3.6 Verschärfungen des Stetigkeitsbegriffs

Erinnerung: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig $\iff \forall x \in D: f$ ist stetig in x

$\iff \forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in D: |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Dabei hängt δ sowohl von ε als auch von x ab, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon, x)$.

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f gleichmäßig stetig (auf D), wenn gilt, dass

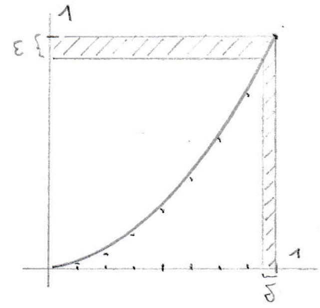
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D: |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dabei darf δ nur von ε, nicht aber von x abhängen, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Beispiele: 1) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig:

Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Aus $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ folgt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y| \cdot |x+y| = |x-y| \cdot \underbrace{(x+y)}_{\leq 2} \leq 2|x-y| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$



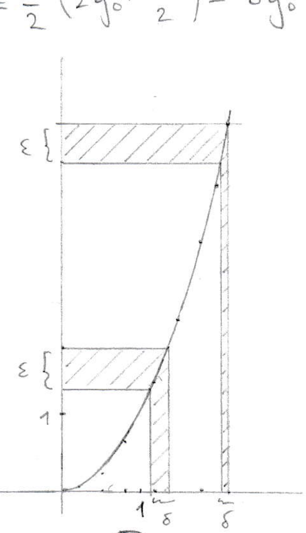
2) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig:

Angenommen, f wäre doch gleichmäßig stetig. Dann würde zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ existieren, derart dass $|x^2 - y^2| < 1$ wenn $x, y \geq 0$ mit $|x-y| < \delta$ erfüllen.

Wähle nun ein $y_0 > 0$ mit der Eigenschaft $\delta y_0 > 1$ und $x_0 = y_0 + \frac{\delta}{2}$.

Dann ist $|x_0 - y_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ aber

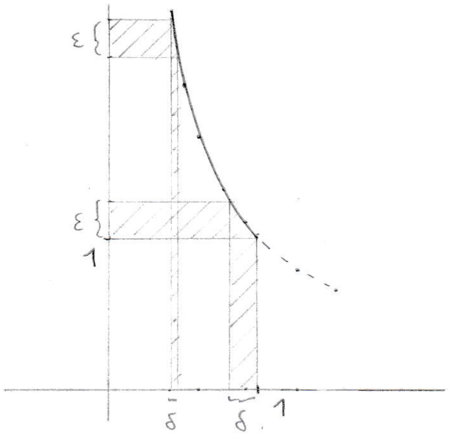
$$|x_0^2 - y_0^2| = |x_0 - y_0| \cdot |x_0 + y_0| = \frac{\delta}{2}\left(2y_0 + \frac{\delta}{2}\right) = \delta y_0 + \frac{\delta^2}{4} > \delta y_0 > 1, \text{ Widerspruch}$$



3) $f:(0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig:

Angenommen, f wäre doch gleichmäßig stetig: Dann würde zu $\varepsilon=1$ ein $\delta>0$ existieren, derartig dass $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<1$ wenn $0<x,y\le 1$ und $|x-y|<\delta$ gelten.

Wähle nun $x_0\in(0,1]$ mit $0<x_0<\min\{1,\delta\}$ und $y_0=\frac{x_0}{2}$. Dann ist $|x_0-y_0|=\frac{x_0}{2}<\frac{\delta}{2}<\delta$ aber $\left|\frac{1}{x_0}-\frac{1}{y_0}\right|=\left|\frac{1}{x_0}-\frac{2}{x_0}\right|=\left|-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{1}{x_0}>1$, Widerspruch



<u>Bemerkungen</u>: 1) Ist $f:D\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist $f:D\to\mathbb{R}$ (trivialerweise) auch stetig. Die Umkehrung gilt aber nicht, wie Beispiele 2) und 3) zeigen.

2) Ob eine (stetige) Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, hängt nicht nur von ihrer Abbildungsvorschrift, sondern auch vom Definitionsbereich D ab, wie Beispiele 1) und 2) zeigen.

<u>Satz 57</u>: Ist die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so ist sie bereits gleichmäßig stetig.

<u>Beweis</u>: Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann würde gelten:

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x,y\in[a,b]: |x-y|<\delta \text{ aber } |f(x)-f(y)|\ge\varepsilon.$$

Das müsste insbesondere gelten, wenn man $\delta=\frac{1}{n}>0$ (mit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$) wählt, d.h.

$$\exists \varepsilon>0\ \forall n\ge 1\ \exists x_n,y_n\in[a,b]: |x_n-y_n|<\frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon. \quad (*)$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (Satz 23) besitzt $(x_n)_{n\ge1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\ge1}$. Es bezeichne $\xi:=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}\left((y_{n_k}-x_{n_k})+x_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}(y_{n_k}-x_{n_k})+\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=0+\xi=\xi,$$

denn $|y_{n_k}-x_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\le\frac{1}{k}\xrightarrow[(k\to\infty)]{}0$.

Wegen Satz 45 folgt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\xi)$ und daher

$$\lim_{k\to\infty} \left(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\xi) - f(\xi) = 0 .$$

Das heißt aber, es gibt ein $k_0 \geq 1$, derart dass $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0$, was $(*)$ widerspricht.

Bemerkung: Wie Beispiele 2) und 3) oben zeigen, ist die Beschränktheit und Abgeschlossenheit des Intervalls, auf dem die stetige Funktion f definiert ist, von entscheidender Bedeutung in Satz 57.

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Man sagt, f sei (auf D) Lipschitz-stetig (oder auch: dehnungsbeschränkt), wenn es ein $L > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad \forall x,y \in D$.

Lemma 58 Ist die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist sie bereits gleichmäßig stetig.

Beweis. Es sei $L > 0$, derart dass $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \ \forall x,y \in D$. Es sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Gilt $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$, so folgt $|f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

Bemerkung: Die Umkehrung von Lemma 58 gilt nicht, wie das folgende Beispiel 1) zeigt.

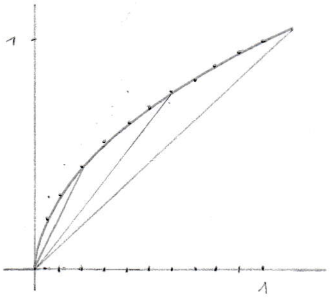
Beispiele: 1) Es sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
Wir zeigen zunächst, dass f stetig ist. Für $0 < x \leq 1$ folgt die Stetigkeit von f im Punkt x aus Korollar 56 (mit $\alpha = \frac{1}{2}$). Zu zeigen bleibt die Stetigkeit im Punkt $x = 0$: Es sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \varepsilon^2$. Aus $0 \leq y < \delta = \varepsilon^2$ folgt

$$|f(y) - f(x)| = |\sqrt{y} - \sqrt{0}| = \sqrt{y} < \varepsilon .$$

Aus Satz 57 folgt sofort, dass $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ sogar gleichmäßig stetig ist. Sie ist allerdings nicht Lipschitz-stetig.
Angenommen, sie wäre doch Lipschitz-stetig, d.h.

$$\exists L > 0 \ \forall x,y \in [0,1] : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L\,|x-y|$$

Wähle $y = 0$ und $0 < x < \frac{1}{L^2}$. Dann wäre $\sqrt{x} = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L\,|x - 0| = Lx$ und daher $\sqrt{x} \geq \frac{1}{L}$ und folglich $x \geq \frac{1}{L^2}$, ein Widerspruch.



$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$

2) Wir haben oben tatsächlich bereits gezeigt, dass die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ Lipschitz-stetig ist, denn

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x-y)(x+y)| = |x-y|\cdot|x+y|$$
$$= |x-y|\cdot\underbrace{(x+y)}_{\leq 2} \leq 2|x-y|$$

3) Allgemeiner gilt: Ist $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, so ist die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ Lipschitz-stetig, denn

$$|f(x)-f(y)| = |x^n-y^n| = |(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})|$$
$$= |x-y|\cdot|x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1}|$$
$$= |x-y|\cdot\underbrace{(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})}_{\leq n} \leq n|x-y|.$$