## 3.4 Stetigkeit – Definition und grundlegende Eigenschaften

<u>Def.:</u> Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$. Dann heißt $f$ stetig in $\xi$, wenn gilt, dass $\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0: |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Die Funktion $f$ heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $\xi \in D$ stetig ist.

<u>Bemerkung:</u> Ist $D$ ein offenes Intervall, so ist $f$ genau dann stetig in $\xi \in D$ wenn $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Ist $a$ linksseitiger Randpunkt des Intervalls $D$ (also $D = [a,b]$, $D = [a,b)$ oder $D = [a, +\infty)$), so ist $f$ genau dann stetig in $a$, wenn $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Ist $b$ rechtsseitiger Randpunkt des Intervalls $D$, so ist $f$ genau dann stetig in $b$, wenn $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

<u>Lemma 43</u> Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $a$ und $f(a) > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) > 0 \;\forall x \in [a, a+\delta)$.

<u>Beweis:</u> Zu $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0 \;\exists \delta > 0: |x - a| < \delta, x \in [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$.

Wählt man oBdA ein $\delta < b - a$, so ist $|x - a| < \delta, x \in [a,b] \iff a \le x < a + \delta$ und für diese $x$ gilt dann $f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0$.

<u>Bemerkung:</u> Völlig analog gilt (unter sonst gleichen Voraussetzungen):
Ist $f(a) < 0$, so $\exists \delta > 0: f(x) < 0 \;\forall x \in [a, a+\delta)$.
(Der Beweis erfolgt analog oder durch anwenden von Lemma 43 auf $-f$.)

Ebenso gilt: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $b$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(b) < 0$), so $\exists \delta > 0: f(x) > 0$ (bzw. $f(x) < 0$) $\forall x \in (b - \delta, b]$

Aus dem bisher gesagten folgt sofort: Ist $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig in $\xi \in (a,b)$ und $f(\xi) > 0$ (bzw. $f(\xi) < 0$), so $\exists \delta > 0: f(x) > 0$ (bzw. $f(x) < 0$) für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

12.4.2021

**Satz 44** Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in D$ und $f, g: D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die beide in $\xi$ stetig sind. Dann gelten:

(i) $f+g: D \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ist in $\xi$ stetig,

(ii) $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist in $\xi$ stetig,

(iii) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha \cdot f: D \to \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ in $\xi$ stetig,

(iv) Wenn $g(\xi) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}: D \setminus \{x \in D \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ in $\xi$ stetig.

<u>Beweis</u>: Alle Aussagen folgen sofort aus Satz 42 (bzw. den analogen Aussagen für einseitige Grenzwerte).

Ist z.B. $D$ ein offenes Intervall und $\xi \in D$, so gilt

$$\lim_{x \to \xi} (f(x) + g(x)) \overset{\text{Satz 42 (i)}}{=} \lim_{x \to \xi} f(x) + \lim_{x \to \xi} g(x) = f(\xi) + g(\xi).$$

Beim Beweis von (iv) ist dabei zu beachten: Ist $g(\xi) > 0$, so gibt es nach Lemma 43 (bzw. der Bemerkung danach) ein $\delta > 0$, sodass $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq D$ und $g(x) > 0 \ \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ (und analog $g(x) < 0 \ \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ für ein $\delta > 0$ falls $g(\xi) < 0$).

<u>Beispiele</u>: 1) Konstante Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \ (\in \mathbb{R}) \ \forall x \in \mathbb{R}$ sind stetig. (Es sei $\xi \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ beliebig. Dann ist $|f(x) - f(\xi)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ für $|x - \xi| < \delta$.)

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist stetig. (Es sei $\xi \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Wenn $|x - \xi| < \delta$ dann $|f(x) - f(\xi)| = |x - \xi| < \delta = \varepsilon$.)

3) Alle Polynomfunktionen $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig. Das folgt aus Beispielen 1) und 2) und Satz 44 (i), (ii) und (iii).

4) Sind $p$ und $q \ (\neq 0)$ Polynomfunktionen, so ist die rationale Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ in allen $\xi \in \mathbb{R}$ mit $q(\xi) \neq 0$ stetig. Das folgt aus Bsp 3) und Satz 44 (iv).

5) Die Betragsfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist stetig. Ist $\xi > 0$ (bzw. $\xi < 0$), so ist $f$ in $\xi$ stetig, da $f$ dort mit der stetigen Funktion $x \mapsto x$ (bzw. $x \mapsto -x$) übereinstimmt. Es bleibt zu zeigen, dass $f$ in $\xi = 0$ stetig ist: Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Wenn $|x| = |x - 0| < \delta$ dann $||x| - |0|| = ||x|| = |x| < \delta = \varepsilon$.

6) Die Signumfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ist allen $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Ist $\xi > 0$ (bzw. $\xi < 0$), so ist $f$ in $\xi$ stetig, da $f$ dort mit der stetigen Funktion $x \mapsto 1$ (bzw. $x \mapsto -1$) übereinstimmt. Im Punkt $\xi = 0$ ist $f$ nicht stetig, da $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ nicht existiert.

<u>Satz 45</u> Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $\xi \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist stetig in $\xi$,

(ii) Ist $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $D$, die $\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$ erfüllt, so gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\xi)$.

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0 : |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Wegen $\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$ folgt: $\exists n_0 \geq 1$ sodass $|x_n - \xi| < \delta \quad \forall n \geq n_0$.

Daraus folgt $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, d.h. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\xi)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, $f$ wäre in $\xi$ <u>nicht</u> stetig. Dann würde gelten:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D, |x - \xi| < \delta \quad \text{aber } |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon.$$

Das gilt insbesondere, wenn man $\delta = \frac{1}{n}$ (mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) wählt, d.h.

$$\forall n \geq 1 \quad \exists x_n \in D \text{ sodass } |x_n - \xi| < \frac{1}{n} \quad \text{aber } |f(x_n) - f(\xi)| \geq \varepsilon.$$

D.h. $\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$ aber die Folge $(f(x_n))_{n \geq 1}$ konvergiert nicht gegen $f(\xi)$,

d.h. (ii) ist falsch.

<u>Korollar 46</u> Es sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ist stetig.

<u>Beweis:</u> Das folgt aus Lemma 37 und Satz 45.

Bemerkungen: 1) Ebenso kann man Satz 45 verwenden, um zu zeigen, dass

- Die Betragsfunktion $f(x)=|x|$ stetig ist (wegen Satz 21 (vi)),
- Die Wurzelfunktion $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ stetig ist (wegen Satz 21 (vii)).

2) Umgekehrt kann man Satz 45 verwenden, um Grenzwerte von Folgen zu berechnen: Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $f$ in $a$ stetig, so ist auch

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right),$$

also z. B. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$ oder $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$.

Satz 47 Es seien $D,E\subseteq\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $g:E\to\mathbb{R}$, $f(D)\subseteq E$ und $\xi\in D$. Ist $f$ bei $\xi$ stetig und $g$ bei $f(\xi)$ stetig, so ist $g\circ f: D\to\mathbb{R}$ bei $\xi$ stetig.

Beweis: Es sei $\varepsilon>0$. Da $g$ bei $f(\xi)$ stetig ist,

$$\exists\,\delta>0: |y-f(\xi)|<\delta,\ y\in E \Rightarrow |g(y)-g(f(\xi))|<\varepsilon.$$

Da $f$ bei $\xi$ stetig ist,

$$\exists\,\eta>0: |x-\xi|<\eta,\ x\in D \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\delta$$

und daher $|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)| = |g(f(x))-g(f(\xi))|<\varepsilon$.

Korollar 48: Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und $f,g:D\to\mathbb{R}$ stetig. Dann sind auch die Funktionen $|f|:D\to\mathbb{R}$, $|f|(x)=|f(x)|$,

$$\min\{f,g\}: D\to\mathbb{R},\ \min\{f,g\}(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

und $\max\{f,g\}: D\to\mathbb{R}$, $\max\{f,g\}(x)=\max\{f(x),g(x)\}$

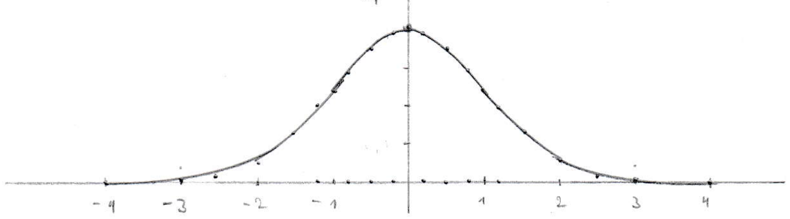
auf $D$ stetig

Beweis: Die Stetigkeit von $|f|$ folgt aus der Stetigkeit der Betragsfunktion und Satz 47. Die Stetigkeit von $\min\{f,g\}$ und $\max\{f,g\}$ folgt aus der Stetigkeit der Betragsfunktion, Satz 44 und den beiden Darstellungen

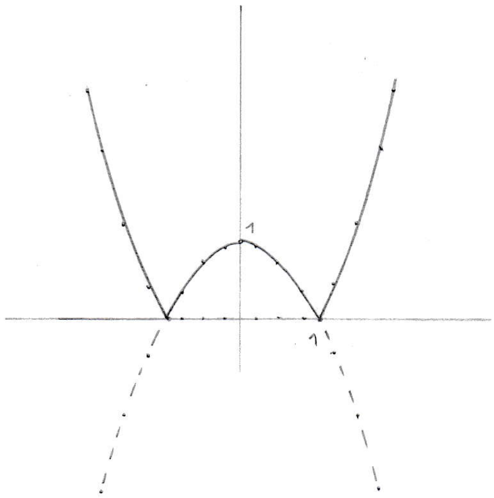
$$\min\{f,g\}=\tfrac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right) \text{ und } \max\{f,g\}=\tfrac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right)$$

(vergleiche Übungsbsp. 27).

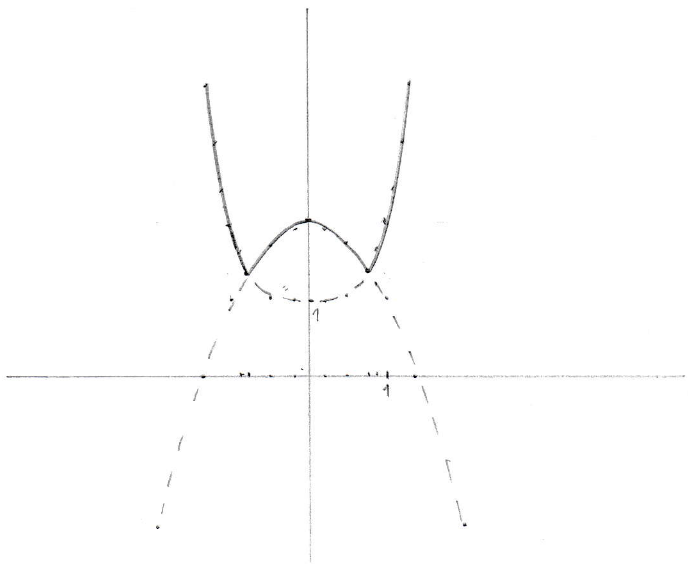
Bsp.: Aus dem bisher bewiesenen folgt die Stetigkeit einer Fülle von Funktionen, z. B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $g(x) = |-x^2+1|$ oder $h(x) = \max\{x^4+1, 2-x^2\}$.




$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$




$$g(x) = |-x^2+1|$$




$$h(x) = \max\{x^4+1, 2-x^2\}$$