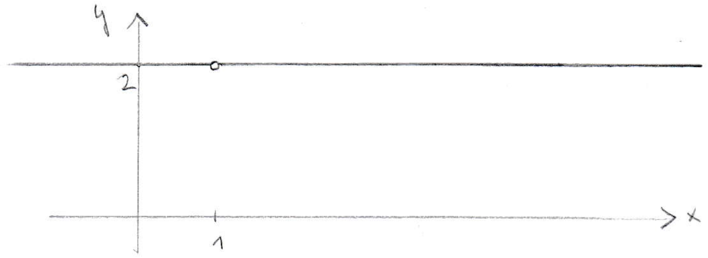
3.3 Grenzwerte von Funktionen

Def.: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Für ein $\xi \in \mathbb{R}$ (das nicht unbedingt in D liegen muss) soll gelten, dass $(\xi - c, \xi + c) \setminus \{\xi\} \subseteq D$ für ein gewisses $c > 0$. Man sagt, die Funktion f konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \xi$ wenn gilt, dass $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass $0 < |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Man schreibt dafür $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = a$.

Bsp.: 1) Es sei $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x-1}$. In diesem Fall ist $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\xi = 1$. Es gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, denn für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\delta > 0$ bel.

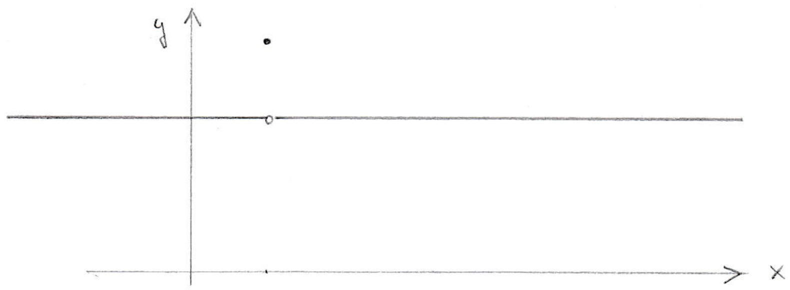
gilt $|f(x) - 2| = |2 - 2| = 0 < \varepsilon$.



2) Es sei

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Auch hier gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. Der Beweis ist derselbe wie in Bsp. 1).



Merke: Der Wert von f bei ξ ist für den Wert von $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ irrelevant.

3) Es sei $f: \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}$.

Für $x \notin \{1, -1\}$ ist $f(x) = x^2 + 1$. Es gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$:

Hier ist $\xi = 1$ und man kann z.B. $c = 1$ wählen. (Tatsächlich kann jedes $c \in (0, 2)$ verwendet werden.)

Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$. Wegen $\delta < 1$ gilt dann $\delta^2 < \delta$.

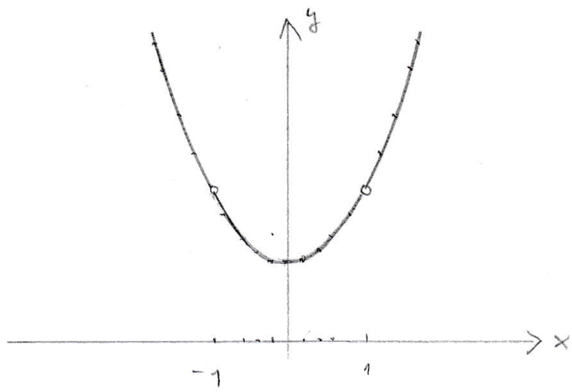
Es sei nun $0 < |x-1| < \delta$. Dann ist $|x+1| = |(x-1)+2| \leq |x-1| + 2$

und daher (beachte $x \notin \{1,-1\}$)

$$|f(x)-2| = |x^2+1-2| = |x^2-1| = |x-1| \cdot |x+1| \leq |x-1| \cdot (|x-1|+2)$$

$$< \delta \cdot (\delta+2) = \delta^2 + 2\delta < 3\delta < \varepsilon$$

Ähnlich kann man $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$ zeigen.



4) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

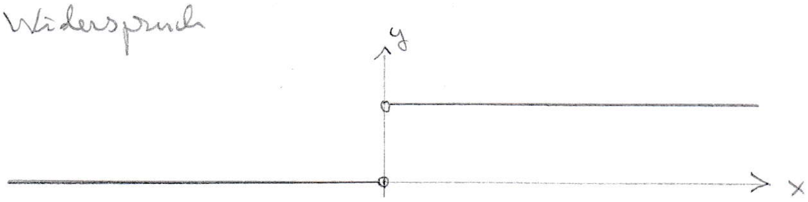
Dann existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht. Es sei $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Wäre $a = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, so

würde es ein $\delta > 0$ geben, derart dass $0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{1}{2}$. Für

$x < 0$ ist $f(x) = 0$ und daher $|a| = |0-a| < \frac{1}{2} \Rightarrow a \leq |a| < \frac{1}{2}$. Für

$x > 0$ ist $f(x) = 1$ und daher $|1-a| < \frac{1}{2} \Rightarrow 1-a \leq |1-a| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a > \frac{1}{2}$, Widerspruch



5) Es sei $f(x) = x \cdot c_{\mathbb{Q}}(x)$. Dann ist $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta = \varepsilon$. Wenn $|x| < \delta$, dann $|x \cdot c_{\mathbb{Q}}(x)| = |x| \cdot \underbrace{|c_{\mathbb{Q}}(x)|}_{\leq 1} \leq |x| < \delta = \varepsilon$.

<u>Bemerkung</u>: Mit den Begriffen Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden wir bald wichtige Anwendungen des Grenzwertbegriffs kennenlernen.

25.3.2021

<u>Satz 41</u>: Es seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann gelten:

(i) Wenn der Grenzwert $\lim_{x \to \xi} f(x)$ existiert, ist er eindeutig bestimmt,

(ii) Gilt $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$, so ist $\lim_{x \to \xi} f(x) \leq \lim_{x \to \xi} g(x)$ (wenn beide Grenzwerte existieren),

(iii) Ist $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$ und gilt $\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} g(x)$, dann existiert auch $\lim_{x \to \xi} h(x)$ und $\lim_{x \to \xi} h(x) = \lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} g(x)$.

<u>Beweis</u>: (i) Angenommen, es wäre $\lim_{x \to \xi} f(x) = a$ und $\lim_{x \to \xi} f(x) = b$, wobei oBdA $a < b$ gelten soll. Es sei $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Dann würde gelten:

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_1 \text{ (und } x \in D) \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{b-a}{2}$$

(und daher $f(x) < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$) und

$$\exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_2 \text{ (und } x \in D) \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{b-a}{2}$$

(und daher $f(x) > b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$). Für $0 < |x - \xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (und $x \in D$) würde dann $\frac{a+b}{2} < f(x) < \frac{a+b}{2}$ gelten, ein Widerspruch.

(ii) Es bezeichne $\lim_{x \to \xi} f(x) = a$ und $\lim_{x \to \xi} g(x) = b$. Angenommen, es wäre $a > b$.

Es sei $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Dann würde gelten:

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_1 \text{ (und } x \in D) \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{a-b}{2}$$

(und daher $f(x) > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$) und

$$\exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_2 \text{ (und } x \in D) \Rightarrow |g(x) - b| < \frac{a-b}{2}$$

(und daher $g(x) < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$). Für $0 < |x - \xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (und $x \in D$) würde dann $g(x) < \frac{a+b}{2} < f(x)$ gelten, ein Widerspruch.

(iii) Es bezeichne $a := \lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} g(x)$ und es sei $\varepsilon > 0$.

Dann gelten

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_1, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{(und daher } f(x) > a - \varepsilon)$$

und

$$\exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_2, x \in D \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon \quad \text{(und daher } g(x) < a + \varepsilon).$$

Für $0 < |x-\xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \in D$ gilt dann

$$a - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon,$$

woraus $-\varepsilon < h(x) - a < \varepsilon$ und daher $|h(x) - a| < \varepsilon$ folgt. Also gilt $\lim\limits_{x \to \xi} h(x) = a$.

<u>Satz 42</u> Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \xi} g(x)$ mögen existieren. Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) + g(x))$ existiert und $\lim\limits_{x\to\xi} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) + \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) \cdot g(x))$ existiert und $\lim\limits_{x\to\xi} (f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to\xi} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to\xi} g(x)\right)$,

(iii) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert $\lim\limits_{x\to\xi} (\alpha \cdot f(x))$ und $\lim\limits_{x\to\xi} (\alpha f(x)) = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$,

(iv) Ist $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) \neq 0$, dann existiert $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ und

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\xi} f(x)}{\lim\limits_{x\to\xi} g(x)}.$$

<u>Beweis</u>: Es bezeichne $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = b$.

(i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists\, \delta_1 > 0 : \; 0 < |x - \xi| < \delta_1,\ x \in D \implies |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\exists\, \delta_2 > 0 : \; 0 < |x - \xi| < \delta_2,\ x \in D \implies |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $0 < |x - \xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \in D$ gilt dann

$$|(f(x) + g(x)) - (a+b)| = |(f(x) - a) + (g(x) - b)|$$
$$\leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) 1. Fall: $a=0$. Es sei $\varepsilon>0$. Dann

$$\exists \delta_1>0: \ 0<|x-\xi|<\delta_1,\ x\in D \ \Rightarrow\ |f(x)|<\frac{\varepsilon}{|b|+1}$$

und

$$\exists \delta_2>0: \ 0<|x-\xi|<\delta_2,\ x\in D \ \Rightarrow\ |g(x)-b|<1 \quad (\Rightarrow |g(x)|<|b|+1).$$

Für $0<|x-\xi|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $x\in D$ gilt dann

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \frac{\varepsilon}{|b|+1}\cdot(|b|+1)=\varepsilon.$$

2. Fall: $b=0$. Gilt aus Symmetriegründen.

3. Fall: $a,b\neq 0$. Es sei $\varepsilon>0$. Dann

$$\exists \delta_1>0: \ 0<|x-\xi|<\delta_1,\ x\in D \ \Rightarrow\ |f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{4|b|}$$

und

$$\exists \delta_2>0: \ 0<|x-\xi|<\delta_2,\ x\in D \ \Rightarrow\ |g(x)-b|<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2|a|},|b|\right\}.$$

(In der zweiten Aussage ist $|g(x)-b|<|b|$ enthalten, woraus $|g(x)|<2|b|$ folgt.) Für $0<|x-\xi|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $x\in D$ gilt dann

$$|f(x)g(x)-ab| = |(f(x)-a)g(x)+(g(x)-b)a|$$

$$\leq |f(x)-a|\cdot|g(x)|+|g(x)-b|\cdot|a|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4|b|}\cdot 2|b| + \frac{\varepsilon}{2|a|}\cdot|a| = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(iii) Es sei $g: D\to\mathbb{R}$, $g(x)=\alpha$. Dann ist $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=\alpha$.

(Wähle $\delta>0$, derart dass $(\xi-\delta,\xi+\delta)\setminus\{\xi\}\subseteq D$. Für $0<|x-\xi|<\delta$ gilt dann $|g(x)-\alpha|=|\alpha-\alpha|=0<\varepsilon$ für $\varepsilon>0$ beliebig.)

Die Behauptung folgt nun aus (ii).

(iv) Da $b\neq 0$ gilt:

Zu $\frac{|b|}{2}>0$ $\exists c>0$ sodass $0<|x-\xi|<c,\ x\in D \Rightarrow |g(x)-b|<\frac{|b|}{2}$,

woraus $|g(x)|>\frac{|b|}{2}$ folgt. Insbesondere ist $g(x)\neq 0$ für $0<|x-\xi|<c$, $x\in D$ und es gilt $\frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|b|}$.

Wir zeigen als ersten Schritt $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann

$\exists \delta > 0$ (o B d A mit $\delta < c$) sodass $0 < |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow |g(x) - b| < \frac{\varepsilon b^2}{2}$.

Für $0 < |x - \xi| < \delta$, $x \in D$ gilt dann

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - g(x)|}{|b g(x)|} < \frac{2}{b^2} |g(x) - b| < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon b^2}{2} = \varepsilon.$$

Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii) denn

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) \overset{(ii)}{=} \left(\lim_{x \to \xi} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to \xi} \frac{1}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to \xi} f(x)}{\lim\limits_{x \to \xi} g(x)}.$$

<u>Def.</u>: Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ sei auf dem offenen Intervall $(\xi, \xi + c) \subseteq D$ (mit $c > 0$) definiert. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ rechtsseitiger Grenzwert von f (für $x \to \xi+$) wenn gilt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ sodass } 0 < x - \xi < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x \to \xi+} f(x) = a$.

Ist die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $(\xi - c, \xi) \subseteq D$ definiert (mit $c > 0$), so heißt $a \in \mathbb{R}$ linksseitiger Grenzwert von f (für $x \to \xi-$) wenn gilt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ sodass } 0 < \xi - x < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x \to \xi-} f(x) = a$.

<u>Beispiele</u>: 1) Es sei $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ Dann gilt $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$

und $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$. (Es sei $\varepsilon > 0$. Für $\delta > 0$ beliebig gilt: Wenn $0 < x < \delta$ dann $f(x) = 1$ und daher $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

Ebenso gilt für $-\delta < x < 0$, dass $f(x) = 0$ und $|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.)

2) Völlig analog überprüft man $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

Bemerkungen: 1) Die Aussagen der Sätze 41 und 42 gelten mutatis mutandis für einseitige Grenzwerte.

2) Offenbar gilt: $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ existiert genau dann wenn sowohl $\lim\limits_{x \to \xi-} f(x)$ als auch $\lim\limits_{x \to \xi+} f(x)$ existieren und übereinstimmen. In diesem Fall gilt dann $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi+} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi-} f(x)$.