3.7 Erweiterungen des Grenzwertbegriffs

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Es möge ein $c \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(c, +\infty) \subseteq D$. Man sagt, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ (für ein $a \in \mathbb{R}$), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : x > M \text{ (und } x \in D) \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Es möge ein $c \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(-\infty, c) \subseteq D$. Man sagt, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ (für ein $a \in \mathbb{R}$), wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : x < -M \text{ (und } x \in D) \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Bemerkung: Alle Aussagen der Sätze 41 und 42 bleiben mutatis mutandis für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ gültig. Die dort angegebenen Beweise können leicht adaptiert werden. Wir geben hier die analogen Sätze für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ohne Beweis an.

Satz 59 Es seien $f, g, h: D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann gelten:

(i) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existiert, ist er eindeutig bestimmt,

(ii) Gilt $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$, so ist $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ (wenn beide Grenzwerte existieren),

(iii) Ist $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$ und gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Satz 60 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ mögen existieren. Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ existiert und $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x))$ existiert und $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right)$,

(iii) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert $\lim\limits_{x \to +\infty} (\alpha \cdot f(x))$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$,

(iv) Ist $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \neq 0$, so existiert $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)}.$$

19.4.2021

Beispiele: 1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ (Es sei $\varepsilon>0$. Wähle $M>\frac{1}{\varepsilon}>0$. Aus $x>M>0$ folgt dann $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{M}<\varepsilon$. D.h. $0<\frac{1}{x}<\varepsilon$ und daher $|\frac{1}{x}-0|=\frac{1}{x}<\varepsilon$.)

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ (Es sei $\varepsilon>0$. Wähle $M>\frac{1}{\varepsilon}>0$. Aus $x<-M<0$ folgt $0>\frac{1}{x}>-\frac{1}{M}>-\varepsilon$. D.h. $-\varepsilon<\frac{1}{x}<0$ und daher $|\frac{1}{x}-0|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$.)

3) Ist $a>1$ so $\lim_{x\to-\infty}a^x=0$ (Es sei $\varepsilon>0$. Wähle $M=\frac{\log\varepsilon}{\log a}\overset{\text{Satz 40 (iii)}}{=}{}_a\log\varepsilon$. Beachte dabei, dass $M<0$ wenn $0<\varepsilon<1$. Dann ist $x<M=\frac{\log\varepsilon}{\log a}={}_a\log\varepsilon$ äquivalent zu $a^x<\varepsilon$. Da $a^x>0$ (siehe Satz 36) gilt für $x<M$, dass $0<a^x<\varepsilon$ und daher $|a^x-0|=a^x<\varepsilon$.)

4) Für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ (Das folgt aus Bsp. 1) und Satz 60 (ii) wegen $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n\overset{\text{Satz 60 (iii)}}{=}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)^n=0^n=0$.)

5) Für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ (Das folgt aus Bsp. 2) und dem Analogon von Satz 60 (ii) für Grenzwerte der Gestalt $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ wegen $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)^n=0$.)

6) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\overset{\text{Satz 60}}{=}\frac{1-3\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1-3\cdot 0}{1+0}=1$$

7) Für $\varrho<0$ ist $\lim_{x\to+\infty}x^\varrho=0$ (Aus Bsp 3) folgt insbesondere $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$. D.h. $\exists M>0$ mit der Eigenschaft $y<-M\Rightarrow 0<e^y<\varepsilon$. Es folgt: $x>e^{-M/\varrho}\Rightarrow\log x>-\frac{M}{\varrho}\Rightarrow\varrho\log x<-M\Rightarrow x^\varrho=e^{\varrho\log x}\in(0,\varepsilon)$.)

8) $\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2/2}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x^2/2}=0$ (Es sei oBdA $0<\varepsilon<1$. Beachte, dass daraus $\log\varepsilon<0$ folgt. Ist nun $|x|>\sqrt{-2\log\varepsilon}=\sqrt{2|\log\varepsilon|}$, so folgt $x^2>-2\log\varepsilon\Rightarrow-\frac{x^2}{2}<\log\varepsilon\Rightarrow 0<e^{-x^2/2}<\varepsilon$.)

9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=0$. (Das folgt aus Bsp. 8) und Satz 60 (iii) bzw. seinem Analogon für Grenzwerte der Gestalt $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.)

Definition Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ sei auf $(\xi, \xi + c)$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c > 0$.

Man sagt, dass $\lim_{x \to \xi+} f(x) = +\infty$, wenn

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < x - \xi < \delta, x \in D \Rightarrow f(x) > M$$

Man sagt, dass $\lim_{x \to \xi+} f(x) = -\infty$, wenn

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < x - \xi < \delta, x \in D \Rightarrow f(x) < -M$$

Definition Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ sei auf $(\xi - c, \xi)$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c > 0$

Man sagt, dass $\lim_{x \to \xi-} f(x) = +\infty$, wenn

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < \xi - x < \delta, x \in D \Rightarrow f(x) > M$$

Man sagt, dass $\lim_{x \to \xi-} f(x) = -\infty$, wenn

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < \xi - x < \delta, x \in D \Rightarrow f(x) < -M$$

Definition Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ sei auf $(\xi - c, \xi + c) \setminus \{\xi\}$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c > 0$.

Man sagt, dass $\lim_{x \to \xi} f(x) = +\infty$, wenn

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow f(x) > M$$

Man sagt, dass $\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty$, wenn

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow f(x) < -M$$

Beispiele: 1) $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = \frac{1}{M}$. Wenn $0 < x < \delta = \frac{1}{M}$ dann $\frac{1}{x} > M$.)

2) $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = \frac{1}{M}$. Wenn $-\delta < x < 0$, dann $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -M$.)

3) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Wenn $0 < |x| = |x - 0| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ dann $x^2 < \frac{1}{M}$ und daher $\frac{1}{x^2} > M$.)

4) Sei $b > 1$. Dann ist $\lim_{x \to 0+} {}_b\log x = -\infty$. (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = b^{-M}$. Wenn $0 < x < \delta = b^{-M}$ dann ${}_b\log x < -M$.)

Bemerkung: Für Grenzwerte der Gestalt $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$ gelten Regeln, die zu Satz 28 analog sind. Wir geben sie hier ohne Beweis für Grenzwerte der Gestalt $\lim_{x\to\xi+} f(x) = +\infty$ an.

Satz 61 Es seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ drei Funktionen mit den Eigenschaften $\lim_{x\to\xi+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi+} h(x) = c \ (\in \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(i) $\lim_{x\to\xi+} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$,

(ii) $\lim_{x\to\xi+} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty$,

(iii) $\lim_{x\to\xi+} \big(\alpha f(x)\big) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \alpha > 0, \\ -\infty & \text{falls } \alpha < 0, \end{cases}$

(iv) $\lim_{x\to\xi+} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = +\infty$,

(v) $\lim_{x\to\xi+} \dfrac{\alpha}{f(x)} = 0$.

Beispiele: 1) Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\left(\text{denn } \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\right)^n \overset{\text{Satz 61 (iv)}}{=} +\infty\right)$

2) Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$ $\left(\text{denn } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\right)^n = +\infty\right)$

3) Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$ (Für $n=1$ wurde das oben bewiesen. Für gerades n folgt es aus Bsp. 2). Für ungerades $n > 1$ folgt es z.B. aus der folgenden Regel, die nicht in Satz 61 angegeben wurde:

Aus $\lim_{x\to\xi-} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to\xi-} g(x) = -\infty$ folgt $\lim_{x\to\xi-} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = -\infty$.

Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ folgt $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{2n}} \cdot \frac{1}{x} = -\infty$.

Definition: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei auf $(c, +\infty)\ (\subseteq D)$ definiert für ein $c \in \mathbb{R}$.
Man sagt, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, wenn $\forall M > 0\ \exists N > 0$, sodass $x > N, x \in D \Rightarrow f(x) > M$.
Man sagt, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, wenn $\forall M > 0\ \exists N > 0$, sodass $x > N, x \in D \Rightarrow f(x) < -M$.

Definition: Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ sei auf $(-\infty, c)$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c \in \mathbb{R}$.

Man sagt, dass $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, wenn $\forall M > 0 \ \exists N > 0$, sodass $x < -N, x \in D \Rightarrow f(x) > M$.

Man sagt, dass $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, wenn $\forall M > 0 \ \exists N > 0$, sodass $x < -N, x \in D \Rightarrow f(x) < -M$

Bemerkung: Für Grenzwerte der Gestalt $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ gelten Regeln, die zu Satz 61 analog sind, die wir aber nicht angeben

Beispiele: 1) Für $\varrho > 0$ ist $\lim_{x \to +\infty} x^\varrho = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = M^{1/\varrho}$. Wenn $x > N = M^{1/\varrho}$ dann $x^\varrho > M$, wobei Satz 35 (i) verwendet wurde.)

2) Für $a > 1$ ist $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ (OBdA sei $M > 1$. Wähle $N = \frac{\log M}{\log a} = {}_a\log M$. Wenn $x > N = \frac{\log M}{\log a}$ dann $a^x > M$, wobei Satz 36 (i) verwendet wurde.)

3) Für $b > 1$ ist $\lim_{x \to +\infty} {}_b\log x = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = b^M$. Wenn $x > N = b^M$ dann ${}_b\log x > M$, wobei Satz 39 (vi) verwendet wurde.)

4) $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = M$. Wenn $x < -N$ dann $x < -M$.)

5) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = \sqrt{M}$. Wenn $x < -N = -\sqrt{M}$, dann $|x| = -x > \sqrt{M}$ und daher $x^2 = |x|^2 > M$.)

6) $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{falls } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ gerade} \\ -\infty & \text{falls } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ ungerade} \end{cases}$ (Für gerade Exponenten folgt das aus $\lim_{x \to -\infty} x^{2n} = \lim_{x \to -\infty} (x^2)^n$, Bsp 5) und einem Analogon zu Satz 61 (iv).

Für ungerade Exponenten folgt es aus $\lim_{x \to -\infty} x^{2n+1} = \lim_{x \to \infty} x^{2n} \cdot x$ sowie den beiden Grenzwerten $\lim_{x \to -\infty} x^{2n} = +\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$.)

20.4.2021