

gelten. D.h. die erste Bedingung aus (ii) wäre für $\varepsilon = \frac{\beta-\alpha}{2}$ verletzt, Widerspruch.

<u>Bemerkung</u>: Völlig analog zeigt man: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge, die Häufungspunkte besitzt und nach unten beschränkt ist, so sind äquivalent:

(i) $\alpha = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ gilt $a_n > \alpha - \varepsilon$ für fast alle $n \geq 1$ und $a_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \geq 1$.