3. Reelle Funktionen

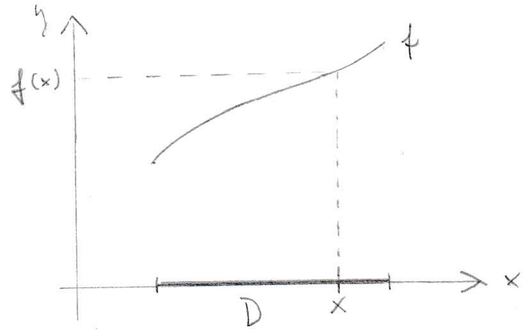
3.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir grundlegende Tatsachen über Funktionen f der Gestalt $f: D \to \mathbb{R}$ wiederholen. Dabei heißt $D \subseteq \mathbb{R}$ Definitionsmenge (und wird meistens ein Intervall sein). Die Menge

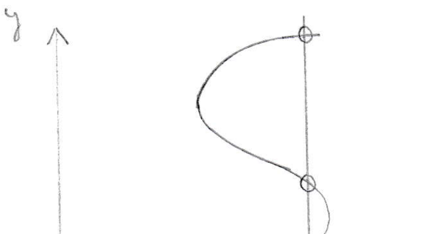
$$f(D) = \{ f(x) \mid x \in D \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : f(x) = y \}$$

heißt Wertebereich der Funktion f.

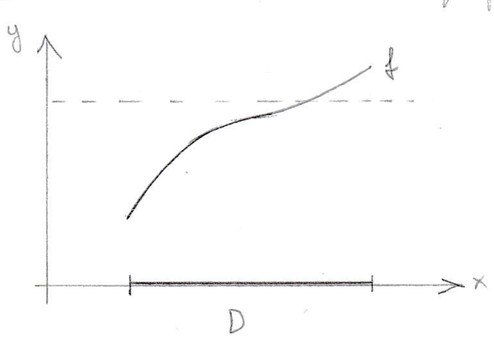
Reelle Funktionen werden durch ihren Graphen veranschaulicht.
Ist $f: D \to \mathbb{R}$, so bezeichnet $G_f = \{ (x,y) \mid x \in D, y = f(x) \}$ den Graphen von f.

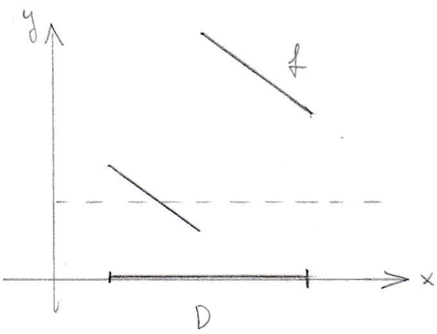


Nicht jede Kurve in der x-y-Ebene ist Graph einer Funktion $f: D(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Die Kurve unten ist z.B. nicht Graph einer Funktion, da einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet werden.

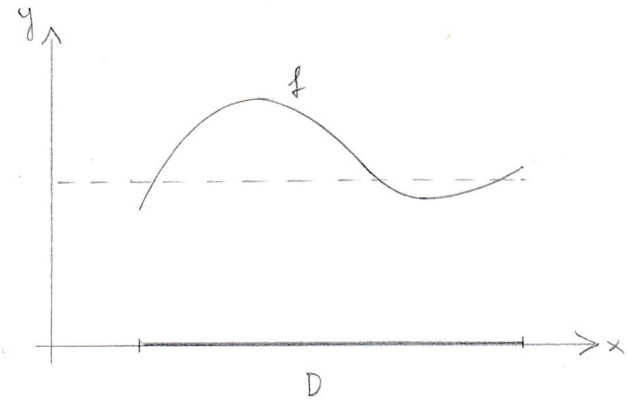


Am Graphen einer Funktion kann man viele ihrer Eigenschaften ablesen, die nachfolgenden beiden Funktionen sind z.B. injektiv, da jede Parallele zur x-Achse den Graphen höchstens einmal schneidet:

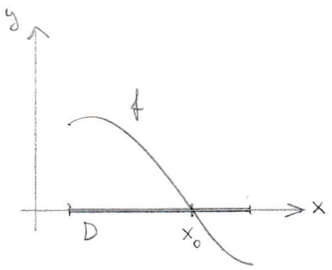




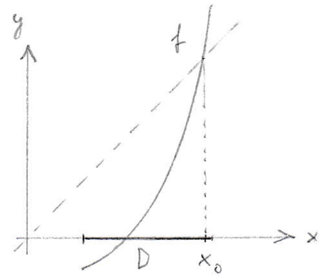
Die nachfolgende Funktion ist nicht injektiv, da es Parallele zur x-Achse gibt, die den Graphen mehrmals schneiden:



Weiters kann man z.B. erkennen:

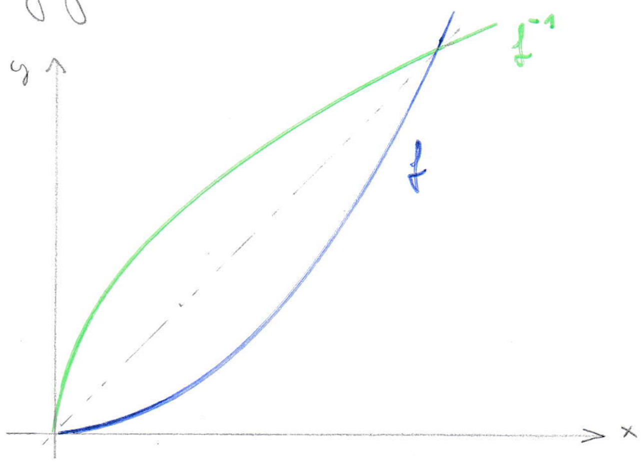


x_0 ist Nullstelle von f (dh. $f(x_0)=0$) da der Graph von f bei x_0 die x-Achse schneidet



x_0 ist Fixpunkt von f (dh. $f(x_0)=x_0$) da der Graph von f bei x_0 die 1. Mediane schneidet

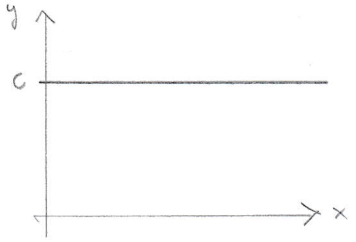
Ist die Abbildung $f: D \to \mathbb{R}$ injektiv, so ist $f: D \to W$ (mit $W = f(D)$) bijektiv und man definiert die Umkehrabbildung oder zu f inverse Funktion f^{-1} durch $f^{-1}: W \to D$, $f^{-1}(y) = x$ wenn $f(x) = y$. Den Graphen von f^{-1} erhält man durch Spiegelung an der 1. Mediane (die durch die Gleichung $y = x$ gegeben ist):



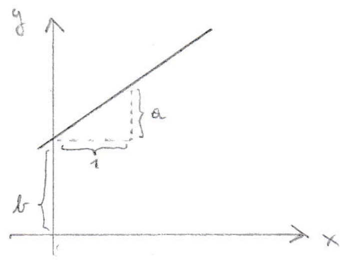
Konvention: Solange nichts anderes festgelegt wird, soll eine Funktion stets den größtmöglichen Definitionsbereich besitzen.

Beispiele (für Funktionen): 1) Konstante Funktionen $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$ (für ein $c \in \mathbb{R}$).

2) Lineare Funktionen $f(x) = ax + b \ \forall x \in \mathbb{R}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$).



Konstante Funktion $f(x) = c$



Lineare Funktion $f(x) = ax + b$

3) Polynomfunktionen (oder kurz: Polynome), d.h. Funktionen der Gestalt

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \quad \text{mit } c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Die Größen $c_0, c_1, \dots, c_n$ werden Koeffizienten genannt.

Def.: Ist beim Polynom $p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ der Koeffizient $c_n \neq 0$, so sagt man, der Grad des Polynoms p sei n. Dafür schreibt man $\operatorname{grad} p = n$ (oder $\deg p = n$). Zusätzlich setzt man $\operatorname{grad} 0 = -\infty$. (D.h. das Nullpolynom soll Grad $-\infty$ haben.)

Bemerkungen: 1) Ist $\operatorname{grad} p = 1, 2$ bzw. 3, so spricht man von einem linearen, quadratischen bzw. kubischen Polynom.

2) Mit den Konventionen $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $\max\{n, -\infty\} = \max\{-\infty, n\} = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\max\{-\infty, -\infty\} = -\infty$ gelten die beiden Rechenregeln

$$\operatorname{grad}(p \cdot q) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q \quad \text{und} \quad \operatorname{grad}(p+q) \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\}$$

für alle Polynomfunktionen p und q.

3) Sind f und g zwei Polynomfunktionen und $g \neq 0$, so kann man Division mit Rest durchführen. D.h. es gibt eindeutig bestimmte Polynomfunktionen q und r mit den beiden Eigenschaften $f = qg + r$ und $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$. (Dabei gilt die Konvention $-\infty < n \ \forall n \in \mathbb{N}$.)

22.3.2021

Lemma 33 Es sei $p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ (mit $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$).

Ist $p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.

Beweis: Angenommen, es wäre $c_n > 0$. Für $x \geq 1$ ist dann

$$0 = p(x) = x^n \left(c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \dots + \frac{c_0}{x^n} \right)$$

und daher

$$0 = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \dots + \frac{c_0}{x^n} \geq c_n - \left| \frac{c_{n-1}}{x} \right| - \dots - \left| \frac{c_0}{x^n} \right|$$

$$= c_n - \left(\frac{|c_{n-1}|}{x} + \dots + \frac{|c_0|}{x^n} \right) \geq c_n - \frac{|c_{n-1}| + \dots + |c_0|}{x}$$

(denn $x \geq 1 \Rightarrow x^i \geq x \ \forall i \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^i} \ \forall i \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^i} \geq -\frac{1}{x} \ \forall i \geq 1$).

Daraus folgt aber

$$c_n \leq \frac{|c_{n-1}| + \dots + |c_0|}{x} \quad \text{und daher} \quad x \leq \frac{|c_{n-1}| + \dots + |c_0|}{c_n} \quad \forall x \geq 1.$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch.

Ist $c_n < 0$, so betrachte $0 = -p(x) = -c_n x^n - c_{n-1} x^{n-1} - \dots - c_1 - c_0$.

Nach dem bereits bewiesenen Fall ist $-c_n = \dots = -c_0 = 0$ und daher ebenfalls $c_n = \dots = c_0 = 0$.

Satz 34 Es seien $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ zwei Polynomfunktionen und $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Gilt $p(x) = q(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$, so ist $n = m$ und $a_i = b_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Beweis: OBdA sei $n \geq m$. Setze $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$. Dann ist

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und daher} \quad \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) x^i = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Wegen Lemma 33 folgt $b_n - a_n = \dots = b_0 - a_0 = 0$ und somit $a_i = b_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Bemerkung: Satz 34 rechtfertigt Koeffizientenvergleich: Hat man

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \ \forall x \in \mathbb{R}$$

bewiesen, so muss $a_i = b_i$ (für $0 \leq i \leq n$) gelten.

Weitere Beispiele für Funktionen: 4) Rationale Funktionen $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynomfunktionen (und $q \neq 0$) sind, d.h.

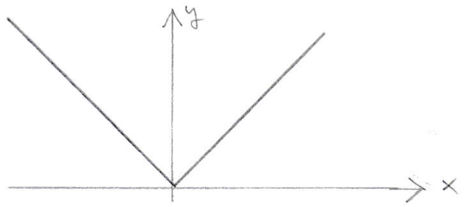
$$f(x)=\frac{a_m x^m+\dots+a_1x+a_0}{b_n x^n+\dots+b_1x+b_0} \quad \text{mit } a_0,\dots,a_m,b_0,\dots,b_n \in \mathbb{R}.$$

Der Definitionsbereich von $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ ist $\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)=0\}$.

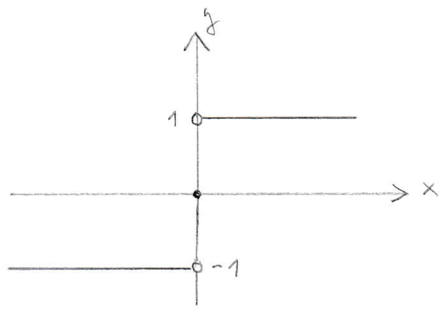
Bemerkung: Die beiden Funktionen $f(x)=1+x^2$ und $g(x)=\frac{1-x^4}{1-x^2}$ stimmen auf $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ überein (da $1-x^4=(1+x^2)(1-x^2)$). Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}$, der von g ist aber $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$.

5) $f(x)=|x|$ (Betragsfunktion)

6) $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{falls } x>0\\ 0 & \text{falls } x=0\\ -1 & \text{falls } x<0\end{cases}$ (Signumfunktion)



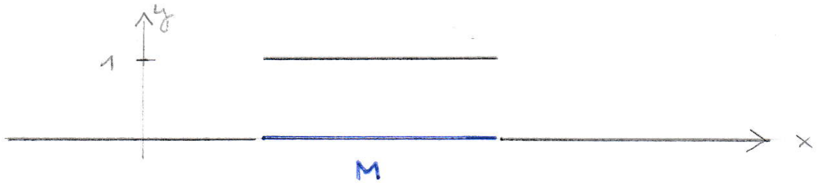
Betragsfunktion



Signumfunktion

7) charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion) einer Menge $M\subseteq\mathbb{R}$

$$c_M(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x\in M,\\ 0 & \text{falls } x\notin M.\end{cases}$$

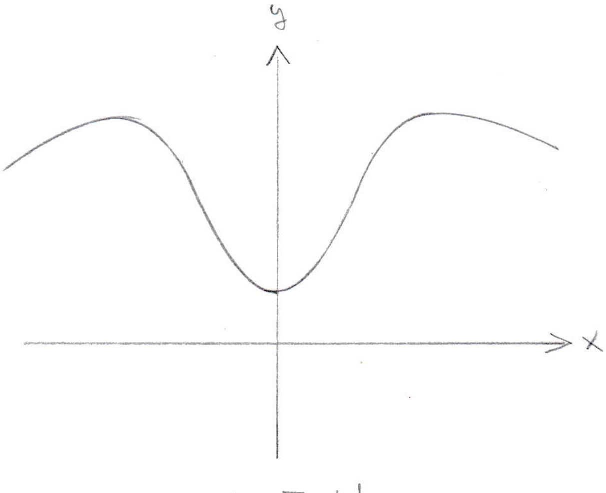


8) Dirichletfunktion (Spezialfall von 7) für $M=\mathbb{Q}$):

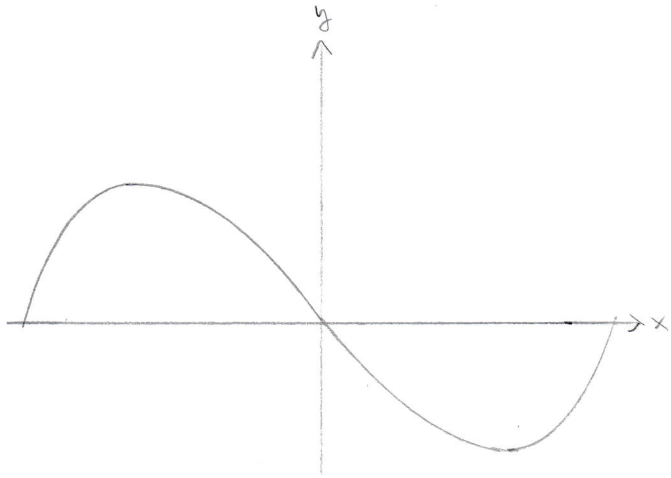
$$c_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{falls } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Def.: Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$ mit $-D=D$ (d.h. $x\in D \Leftrightarrow -x\in D$) und $f: D\to\mathbb{R}$. Die Funktion f heißt gerade (bzw. ungerade) wenn $f(-x)=f(x)\ \forall x\in D$ (bzw. $f(-x)=-f(x)\ \forall x\in D$).

Bemerkung: Der Graph einer geraden Funktion liegt symmetrisch zur y-Achse, der Graph einer ungeraden Funktion symmetrisch zum Nullpunkt.



gerade Funktion



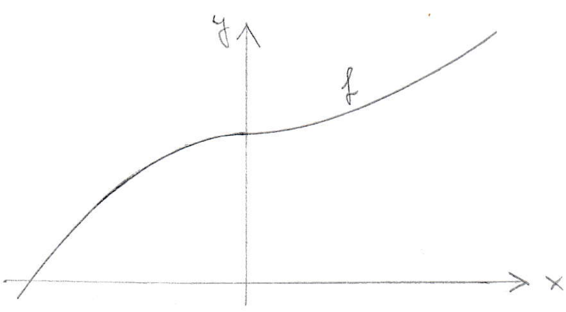
ungerade Funktion

Beispiele: 1) Gerade sind alle geraden Potenzen, d.h. $f(x) = 1 \ (= x^0), x^2, x^4, \dots$ und $|x|$ und alle ihre Linearkombinationen, d.h. $p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ (mit $a_0, a_2, a_4, \dots, a_{2n} \in \mathbb{R}$).

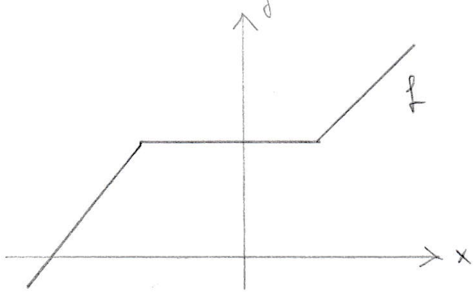
2) Ungerade sind alle ungeraden Potenzen, d.h. $f(x) = x, x^3, x^5, \dots$ und $\operatorname{sgn} x$ und alle ihre Linearkombinationen, d.h. $p(x) = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1}$ (mit $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1} \in \mathbb{R}$).

Def.: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt

- monoton wachsend, wenn für $x, y \in D$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$,
- streng monoton wachsend, wenn für $x, y \in D$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- monoton fallend, wenn für $x, y \in D$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$,
- streng monoton fallend, wenn für $x, y \in D$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.



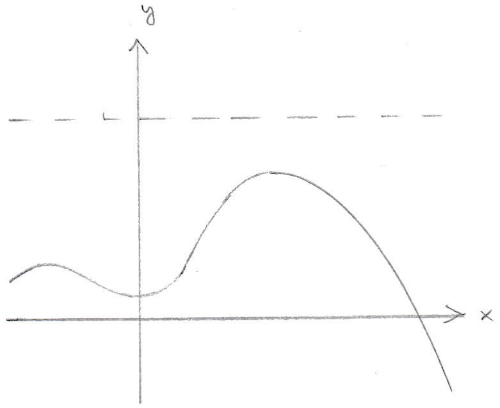
streng monoton wachsende Funktion



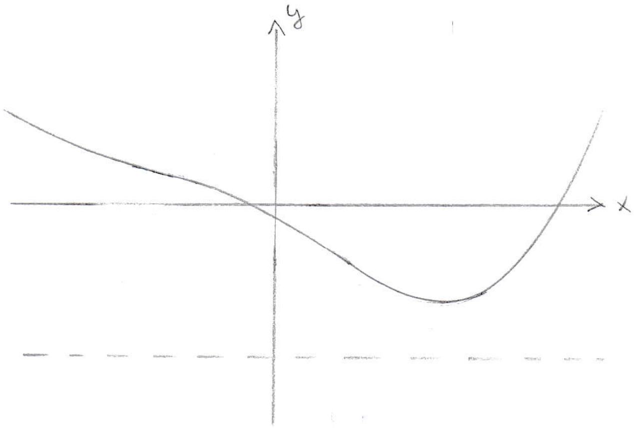
monoton wachsende Funktion

Bsp.: Für jedes $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ streng monoton wachsend (Lemma 11).

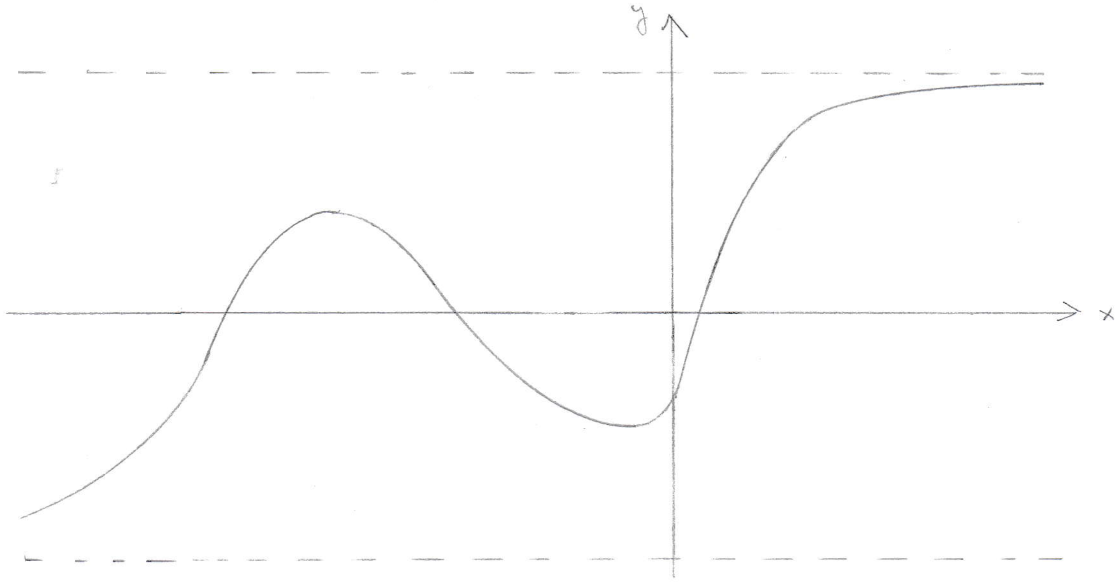
Def.: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt bzw. beschränkt) wenn ihre Wertemenge $f(D)$ nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt bzw. beschränkt) ist.



nach oben beschränkte Funktion



nach unten beschränkte Funktion



beschränkte Funktion

Beispiele: 1) $f(x) = x^2$ ist nach unten beschränkt (da $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$).

2) $f(x) = -x^4 + 1$ ist nach oben beschränkt (da $-x^4 + 1 \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$).

3) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist beschränkt (da $1 \leq 1 + x^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$).