3.8 Einige nichttriviale Grenzwerte

Satz 62 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

Beweis: Wir zeigen zunächst $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{1/x} = e$.

Wir haben (als Anwendung von Satz 22) $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definiert.

Daraus folgen nun (vergleiche Übungsbeispiel 53)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = e\cdot 1 = e$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists n_0 \geq 1 \quad \forall n \geq n_0 : \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Es sei $x \in \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$. Dann gibt es genau ein $n \geq n_0$: $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$

(und daher $n \leq \frac{1}{x} < n+1$). Daraus folgt

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^{1/x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon,$$

d.h. $\left|(1+x)^{1/x} - e\right| < \varepsilon$. Damit ist $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{1/x} = e$ bewiesen.

Statt $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{1/x} = e$ zeigen wir die äquivalente Aussage $\lim\limits_{x\to 0+}(1-x)^{1/x} = \frac{1}{e}$.

Im Beweis der Existenz von e haben wir die folgende Relation bewiesen:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

Daraus folgen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\frac{1}{e}}{1} = \frac{1}{e}.$$

Es sei $\varepsilon>0$. Dann

$$\exists n_0\geq 1 \quad \forall n\geq n_0: \quad \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{1}{e}\right|<\varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}-\frac{1}{e}\right|<\varepsilon.$$

Es sei wieder $x\in\left(0,\frac{1}{n_0}\right)$ und $n\geq n_0$ durch $\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}$ festgelegt. Dann ist $-\frac{1}{n}\leq -x<-\frac{1}{n+1}$ und $n\leq\frac{1}{x}<n+1$. Daraus folgt

$$\frac{1}{e}-\varepsilon<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}<(1-x)^{1/x}<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\frac{1}{e}+\varepsilon,$$

d.h. $\left|(1-x)^{1/x}-\frac{1}{e}\right|<\varepsilon$. Damit ist $\lim_{x\to 0+}(1-x)^{1/x}=\frac{1}{e}$ bewiesen.

Daraus erhält man

$$\lim_{x\to 0+}(1-x)^{-1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{(1-x)^{1/x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0+}(1-x)^{1/x}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$$

und somit

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0+}(1-x)^{-1/x} = e.$$

<u>Korollar 63</u> $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

<u>Beweis:</u> Für $x=0$ ist die Aussage trivial, da in diesem Fall $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}1^{n}=1=e^{0}$ gilt. Es sei darum ab jetzt $x\neq 0$.

Es sei $\varepsilon>0$. Dann

$$\exists \delta>0, \text{ sodass } 0<|y|<\delta \Rightarrow \left|(1+y)^{1/y}-e\right|<\varepsilon.$$

Da $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$ folgt: $\exists n_0\geq 1 \ \forall n\geq n_0: 0<\left|\frac{x}{n}\right|<\delta$ und daher

$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}-e\right|<\varepsilon \ \forall n\geq n_0$, d.h. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}=e.$

Wegen der Stetigkeit der Potenzfunktion (Korollar 56) folgt mit Hilfe von Satz 45

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right)^x = e^x.$$

Korollar 64 (i) Für $b>1$ gilt $\lim_{x\to 0}\frac{{}_b\log(x+1)}{x} = \frac{1}{\log b}$.

Insbesondere gilt $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1$.

(ii) Für $a>0$ gilt $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$. Insbesondere gilt $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Beweis: (i) Wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion (Korollar 55) folgt aus Satz 62

$$\lim_{x\to 0}\frac{{}_b\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot {}_b\log(x+1) \overset{\text{Satz 39 (v)}}{=} \lim_{x\to 0} {}_b\log(x+1)^{1/x}$$

$$= {}_b\log\left(\lim_{x\to 0}(x+1)^{1/x}\right) = {}_b\log e \overset{\text{Satz 40 (iii)}}{=} \frac{\log e}{\log b} = \frac{1}{\log b}.$$

(ii) Die Behauptung ist trivial für $a=1$, da in diesem Fall

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x} = 0 = \log 1 = \log a$. Es sei darum ab jetzt $a\neq 1$.

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion (Korollar 46) gilt

$\lim_{x\to 0}(a^x-1) = a^0-1 = 1-1 = 0$, woraus wegen (i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log((a^x-1)+1)} = \frac{1}{1} = 1$$

folgt und daher

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\log a} \overset{\text{Satz 39 (v)}}{=} \log a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log a^x}$$

$$= \log a\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log((a^x-1)+1)}}_{=1} = \log a.$$