3.2 Allgemeine Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

<u>Satz 35</u> Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Die Potenzfunktion $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ ist positiv (d.h. $f(x) > 0 \ \forall x > 0$) und

(i) streng monoton wachsend falls $\alpha > 0$,

(ii) streng monoton fallend falls $\alpha < 0$.

<u>Beweis</u>: Dass $x^\alpha > 0 \ \forall x > 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ wurde in einer Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.4 bewiesen.

(i) Es sei $0 < x < y$ ($\Rightarrow \frac{y}{x} > 1$). Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ gilt $x^\alpha < y^\alpha$ nach Satz 14(i). Es sei nun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nach Satz 3 $\exists p \in (0, \alpha) \cap \mathbb{Q}$ und nach Satz 25 gibt es eine Folge $(q_n)_{n \geq 1}$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$. Dann muss $\exists n_0 \geq 1$ sodass $q_n > p \ \forall n \geq n_0$. Daraus folgt

$$1 = \left(\frac{y}{x}\right)^0 \overset{\text{Kor. 15(i)}}{<} \left(\frac{y}{x}\right)^p \overset{\text{Kor. 15(i)}}{<} \left(\frac{y}{x}\right)^{q_n} \quad \forall n \geq n_0$$

und daher

$$\frac{y^\alpha}{x^\alpha} \overset{\text{Satz 27(v)}}{=} \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^{q_n} \overset{\text{Satz 20(i)}}{\geq} \left(\frac{y}{x}\right)^p > 1,$$

woraus $x^\alpha < y^\alpha$ folgt.

(ii) Es sei wieder $0 < x < y$. Dann ist $\frac{1}{x^\alpha} \overset{\text{Satz 27(ii)}}{=} x^{-\alpha} \overset{(i)}{<} y^{-\alpha} \overset{\text{Satz 27(ii)}}{=} \frac{1}{y^\alpha}$,

woraus $x^\alpha > y^\alpha$ folgt.

<u>Satz 36</u> Es sei $a > 0$ fest gewählt. Die Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ist positiv und

(i) streng monoton wachsend falls $a > 1$,

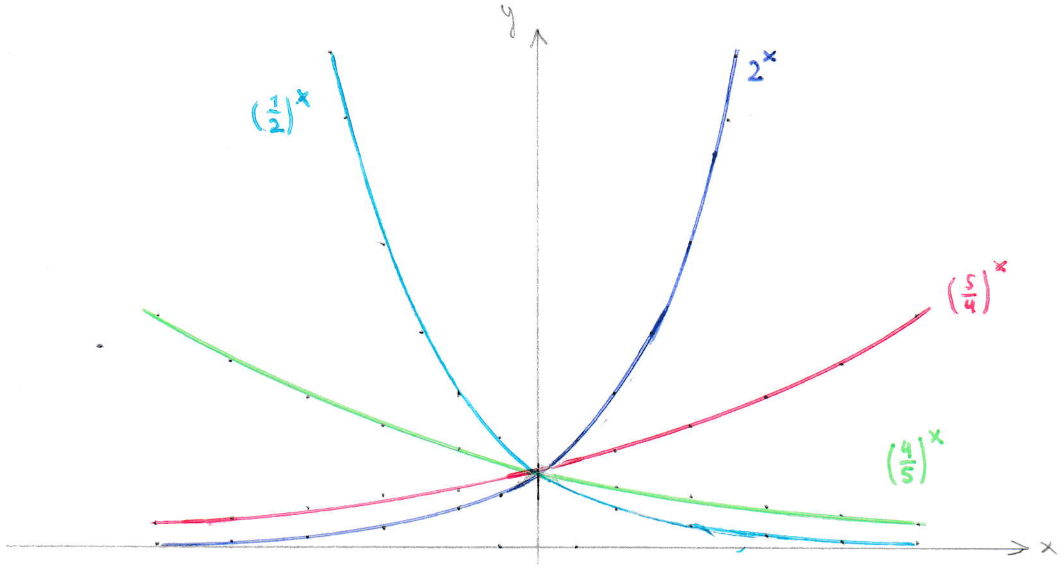
(ii) streng monoton fallend falls $0 < a < 1$.

<u>Beweis</u>: Dass $a^x > 0 \ \forall a > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ folgt wieder aus der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.4.

(i) Es sei $x < y$. Aus Satz 35 (i) folgt $1 = 1^{y-x} < a^{y-x} \overset{\text{Satz 27(ii)}}{=} \frac{a^y}{a^x}$ und daher $a^x < a^y$.

(ii) Es sei wieder $x < y$. Da $\frac{1}{a} > 1$ folgt $\frac{1}{a^x} \overset{\text{Satz 27(v)}}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^x \overset{(i)}{<} \left(\frac{1}{a}\right)^y \overset{\text{Satz 27(v)}}{=} \frac{1}{a^y}$

woraus $a^x > a^y$ folgt.



<u>Lemma 37</u> Es sei $a>0$ und $x\in\mathbb{R}$. Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (für eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen), dann gilt $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

<u>Beweis:</u> Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, so zeigt man analog zum Beweis von Lemma 26, dass $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

Ist $x\in\mathbb{R}$ beliebig, so ist $(x_n - x)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und daher

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n-x)+x} \overset{\text{Satz 27 (i)}}{=} \lim_{n\to\infty} a^{x_n-x}\cdot a^x$$

$$\overset{\text{Satz 21 (iii)}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} a^{x_n-x}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a^x\right) = 1\cdot a^x = a^x$$

<u>Satz 38</u> Es sei $b>1$ und $a>0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $x\in\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $b^x = a$.

<u>Beweis:</u> Es gilt $0<\frac{1}{b}<1$ und daher $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^n = 0$. Daher gibt es ein $m\geq 1$ mit der Eigenschaft $\left(\frac{1}{b}\right)^m \leq \min\{a,\frac{1}{a}\}$ und daher $b^{-m}\leq a\leq b^m$.

Setze nun $x_1 = -m$, $y_1 = m$ und $z_1 = \frac{x_1+y_1}{2}$ $(=0)$. Dann gilt $b^{x_1}\leq a\leq b^{y_1}$ und $b^{x_1}\leq b^{z_1}\leq b^{y_1}$. Also ist entweder $a\in[b^{x_1}, b^{z_1}]$ oder $a\in(b^{z_1}, b^{y_1}]$. Im ersten Fall setze $x_2 = x_1$, $y_2 = z_1$, im zweiten Fall setze $x_2 = z_1$, $y_2 = y_1$. In beiden Fällen sei $z_2 = \frac{x_2+y_2}{2}$.

Verfahre weiter so: Ist das Intervall $[x_n, y_n]$ mit $b^{x_n}\leq a\leq b^{y_n}$ und $b^{x_n}\leq b^{z_n}\leq b^{y_n}$ (und $z_n = \frac{x_n+y_n}{2}$) bereits gefunden, so wähle

$[x_{n+1}, y_{n+1}] = [x_n, z_n]$ falls $a \in [b^{x_n}, b^{z_n}]$ und $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [z_n, y_n]$ falls $a \in (b^{z_n}, b^{y_n}]$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 4) $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$.

Offenbar gelten $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$ und wegen Satz 20 (ii) und Lemma 37 folgt $b^x = \lim_{n\to\infty} b^{x_n} \leq a \leq \lim_{n\to\infty} b^{y_n} = b^x$ und daher $b^x = a$. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus der (strengen) Monotonie der Exponentialfunktion (Satz 36 (ii)).

<u>Def.</u>: Es sei $b > 1$ und $a > 0$. Die nach Satz 38 eindeutig bestimmte Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $b^x = a$ wird als Logarithmus von a zur Basis b bezeichnet. Wir schreiben dafür $x = {}_b\log a$.

23.3.2021

<u>Bemerkungen</u>: 1) Von besonderer Bedeutung ist der Logarithmus zur Basis e. Wir schreiben dafür kurz $\log x$. (Oft findet man dafür auch die Bezeichnung $\ln x$ für logarithmus naturalis.)

2) Für $x \leq 0$ ist ${}_b\log x$ nicht definiert.

<u>Satz 39</u> Es sei $b > 1$. Dann gelten:

(i) ${}_b\log b = 1$,

(ii) ${}_b\log 1 = 0$,

(iii) ${}_b\log(xy) = {}_b\log x + {}_b\log y \quad \forall x, y > 0$,

(iv) ${}_b\log \frac{x}{y} = {}_b\log x - {}_b\log y \quad \forall x, y > 0$,

(v) ${}_b\log x^y = y \cdot {}_b\log x \quad \forall x > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$,

(vi) Die Logarithmusfunktion $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = {}_b\log x$ ist streng monoton wachsend.

(vii) ${}_b\log x < 0 \ \forall x \in (0, 1)$ und ${}_b\log x > 0 \ \forall x > 1$.

<u>Beweis</u>: (i) Folgt aus $b^1 = b$.

(ii) Folgt aus $b^0 = 1$

(iii) Wenn $\xi = {}_b\log x$, $\zeta = {}_b\log y$ und $\eta = {}_b\log(xy)$, dann gelten
$b^\xi = x$, $b^\zeta = y$ und $b^\eta = xy$ und daher $b^\eta = xy = b^\xi b^\zeta \overset{\text{Satz 27(i)}}{=} b^{\xi+\zeta}$.

Aus der Eindeutigkeit von ${}_b\log(xy)$ folgt ${}_b\log(xy) = \eta = \xi + \zeta = {}_b\log x + {}_b\log y$

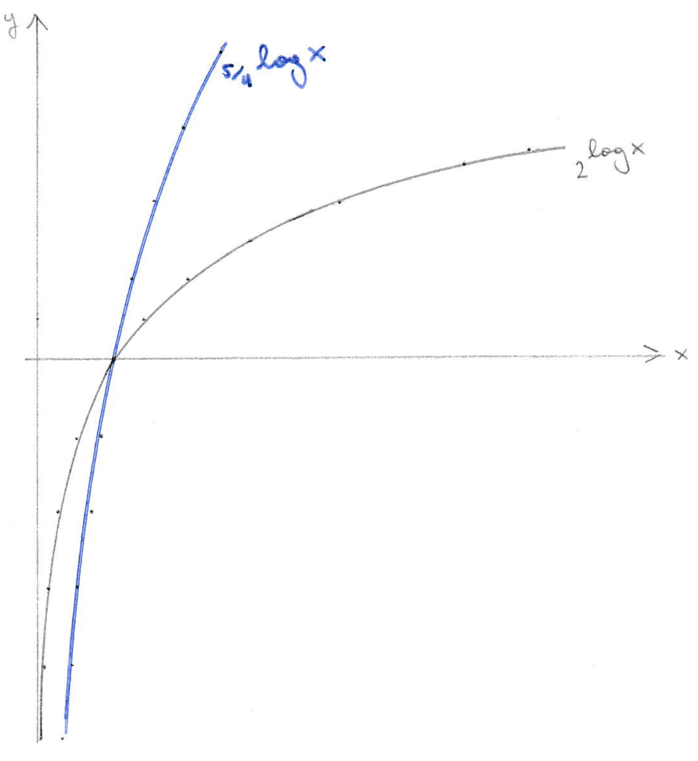
(iv) Beweist man sehr ähnlich wie (iii). (Verwende Satz 27 (ii) statt Satz 27 (i).)

(v) Beweist man ähnlich wie (iii). (Verwende Satz 27 (iii) statt Satz 27 (i).)

(vi) Es sei $0 < x < y$. Wäre ${}_b\log x \geq {}_b\log y$, so würde wegen Satz 36 (i) folgen, dass $x = b^{{}_b\log x} \geq b^{{}_b\log y} = y$, ein Widerspruch.

(vii) Ist $0 < x < 1$, so ist ${}_b\log x \overset{(vi)}{<} {}_b\log 1 \overset{(ii)}{=} 0$.

Ist $x > 1$, so ist ${}_b\log x \overset{(vi)}{>} {}_b\log 1 = 0$.



Satz 40 (i) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $a^x = e^{x \log a}$,

(ii) Für $a, b > 1$ und $x > 0$ ist ${}_a\log x = \frac{{}_b\log x}{{}_b\log a}$.

Beweis: (i) Aus $a = e^{\log a}$ folgt $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$.

(ii) Aus $x = a^{{}_a\log x}$ folgt

$${}_b\log x = {}_b\log\left(a^{{}_a\log x}\right) \overset{\text{Satz 39 (v)}}{=} ({}_a\log x) \cdot ({}_b\log a).$$