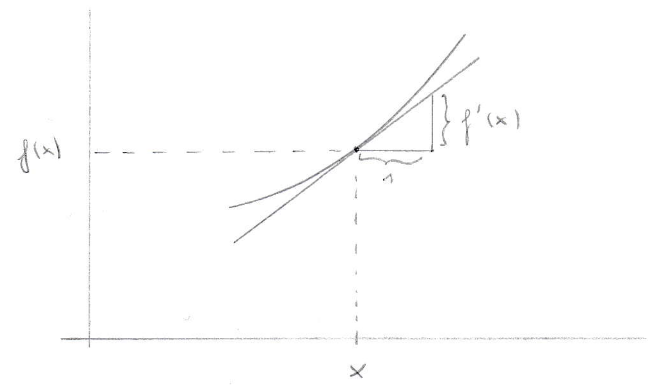
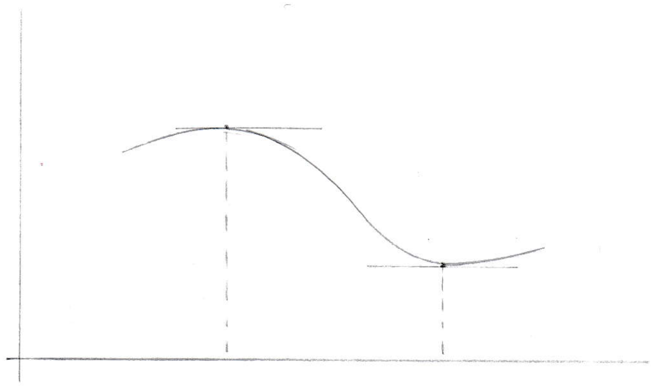
## 4. Differenzierbare Funktionen

### 4.1 Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion - Definition und einfache Eigenschaften

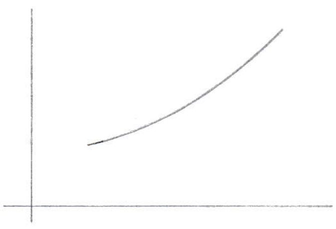
Motivation: 1) Berechnung der Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion



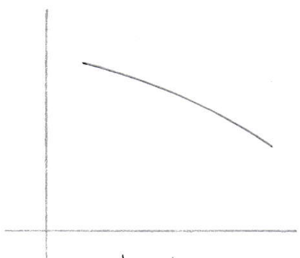

2) Verbunden mit 1): Die Suche nach lokalen Extrema einer („glatten") Funktion. In solchen Punkten erwartet man wegen 1), dass $f'(x)=0$, da die Tangenten dort Steigung 0 haben.



3) Ebenfalls verbunden mit 1): Bestimmen, ob eine („glatte") Funktion in einem bestimmten Bereich konvex oder konkav ist (d.h. sich nach oben oder unten krümmt). Ist die Funktion konvex, wird die Steigung der Tangente in $x$ mit wachsendem $x$ zunehmen. Ist sie konkav, wird die Steigung der Tangente in $x$ mit wachsendem $x$ abnehmen.



konvex



konkav

4) Physikalische Anwendungen, wie z.B.

Momentangeschwindigkeit = Ableitung des Weges nach der Zeit

Definition: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\xi \in I$. Man sagt, die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $\xi$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

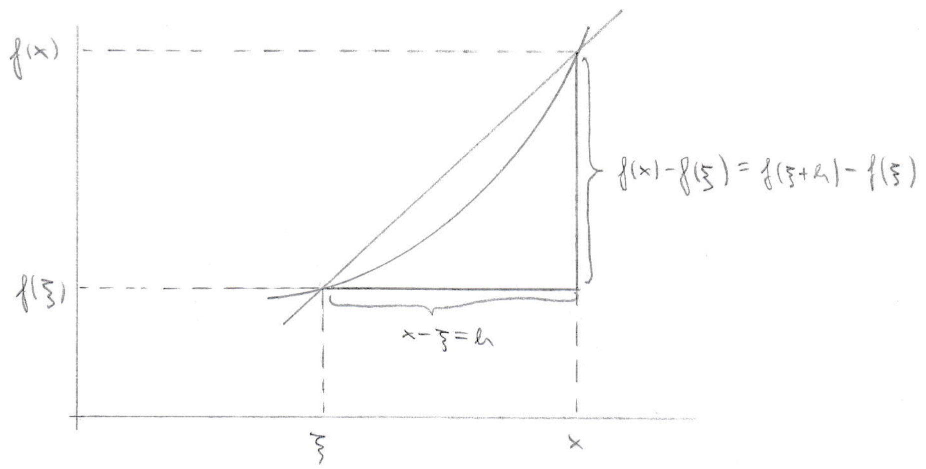
existiert. Der Grenzwert wird in diesem Fall mit $f'(\xi)$ bezeichnet, d.h.

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

und die Ableitung von $f$ an der Stelle $\xi$ genannt.

Definition: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ wird differenzierbar genannt, wenn sie in jedem Punkt $\xi \in I$ differenzierbar ist.

Bemerkungen: 1) Anschaulich beschreibt die Definition den Grenzübergang eines Differenzenquotienten, bei dem der Abstand $x - \xi = h \longrightarrow 0$ geht.




2) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (d.h. in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar), so erhält man eine neue Funktion $f': I \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$, die Ableitung der Funktion $f$.

Beispiele: 1) Jede konstante Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \; (\in \mathbb{R})$ ist differenzierbar und $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\text{denn } \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \underbrace{\frac{c - c}{x - \xi}}_{= 0} = 0\right)$.

2) Die Identität $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist differenzierbar und $f'(x) = 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$\left(\text{denn } \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \underbrace{\frac{x - \xi}{x - \xi}}_{= 1} = 1\right)$.

3) Ist $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, so ist die Potenzfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ differenzierbar und $f'(x) = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, denn

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{(x-\xi)(x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \cdots + x\xi^{n-2} + \xi^{n-1})}{x - \xi}$$

$$= \lim_{x \to \xi} \left(x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \cdots + x\xi^{n-2} + \xi^{n-1}\right) = n\xi^{n-1}.$$

(Dabei wurde im letzten Schritt die Stetigkeit von Polynomfunktionen verwendet.)

Korollar 65 (i) Es sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ist differenzierbar und $f'(x) = \log a \cdot a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Insbesondere ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ differenzierbar und $f'(x) = e^x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $b > 1$. Die Logarithmusfunktion $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = {}_b\log x$ ist differenzierbar und $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\log b \cdot x} \quad \forall x > 0$.

Insbesondere ist die Funktion $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$ differenzierbar und $f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$.

Beweis: (i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \overset{\text{Kor. 64 (ii)}}{=} a^x \cdot \log a.$$

(ii) Für festes $x > 0$ gilt $\lim_{h \to 0} \frac{h}{x} = 0$ und daher

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{{}_b\log(x+h) - {}_b\log x}{h} \overset{\text{Satz 39 (iv)}}{=} \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{{}_b\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \overset{\text{Kor. 64 (i)}}{=} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log b}.$$

Satz 66 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$.
Ist die Funktion $f$ im Punkt $\xi$ differenzierbar, so ist $f$ im Punkt $\xi$ stetig.

Beweis: Es ist

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} \left( f(\xi) + \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} (x - \xi) \right)$$

$$= f(\xi) + \left( \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right) \cdot \left( \lim_{x \to \xi} (x - \xi) \right)$$

$$= f(\xi) + f'(\xi) \cdot 0 = f(\xi).$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) Die Umkehrung von Satz 66 gilt nicht. Wir betrachten als Bsp die Betragsfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ im Punkt $\xi = 0$.

Diese Funktion ist in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar:

Ist $x > 0$, so ist $f'(x) = 1$. Für hinreichend kleines $h$ ist auch $x + h > 0$ und daher $f(x+h) = x + h$. Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Ist $x < 0$, so ist $f'(x) = -1$. Für hinreichend kleines $h$ ist auch $x + h < 0$ und daher $f(x+h) = -(x+h) = -x-h$. Daraus folgt

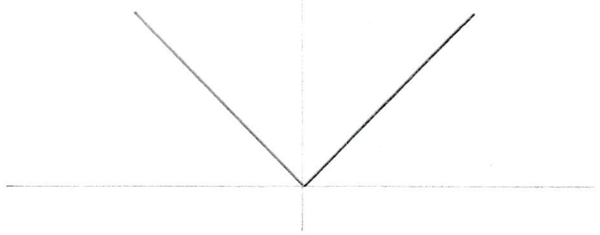
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x-h-(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x-h+x}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{h}{h} = -1$$

Im Punkt $x = 0$ ist $f$ stetig aber nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{0 + h - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$$

aber

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-(0+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} -\frac{h}{h} = -1$$



2) Es gibt (schwer vorstellbare) Funktionen, die in jedem Punkt stetig, aber nirgends differenzierbar sind.

<u>Satz 67</u> Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f, g: I \to \mathbb{R}$ beide in $\xi$ differenzierbar. Dann gelten:

(i) $f + g: I \to \mathbb{R}$ ist in $\xi$ differenzierbar und $(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$,

(ii) $f - g: I \to \mathbb{R}$ ist in $\xi$ differenzierbar und $(f-g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)$,

(iii) $\alpha f: I \to \mathbb{R}$ ist in $\xi$ differenzierbar (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) und $(\alpha f)'(\xi) = \alpha \cdot f'(\xi)$,

(iv) $f \cdot g: I \to \mathbb{R}$ ist in $\xi$ differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) \quad \text{(Produktregel)},$$

(v) Ist $g(\xi) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in $\xi$ differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Beweis: (i)

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x) + g(x) - (f(\xi) + g(\xi))}{x-\xi}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x-\xi}}_{\to f'(\xi)} + \underbrace{\frac{g(x) - g(\xi)}{x-\xi}}_{\to g'(\xi)} \xrightarrow[x\to\xi]{} f'(\xi) + g'(\xi)$$

(iv)

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \frac{(f(x) - f(\xi))g(\xi) + f(x)(g(x) - g(\xi))}{x-\xi}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x-\xi}}_{\to f'(\xi)} \cdot g(\xi) + \underbrace{f(x)}_{\to f(\xi)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(\xi)}{x-\xi}}_{\to g'(\xi)} \xrightarrow[x\to\xi]{} f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$$

Dabei wurde bei $f(x) \xrightarrow[x\to\xi]{} f(\xi)$ Satz 66 verwendet.

(iii) $(\alpha f)'(\xi) \overset{(iv)}{=} 0 \cdot f(\xi) + \alpha \cdot f'(\xi) = \alpha \cdot f'(\xi)$

(ii) $(f-g)'(\xi) = (f + (-1)g)'(\xi) \overset{(i),(iii)}{=} f'(\xi) + (-1)g'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)$.

(v) Wir zeigen zunächst $\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) = -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}$:

$$\frac{1}{x-\xi}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(\xi)}\right) = -\underbrace{\frac{1}{g(x)g(\xi)}}_{\to \frac{1}{g(\xi)^2}} \underbrace{\frac{g(x) - g(\xi)}{x-\xi}}_{\to g'(\xi)} \xrightarrow[x\to\xi]{} -\frac{1}{g(\xi)^2} \cdot g'(\xi)$$

Dabei wurde verwendet, dass (nach Satz 66) die Funktion $g$ bei $\xi$ stetig ist. Daraus folgt (mit Hilfe von Satz 44), dass auch die Funktion $x \mapsto \frac{1}{g(x)g(\xi)}$ bei $\xi$ stetig ist. Aus (iv) folgt nun

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(\xi) = f'(\xi)\cdot\frac{1}{g(\xi)} + f(\xi)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi)$$

$$= f'(\xi)\cdot\frac{1}{g(\xi)} + f(\xi)\cdot\left(-\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}\right) = \frac{f'(\xi)\cdot g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}$$

Korollar 68 (i) Es sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ ist differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

(ii) Es seien $k,d\in\mathbb{R}$ und $k\neq 0$. Die lineare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=kx+d$ ist differenzierbar und $f'(x)=k$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

(iii) Es seien $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ (und $a_n\neq 0$). Die Polynomfunktion $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ ist differenzierbar und $p'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+2a_2x+a_1=\sum_{k=1}^n ka_kx^{k-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

(iv) Es sei $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ ist differenzierbar und $f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

26.4.2021

Beweis: (i) Induktion nach $n$. Der Fall $n=1$ wurde bereits als Bsp. bewiesen. Für $f(x)=x^1=x$ ist ja $f'(x)=1=1\cdot x^0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.
Ist die Bh. für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ bereits bewiesen, so folgt für $f(x)=x^{n+1}=x\cdot x^n$ wegen Satz 67 (iv) und der Induktionsvoraussetzung

$$f'(x) = 1\cdot x^n + x\cdot nx^{n-1} = x^n+n\cdot x^n = (n+1)x^n$$

(ii) Aus Satz 67 (i) und (iii) folgt $f'(x)=k\cdot 1+0=k$.

(iii) Aus Satz 67 (i) und (iii) folgt

$$p'(x) = a_n\cdot nx^{n-1}+a_{n-1}\cdot(n-1)x^{n-2}+\dots+a_2\cdot 2x+a_1\cdot 1+0$$
$$= na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+2a_2x+a_1$$
$$= \sum_{k=1}^n ka_kx^{k-1}.$$

(iv) Aus Satz 67 (v) und (i) folgt $f'(x) = \dfrac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Korollar 68 (i) wurde bereits einmal in einem Bsp. direkt bewiesen.

2) Korollar 68 (i) und (ii) sind (wichtige) Spezialfälle von Korollar 68 (iii)

3) Korollar 68 (iii) und Satz 67 (v) ermöglichen es, alle rationale Funktionen zu differenzieren.

<u>Beispiele</u>: 1) Ist $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, so ist $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) Ist $f: \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+2}$, so ist

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2) - (x^2 - 2x + 1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 + 2x - 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}.$$

3) Ist $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 3 + 5x$, so ist

$$f'(x) = 2\cdot\left(-\frac{3}{x^4}\right) + 4\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) + 0 + 5 = -\frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^3} + 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

4) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 e^x$, so ist $f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = (x^4 + 4x^3)e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

5) Ist $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \log x$, so ist $f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$ $\forall x > 0$

6) Ist $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\log x - x$, so ist $f'(x) \overset{\text{Bsp. 5)}}{=} \log x + 1 - 1 = \log x$ $\forall x > 0$

7) Ist $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, so ist

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \forall x > 0.$$

8) Ist $f: (0,+\infty)\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$, so ist

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \log x - 1 \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = -\frac{1}{x(\log x)^2} \quad \forall x \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$$

<u>Satz 69</u> Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$.
Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist in $\xi$ differenzierbar,

(ii) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r: I \to \mathbb{R}$, derart dass

$$f(x) = f(\xi) + \alpha(x - \xi) + r(x) \quad \forall x \in I \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\xi} \frac{r(x)}{x-\xi} = 0$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\alpha := f'(\xi)$ und $r: I \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$r(x) := f(x) - f(\xi) - f'(\xi)\cdot(x-\xi)$. Dann ist (aufgrund dieser Definition)

$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)\cdot(x-\xi) + r(x) \quad \forall x \in I$ und

$$\lim_{x\to\xi} \frac{r(x)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)\cdot(x-\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi)\right)$$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0.$$

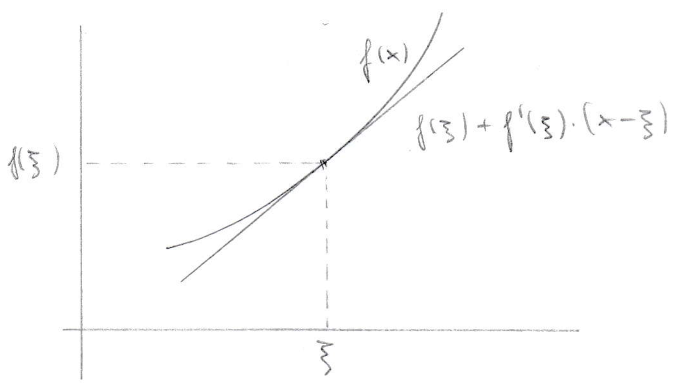
(ii) $\Rightarrow$ (i) Es ist

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\alpha(x-\xi)+r(x)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\left(\alpha + \frac{r(x)}{x-\xi}\right)$$

$$= \alpha + \lim_{x\to\xi} \frac{r(x)}{x-\xi} = \alpha + 0 = \alpha,$$

d.h. $f$ ist bei $\xi$ differenzierbar und $f'(\xi) = \alpha$.

Bemerkungen: 1) Ist die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ im Punkt $\xi$ differenzierbar, so ist die Tangente von $f$ im Punkt $\xi$ durch die Funktion $t: I \to \mathbb{R}$ mit $t(x) = f(\xi) + f'(\xi)\cdot(x-\xi)$ gegeben. Offenbar ist $t$ ja eine lineare Funktion, die im Punkt $\xi$ den selben Wert annimmt wie $f$ (denn $t(\xi) = f(\xi) + f'(\xi)\cdot(\xi-\xi) = f(\xi) + f'(\xi)\cdot 0 = f(\xi)$) und die im Punkt $\xi$ die selbe Steigung hat (denn $t'(x) = 0 + f'(\xi)\cdot 1 = f'(\xi) \ \forall x \in I$).




2) Satz 69 besagt, dass sich die Funktion $f$ an der Stelle $\xi$ sehr gut durch ihre Tangente $x \mapsto f(\xi) + f'(\xi)\cdot(x-\xi)$ approximieren lässt

3) Satz 69 zeigt auch, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion $f$ in einem Punkt $\xi$ eine wesentlich stärkere Bedingung ist als die Stetigkeit von $f$ im Punkt $\xi$.

Ist $f(x) = f(\xi) + \alpha(x-\xi) + r(x)$, so ist die Stetigkeit von $f$ bei $\xi$ zur (wesentlich schwächeren) Bedingung $\lim_{x\to\xi} r(x) = 0$ äquivalent. Ist $f$ hingegen differenzierbar bei $\xi$, muss sogar $\lim_{x\to\xi} \frac{r(x)}{x-\xi} = 0$ gelten, d.h. $r(x)$ geht für $x \to \xi$ wesentlich schneller gegen $0$ als $x-\xi$.

4) Satz 69 ist auch von großer Bedeutung, um die Ableitung einer Funktion in Mehrdimensionalen zu definieren (wo man nicht mehr mit Differenzenquotienten arbeiten kann).

<u>Satz 70</u> (Kettenregel) Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subseteq J$ und $\xi \in I$. Ist $f$ in $\xi$ differenzierbar und $g$ in $f(\xi)$ differenzierbar, so ist auch die Verkettung $g\circ f: I \to \mathbb{R}$ in $\xi$ differenzierbar und es gilt $(g\circ f)'(\xi) = g'(f(\xi))\cdot f'(\xi) = (g'\circ f)(\xi)\cdot f'(\xi)$.

<u>Beweis</u>: Da $g$ in $f(\xi)$ differenzierbar ist, gibt es eine Funktion $s$, derart dass

$$g(y) = g(f(\xi)) + g'(f(\xi))\cdot(y - f(\xi)) + s(y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to f(\xi)} \frac{s(y)}{y-f(\xi)} = 0.$$

Setzt man nun

$$\bar{s}(y) = \begin{cases} \frac{s(y)}{y-f(\xi)} & \text{für } y \neq f(\xi) \\ 0 & \text{für } y = f(\xi) \end{cases}$$

so ist $s(y) = \bar{s}(y)\cdot(y-f(\xi))$ und $\lim_{y\to f(\xi)} \bar{s}(y) = 0$,

d.h. $\bar{s}$ ist bei $f(\xi)$ stetig. Es folgt

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(\xi)) + g'(f(\xi))\cdot(y-f(\xi)) + \bar{s}(y)\cdot(y-f(\xi)) \\ &= g(f(\xi)) + (g'(f(\xi)) + \bar{s}(y))\cdot(y-f(\xi)) \end{aligned}$$

und daher $g(f(x)) - g(f(\xi)) = (g'(f(\xi)) + \bar{s}(f(x)))\cdot(f(x)-f(\xi))$ und somit

$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = (g'(f(\xi)) + \bar{s}(f(x)))\cdot\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Da $f$ bei $\xi$ differenzierbar ist, ist $f$ bei $\xi$ stetig. D.h. $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$

und daher $\lim_{x\to\xi} \bar{s}(f(x)) = \lim_{y\to f(\xi)} \bar{s}(y) = 0$. Insgesamt erhält man

$$\lim_{x\to\xi} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \Big(g'(f(\xi)) + \underbrace{\bar{s}(f(x))}_{\to 0}\Big)\cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\to f'(\xi)}$$

$$= \big(g'(f(\xi))+0\big)\cdot f'(\xi) = g'(f(\xi))\cdot f'(\xi).$$

Bemerkung: Der wesentlich einfachere „Beweis"

$$\frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}\cdot\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \xrightarrow[x\to\xi]{} g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)$$

ist leider nicht völlig korrekt, da $f(x)=f(\xi)$ für $x\neq\xi$ möglich ist.
In diesem Fall hätte der Bruch

$\dfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$.

Korollar 71 (i) Es sei $\alpha\in\mathbb{R}$. Die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$ ist differenzierbar und $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ $\forall x>0$.

(ii) Die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ ist differenzierbar und $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x>0$.

(iii) Es sei $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ist differenzierbar und $f'(x)=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\forall x>0$.

Beweis: (i) Aus $f(x)=x^\alpha=e^{\alpha\log x}$ folgt $f'(x)=e^{\alpha\log x}\cdot\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) Wegen $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ folgt die Behauptung aus (i) mit $\alpha=\frac12$:

$$f'(x)=\frac12 x^{\frac12-1}=\frac12 x^{-\frac12}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(iii) Wegen $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$ folgt die Behauptung aus (i) mit $\alpha=\frac1n$:

$$f'(x)=\frac1n x^{\frac1n-1}=\frac1n x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Bemerkung: In Korollar 71 ist also (iii) ein Spezialfall von (i) (mit $\alpha=\frac1n$) und (ii) ein Spezialfall von (iii) (mit $n=2$).

Beispiele: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2+3x)^2$. Die Ableitung $f'$ kann wegen $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 9x^2$ mit Hilfe von Korollar 68 (iii) berechnet werden: $f'(x) = 16x^3 + 36x^2 + 18x$. Es ist aber auch möglich, die Kettenregel zu verwenden:

$$f'(x) = 2(2x^2+3x)\cdot(4x+3) = 2(8x^3+12x^2+6x^2+9x) = 2(8x^3+18x^2+9x)$$
$$= 16x^3+36x^2+18x$$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$. (Wegen $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$.) Hier ist (wegen Korollar 71 (ii))

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot (2x+2) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{4x^2-x-7}$. Es ist $f'(x) = \log 2 \cdot 2^{4x^2-x-7} \cdot (8x-1)$.

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\log(x^2+2)}$ (Wegen $x^2+2 \geq 2 > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\log(x^2+2) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.)

Hier kann man $f$ als Verknüpfung $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ der drei Funktionen $f_1(x) = x^2+2$, $f_2(y) = \log y$ und $f_3(z) = \frac{1}{z}$ auffassen und die Kettenregel zweimal anwenden:

$$f'(x) = -\frac{1}{(\log(x^2+2))^2} \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+2)(\log(x^2+2))^2}$$

(Man kann natürlich auch $f = h \circ g$ mit $g(x) = x^2+2$ und $h(y) = \dfrac{1}{\log y}$ auffassen und verwenden, dass $h'(y) = -\dfrac{1}{y(\log y)^2}$ in Bsp. 8 oben bereits berechnet wurde.)

5) Es sei $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log|x|$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1. Fall: $x > 0$. Dann ist $f(x) = \log x$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$ nach Korollar 65 (ii).

2. Fall: $x < 0$. Dann ist $f(x) = \log(-x)$ und daher (nach Korollar 65 (ii) und der Kettenregel)

$$f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Satz 72 Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $\xi\in(a,b)$, $f$ bei $\xi$ differenzierbar und $f'(\xi)\neq 0$. Dann ist $g=f^{-1}: f([a,b])\to[a,b]$ bei $\eta:=f(\xi)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(\eta)=(f^{-1})'(\eta)=\frac{1}{f'(\xi)}=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(\eta)}.$$

Beweis: Für $y\in f([a,b])$ sei $x:=f^{-1}(y)=g(y)$. Wegen Satz 54 ist $g$ ebenfalls stetig, d.h. aus $y\to\eta$ folgt $x\to\xi$. Aus

$$\frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}=\frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$$

folgt

$$\lim_{y\to\eta}\frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}=\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}=\frac{1}{f'(\xi)}.$$

Beispiele: 1) Es sei $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x^n$. Dann ist $f'(x)=nx^{n-1}$ und $g(y)=\sqrt[n]{y}$. Aus Satz 72 folgt

$$g'(y)=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}.$$

2) Es sei $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=e^x$. Dann ist $f'(x)=e^x$ und $g(y)=\log y$

Aus Satz 72 folgt $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$.

3) Es sei $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log x$. Dann ist $f'(x)=\frac{1}{x}$ und $g(y)=e^y$

Aus Satz 72 folgt $$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x=e^y.$$

27.4.2021

Bemerkungen: 1) Ist bekannt, dass $g=f^{-1}$ bei $f(\xi)$ differenzierbar ist, so folgt die Formel für $g'(\eta)$ aus der Kettenregel. Aus $g(f(x))=x$ $\forall x$ folgt $g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)=1$, d.h. $g'(\eta)\cdot f'(\xi)=1$. Im Beweis von Satz 72 ist die Differenzierbarkeit von $g$ bei $\eta$ allerdings bewiesen worden.

2) In Satz 72 war $f$ auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall definiert, in unseren Beispielen aber nicht. Das ist kein Problem, da man die Funktion immer auf ein passendes Intervall $[a,b]$ mit $\xi \in (a,b)$ einschränken kann.

Bemerkung: Statt $f'(x)$ werden auch andere Schreibweisen für die Ableitung verwendet, z.B. die von Leibniz stammende $\frac{df}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ bzw. $\frac{d}{dx} f(x)$.

Setzt man $y = f(x)$, $z = g(y)$, so wird die Kettenregel zu $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$ und Satz 72 zu $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Diese Schreibweise ist sehr suggestiv, da man scheinbar wie mit Brüchen rechnen kann. (Tatsächlich sind derartige Rechnungen nicht immer korrekt.)

Definition: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ im Punkt $\xi \in I$ differenzierbar, so schreibt man $f''(\xi)$ (bzw. $\frac{d^2 f}{dx^2}(\xi)$ in der Leibnizschen Notation) für die Ableitung von $f'$ an der Stelle $\xi$ und spricht von der 2. Ableitung von $f$ im Punkt $\xi$.

Ist die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (d.h. existiert $f''(\xi)$ $\forall \xi \in I$), so erhält man eine Funktion $f'' : I \to \mathbb{R}$.

Man kann weiter so verfahren und erhält (sofern sie existieren) Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$ allgemein $f^{(n)}(x)$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (bzw. in der Leibnizschen Notation $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}$).

Beispiele: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$
$\Rightarrow f'''(x) = 12 \cdot 2x = 24x \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(n)}(x) = 0 \ \forall n \geq 5$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n \geq 1$

3) Es sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Dann ist

$f^{(n)}(x) = (\log a)^n \cdot a^x \ \forall n \geq 1$ (Induktion nach $n$:

$n = 1$ wurde in Korollar 65 (i) bewiesen und

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (\log a)^n \cdot (\log a) a^x = (\log a)^{n+1} \cdot a^x$.)

4) Es sei $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log x$. Dann ist $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

(Induktion nach $n$: $n=1$ wurde in Korollar 65 (ii) bewiesen, denn

$$f'(x)=\frac{1}{x}=(-1)^2\frac{0!}{x}$$ und

$$f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!\,(-n)\cdot x^{-n-1}=(-1)^{n+2}\frac{n!}{x^{n+1}}.)$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) Aus der Differenzierbarkeit einer Funktion $f$ folgt nicht, dass ihre Funktion $f'$ wieder differenzierbar ist. Es sei z. B.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{für } x\geq 0,\\ -x^2 & \text{für } x<0.\end{cases}$$

Dann ist $f'(x)=2x$ $\forall x>0$ bzw. $f'(x)=-2x$ $\forall x<0$ und $f'(0)=0$, denn

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}x=0$$

und

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0.$$

Also $f'(x)=2|x|$ und $f'$ ist im Punkt $x=0$ nicht differenzierbar.
(Wäre $f'$ im Punkt $0$ differenzierbar, so wäre $x\mapsto|x|=\frac{1}{2}\cdot 2|x|$ im Punkt $0$ differenzierbar, Widerspruch.)

2) Allgemeiner folgt aus der $n$-maligen Differenzierbarkeit einer Funktion nicht, dass sie $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Es sei z. B.

$$g(x)=\begin{cases}x^3 & \text{für } x\geq 0,\\ -x^3 & \text{für } x<0.\end{cases}$$

Dann ist $g'(x)=3x^2$ $\forall x>0$, $g'(x)=-3x^2$ $\forall x<0$ und $g'(0)=0$, denn

$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0\pm}\frac{(\pm x^3)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0\pm}(\pm x^2)=0.$$

Also $g'(x)=3f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (mit $f$ wie in der vorangegangenen Bemerkung)

Daher ist $g'$ differenzierbar und $g''(x)=3\cdot f'(x)=3\cdot 2|x|=6|x|$

und $g''$ ist im Punkt $x=0$ nicht differenzierbar.

29.4.2021