3.5 Stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen

Satz 49 (Nullstellensatz) Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $f(a)>0$ und $f(b)<0$. Dann $\exists c\in(a,b): f(c)=0$.

Beweis: Es sei $M:=\{x\in[a,b] \mid f(x)>0\}$. Dann ist $M\neq\emptyset$ (da $a\in M$) und M ist nach oben beschränkt (durch b), dh $\exists c:=\sup M$.

Wir zeigen zunächst $a<c<b$, dh $c\in(a,b)$. Wegen Lemma 43 $\exists\delta>0: f(x)>0 \ \forall x\in[a,a+\delta)$. Daher muss $c\geq a+\delta>a$ gelten.

Ebenso $\exists\delta>0: f(x)<0 \ \forall x\in(b-\delta,b]$ und daher $c\leq b-\delta<b$.

Wir zeigen nun $f(c)=0$: Wäre $f(c)>0$, so würde wegen Lemma 43 ein $\delta>0$ existieren, sodass $f(x)>0 \ \forall x\in[c,c+\delta)$, dh c wäre keine obere Schranke von M, ein Widerspruch. Wäre $f(c)<0$, so würde ein $\delta>0$ existieren, sodass $f(x)<0 \ \forall x\in(c-\delta,c]$, dh c wäre nicht das Supremum von M, ebenfalls ein Widerspruch

Bemerkung: Ebenso gilt: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<0<f(b)$, so $\exists c\in(a,b): f(c)=0$. (Der Beweis verläuft analog oder durch anwenden von Satz 49 auf $-f$.)

Korollar 50 (Zwischenwertsatz) Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

(Dh ist $\min\{f(a),f(b)\}\leq y\leq\max\{f(a),f(b)\}$, so $\exists x\in[a,b]: f(x)=y$.)

Beweis: Ist $f(a)=f(b)$, so muss $y=f(a)=f(b)$ gelten und man kann $x=a$ wählen.

Es sei nun $f(a)>f(b)$. Für $y=f(a)$ (bzw. $y=f(b)$) wähle $x=a$ (bzw. $x=b$)

Es sei nun $y_0\in(f(b),f(a))$. Betrachte die Funktion

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-y_0$. Dann ist g ebenfalls stetig,

$g(a)=f(a)-y_0>0$ und $g(b)=f(b)-y_0<0$. Nach dem Nullstellensatz (dh Satz 49) $\exists x\in(a,b): g(x)=0$, dh $f(x)-y_0=0$ bzw. $f(x)=y_0$.

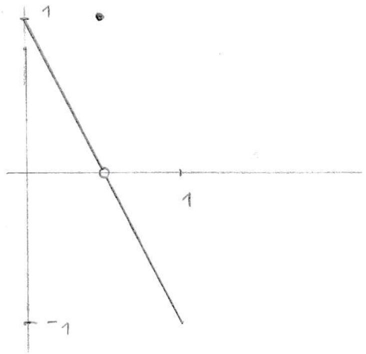
Ist $f(a)<f(b)$, so verläuft der Beweis analog oder durch anwenden des bisher gezeigten auf $-f$.

Bemerkung: Ist f nicht stetig, so sind die letzten beiden Aussagen falsch.

Es sei z.B. $f(x): [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{für } x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ 1 & \text{für } x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Dann ist $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ aber $\nexists\, x \in [0,1]: f(x) = 0$.

Die Funktion f ist allerdings auf $[0,1]$ nicht stetig, da sie bei $1/2$ nicht stetig ist (denn $\lim\limits_{x \to 1/2} f(x) = 0 \neq 1 = f(1/2)$).



13.4.2021

Satz 51 Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.

(D.h. $\exists\, m, M \in \mathbb{R}: m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.)

Beweis: Angenommen, f wäre nach oben unbeschränkt. Dann würde gelten: $\forall n \geq 1 \; \exists\, x_n \in [a,b]: f(x_n) \geq n$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist offenbar beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (Satz 23) besitzt $(x_n)_{n\geq 1}$ daher eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Es sei $\xi := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Wegen Satz 20 (i) ist $\xi \in [a,b]$. Wegen der Stetigkeit von f und Satz 45 muss $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$ gelten. Andererseits folgt aus $f(x_{n_k}) \geq n_k \geq k$, dass $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, ein Widerspruch.

Wäre f nach unten unbeschränkt, so wäre die (ebenfalls stetige) Funktion $-f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$ nach oben unbeschränkt, Widerspruch.

Bemerkung: Es ist von entscheidender Bedeutung, dass das Intervall $[a,b]$ beschränkt und abgeschlossen ist:

Die Funktion $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig und unbeschränkt – das Intervall $(0,1]$ ist allerdings nicht abgeschlossen.

Die Funktion $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig und unbeschränkt – das Intervall $[0,+\infty)$ ist allerdings nicht beschränkt.

Satz 52 Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an, d.h. $\exists c,d\in[a,b]: f(d)\le f(x)\le f(c)\quad \forall x\in[a,b]$.

Beweis: Nach Satz 51 ist f nach oben beschränkt, d.h. $\exists M := \sup_{a\le x\le b} f(x)$.

Angenommen, es wäre $f(x)<M\quad \forall x\in[a,b]$. Betrachte die Funktion

$$g:[a,b]\to\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$$

Die Funktion g ist stetig und $g>0$. Nach Satz 51 ist g nach oben beschränkt, d.h. $\exists N>0: g(x)\le N\quad \forall x\in[a,b]$. Daraus folgt aber

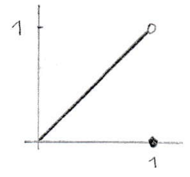
$$\frac{1}{M-f(x)}\le N\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow M-f(x)\ge\frac{1}{N}\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow f(x)\le M-\frac{1}{N}\ \forall x\in[a,b]$$

d.h. M wäre nicht $\sup f([a,b])$, Widerspruch. Also $\exists c\in[a,b]: f(c)=M$.
Die Funktion $-f:[a,b]\to\mathbb{R},\ x\mapsto -f(x)$ ist ebenfalls stetig. Nach dem schon bewiesenen $\exists d\in[a,b]: -f(x)\le -f(d)\quad \forall x\in[a,b]$ und daher $f(x)\ge f(d)\quad \forall x\in[a,b]$.

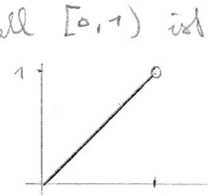
Bemerkung: Sowohl die Stetigkeit von f als auch die Gestalt des Intervalls sind von entscheidender Bedeutung.

1) Es sei
$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x & \text{für } 0\le x<1\\ 0 & \text{für } x=1\end{cases}$$

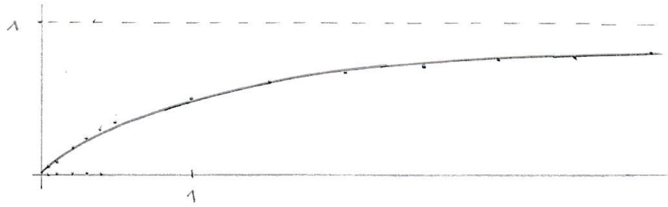
Die Funktion f ist beschränkt, genauer ist $f([0,1])=[0,1)$, es gilt aber $f(x)<1\quad \forall x\in[0,1]$. Die Funktion f ist allerdings nicht stetig.



2) Es sei $f:[0,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=x$. Die Funktion f ist stetig und beschränkt, genauer ist $f([0,1))=[0,1)$ und daher $\sup f([0,1))=1$, es gilt aber $f(x)<1\quad \forall x\in[0,1)$. Das Intervall $[0,1)$ ist allerdings nicht abgeschlossen.



3) Es sei $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Die Funktion f ist stetig und beschränkt, genauer ist $f([0,+\infty)) = [0,1)$ und daher $\sup f([0,+\infty)) = 1$, es gilt aber $f(x) < 1 \ \forall x \in [0,+\infty)$. Das Intervall $[0,+\infty)$ ist allerdings nicht beschränkt.



Korollar 53 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ebenfalls ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall.

Beweis: Nach Satz 52 $\exists c, d \in I : f(d) \leq f(x) \leq f(c) \ \forall x \in I$, d.h. $f(I) \subseteq [f(d), f(c)]$.
Wegen Korollar 50 nimmt f jeden Wert $y \in [f(d), f(c)]$ an
(d.h. $\forall y \in [f(d), f(c)] \ \exists x \in I : f(x) = y$), da gilt: Ist $f(d) \leq y \leq f(c)$, so $\exists x \in I$ mit $\min\{c,d\} \leq x \leq \max\{c,d\} : f(x) = y$. Daher gilt auch $[f(d), f(c)] \subseteq f(I)$.

Bemerkung: Ist die Funktion f konstant, d.h. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \ (\in \mathbb{R}) \ \forall x \in [a,b]$, so gilt $f([a,b]) = \{c\} = [c,c]$.

Satz 54. Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}: f([a,b]) \to [a,b]$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis: Es sei f zunächst streng monoton wachsend. Dann ist f injektiv, d.h. es existiert eine Umkehrfunktion f^{-1}. Nach Korollar 50 ist $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ und daher $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$.
Die Funktion f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend: Ist $f(a) \leq y_1 < y_2 \leq f(b)$, so $\exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Wäre $x_1 \geq x_2$, so würde $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ gelten, ein Widerspruch. Also ist $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$.
Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von f^{-1}. Es sei $\xi \in (a,b)$. Wir zeigen die Stetigkeit von f^{-1} bei $f(\xi)$: Es sei $\varepsilon > 0$, wobei ε oBdA so klein gewählt werden kann, dass $a < \xi - \varepsilon < \xi < \xi + \varepsilon < b$ und daher $f(a) < f(\xi - \varepsilon) < f(\xi) < f(\xi + \varepsilon) < f(b)$.

Wähle nun $\delta < \min\{f(\xi)-f(\xi-\varepsilon),\ f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)\}$. Ist $|y-f(\xi)|<\delta$, so ist

$$y > f(\xi)-\delta > f(\xi)-(f(\xi)-f(\xi-\varepsilon)) = f(\xi-\varepsilon) > f(a)$$

und

$$y < f(\xi)+\delta < f(\xi)+(f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)) = f(\xi+\varepsilon) < f(b),$$

dh $y\in[f(a),f(b)]$ und

$$f(\xi-\varepsilon) < f(\xi)-\delta < y < f(\xi)+\delta < f(\xi+\varepsilon)$$

und daher $\xi-\varepsilon < f^{-1}(y) < \xi+\varepsilon$, dh $|f^{-1}(y)-\xi|<\varepsilon$.

Falls $\xi=a$ oder $\xi=b$ zeigt man die Stetigkeit von f^{-1} in $f(a)$ bzw. $f(b)$ analog (durch eine „einseitige" Überlegung).

Ist f streng monoton fallend, so zeigt man die Behauptung analog oder durch anwenden des bisher gezeigten auf $-f$.

15.4.2021

Korollar 55 Es sei $b>1$. Die Logarithmusfunktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)={}_b\log x$ ist stetig.

Beweis: Es sei $\xi>0$. Wähle y_1,y_2 mit $0<y_1<\xi<y_2$ und setze $x_1={}_b\log y_1$ und $x_2={}_b\log y_2$. Ist $f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=b^x$, so ist $f^{-1}:[y_1,y_2]\to[x_1,x_2]$, $f^{-1}(y)={}_b\log y$. Da f nach Korollar 46 stetig und nach Satz 36(i) streng monoton wachsend ist, ist $f^{-1}={}_b\log$ nach Satz 54 ebenfalls stetig.

Korollar 56 Es sei $\alpha\in\mathbb{R}$. Die Potenzfunktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$ ist stetig.

Beweis: Es ist $x^\alpha=e^{\alpha\log x}$. Nach Korollar 55 ist die Funktion $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\log x$ stetig. Nach Satz 44 (iii) ist daher auch die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\alpha\log x$ stetig. Nach Korollar 46 ist die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=e^y$ stetig. Aus Satz 47 folgt, dass die Potenzfunktion $x^\alpha=e^{\alpha\log x}=(g\circ f)(x)$ in jedem $x>0$ stetig ist.

Beispiel: Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$.

Die Funktion f ist stetig: Für $x>0$ wurde das in Korollar 56 bewiesen. Für $x<0$ folgt das aus $f(x)=x^3=-(-x)^3\ \forall x<0$ und dem schon bewiesenen Fall. Sei schließlich $x=0$. Ist $\varepsilon>0$, so wähle $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}>0$. Aus $|x|<\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}$ folgt $|x^3|=|x|^3<\varepsilon$.

Die Funktion f ist streng monoton wachsend:

Ist $0 < x < y$, so wurde $x^3 < y^3$ in Lemma 11 bewiesen.

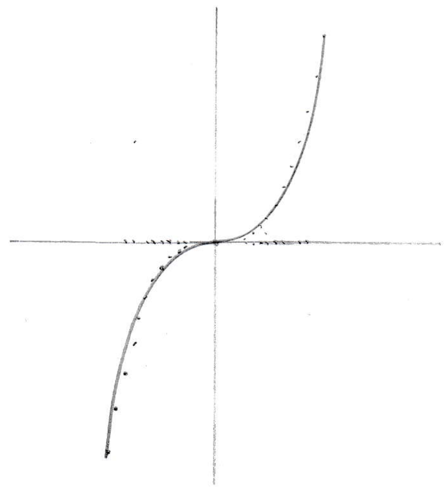
Ist $x < y < 0$, so $0 < -y < -x$, woraus $0 < -y^3 = (-y)^3 < (-x)^3 = -x^3$

und daher $x^3 < y^3 < 0$ folgt.

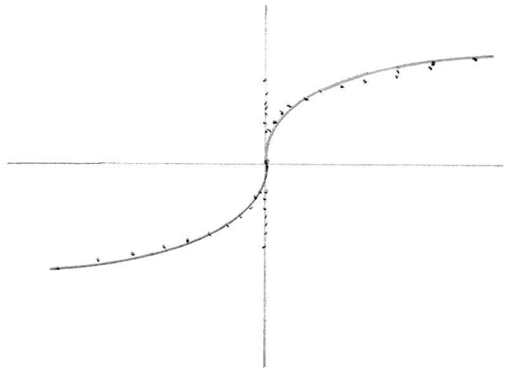
Schließlich folgt aus $x < 0 < y$, dass $x^3 < 0 < y^3$.

Aus Satz 54 folgt nun, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f^{-1}(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot \sqrt[3]{|x|}$ gegeben ist, ebenfalls stetig ist.

(Wie im Beweis von Korollar 55 kann man die Stetigkeit auf beliebig großen beschränkten, abgeschlossenen Intervallen zeigen, woraus sie für ganz $\mathbb{R}$ folgt.)



$f(x) = x^3$



$f^{-1}(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot \sqrt[3]{|x|}$