4.2 Mittelwertsätze und lokale Extreme

<u>Definition</u>: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$. Man sagt, f nimmt bei ξ ein lokales Maximum an, wenn gilt, dass $\exists \delta > 0 \ \forall x \in D: |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)$
Man sagt, f nimmt bei ξ ein lokales Minimum an, wenn gilt, dass $\exists \delta > 0 \ \forall x \in D: |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(\xi)$.
Man sagt, f besitzt bei ξ ein lokales Extremum, wenn sich bei ξ entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum befindet.

<u>Satz 73</u> Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\xi \in I$ und f bei ξ differenzierbar. Wenn f bei ξ ein lokales Extremum besitzt, gilt $f'(\xi) = 0$.

<u>Beweis</u>: Wir nehmen zunächst an, f besitzt bei ξ ein lokales Maximum.
Es sei $\delta > 0$ derart dass $f(x) \leq f(\xi)$ für $|x - \xi| < \delta$ und $x \in I$.

Ist $x < \xi$ und $|x - \xi| < \delta$ und $x \in I$, so gilt $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$ und daher

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$$

Ist $x > \xi$ und $|x - \xi| < \delta$ und $x \in I$, so gilt $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$ und daher

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0.$$

Insgesamt muss also $f'(\xi) = 0$ gelten.
Besitzt f bei ξ ein lokales Minimum, so besitzt $-f$ bei ξ ein lokales Maximum. Aus dem bisher bewiesenen folgt $-f'(\xi) = 0$ und damit auch $f'(\xi) = 0$.

<u>Bemerkung</u>: Die Umkehrung von Satz 73 gilt nicht.
Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und daher $f'(0) = 0$.
Bei 0 befindet sich aber kein lokales Extremum, da $f(x) < 0 = f(0)$ für $x < 0$ und $f(x) > 0 = f(0)$ für $x > 0$.

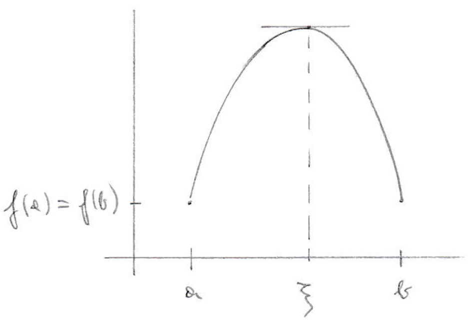
<u>Satz 74</u> (Satz von Rolle) Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = 0$.

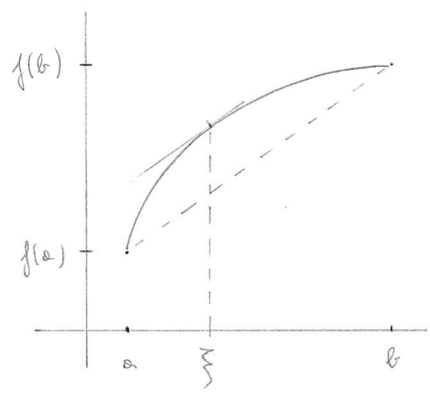
Beweis: Ist f auf $[a,b]$ konstant, so gilt $f'(\xi)=0 \ \forall \xi \in (a,b)$.
Sei also f nun nicht konstant. Nach Satz 52 nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an, d.h. $\exists c,d \in [a,b]$, sodass $f(c) \leq f(x) \leq f(d) \ \forall x \in [a,b]$. Da f nicht konstant ist, ist $c \neq d$ und $f(c) < f(d)$. Da $f(a) = f(b)$, muss mindestens einer der beiden Punkte c,d in (a,b) liegen. Sei dieser ξ (bzw. der kleinere der beiden, falls beide in (a,b) liegen). Wegen Satz 73 folgt $f'(\xi) = 0$.

Satz 75 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Dann
$$\exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (\text{bzw. } f(b)-f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)).$$

Beweis: Betrachte die Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
Dann ist g ebenfalls stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und es gilt $g(a) = g(b) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 74)
$$\exists \xi \in (a,b): 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{und daher } f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bemerkung: Die Sätze 74 und 75 beschreiben beide einen sehr anschaulichen Sachverhalt:





Satz 76 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Es seien $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f und g auf (a,b) differenzierbar.
Dann $\exists \xi \in (a,b): (f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$

Beweis: Die Funktion $h: [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) := f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$ ist ebenfalls stetig und auf (a,b) differenzierbar und es gilt
$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 74)
$$\exists \xi \in (a,b): 0 = h'(\xi) = f'(\xi)(g(b)-g(a)) - g'(\xi)(f(b)-f(a)).$$

Bemerkung: Setzt man in Satz 76 $g(x)=x$, so erhält man $f(b)-f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)$. D.h. der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 75) ist (wie der Name sagt) ein Spezialfall des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 76). Man könnte also auch Satz 75 beweisen und Satz 76 als Korollar folgern.

Satz 77 Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Gilt $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$, so ist $f(x)=f(a)$ $\forall x\in[a,b]$, d.h. f ist konstant.

Beweis: Es sei $x\in(a,b]$. Dann ist f auf dem Intervall $[a,x]$ stetig und auf (a,x) differenzierbar. Aus Satz 75 folgt: $\exists\,\xi\in(a,x): \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)=0$, woraus man sofort $f(x)=f(a)$ erhält.

Satz 78 Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Dann gelten:

(i) f ist auf $[a,b]$ monoton wachsend $\iff f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$,

(ii) f ist auf $[a,b]$ streng monoton wachsend
$\iff f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$ und es gibt kein (nichtleeres) Intervall $(c,d)\subseteq(a,b)$ sodass $f'(x)=0$ $\forall x\in(c,d)$,

(iii) Wenn $f'(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ dann ist f auf (a,b) streng monoton wachsend

Beweis: (i) ($\Rightarrow$) Es sei $x\in(a,b)$. Ist $y\in[a,b]\setminus\{x\}$, so gilt

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 0 \quad \text{und daher } f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 0.$$

($\Leftarrow$) Es seien $x,y\in[a,b]$ und $x<y$. Nach Satz 75

$$\exists\,\xi\in(x,y): \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)\geq 0 \quad \text{und daher } f(y)\geq f(x).$$

(ii) ($\Rightarrow$) Wegen (i) gilt $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Würde es ein nichtleeres Teilintervall $(c,d)\subseteq(a,b)$ geben, sodass $f'(x)=0$ $\forall x\in(c,d)$, so wäre f nach Satz 77 auf $[c,d]$ konstant und daher nicht streng monoton wachsend.

($\Leftarrow$) Wegen (i) ist f monoton wachsend. Angenommen, f wäre nicht streng monoton wachsend. Dann würden $\exists\, c,d\in[a,b]$ sodass $c<d$ und $f(c)=f(d)$. Folglich wäre f auf $[c,d]$ konstant und $f'(x)=0$ $\forall x\in(c,d)$.

(iii) Folgt sofort aus (ii).

Bemerkung: Die Umkehrung von Satz 78 (iii) gilt nicht. Es sei z.B. $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$. Die Funktion f ist streng monoton wachsend obwohl $f'(0) = 0$.

Korollar 79 Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Dann gelten:

(i) f ist auf $[a,b]$ monoton fallend $\iff f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$,

(ii) f ist auf $[a,b]$ streng monoton fallend

$\iff f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$ und es gibt kein (nichtleeres) Intervall $(c,d) \subseteq (a,b)$ sodass $f'(x) = 0 \ \forall x \in (c,d)$,

(iii) Wenn $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$ dann ist f auf (a,b) streng monoton fallend.

Beweis: Wende Satz 78 auf die Funktion $-f: [a,b] \to \mathbb{R}$ an.

Beispiele: 1) Es sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ist streng monoton wachsend wenn $a > 1$ und streng monoton fallend wenn $0 < a < 1$. Das wurde bereits in Satz 36 bewiesen. Es folgt aber auch aus Satz 78 (iii) bzw. Korollar 79 (iii). Nach Satz 39 (vii) ist $\log a < 0$ wenn $0 < a < 1$ und $\log a > 0$ wenn $a > 1$. Nach Korollar 65 (i) ist

$$f'(x) = \log a \cdot a^x \begin{cases} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} & \text{falls } a > 1, \\ < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} & \text{falls } 0 < a < 1. \end{cases}$$

2) Es sei $b > 1$. Die Logarithmusfunktion $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = {}_b\log x$ ist streng monoton wachsend. Das wurde bereits in Satz 39 (vi) bewiesen, es folgt aber auch aus Satz 78 (iii). Nach Satz 39 (vii) ist $\log b > 0$. Nach Korollar 65 (ii) ist $f'(x) = \frac{1}{\log b \cdot x} > 0 \ \forall x > 0$.

3) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Potenzfunktion $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ ist streng monoton wachsend wenn $\alpha > 0$ und streng monoton fallend wenn $\alpha < 0$. Das wurde bereits in Satz 35 bewiesen, es folgt aber auch aus Satz 78 (iii) bzw. Korollar 79 (iii). Nach Korollar 71 (i) ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \begin{cases} > 0 \ \forall x > 0 & \text{falls } \alpha > 0, \\ < 0 \ \forall x > 0 & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$

4) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ungerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ist streng monoton wachsend. Nach Korollar 68 (i) ist

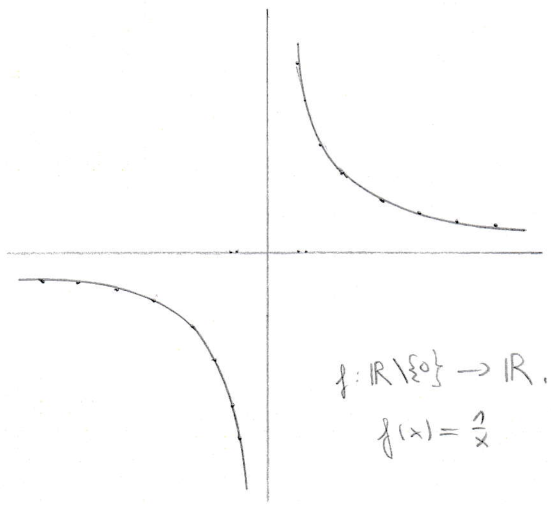
$$f'(x) = n x^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{da } x \neq 0 \text{ und } n-1 \text{ gerade ist}), \\ = 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 78 (ii).

5) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ist streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und streng monoton wachsend auf $(0, +\infty)$. Nach Korollar 68 (i) ist

$$f'(x) = n x^{n-1} \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 0 \\ > 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (\text{da } n-1 \text{ ungerade ist})$$

6) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist f streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und f ist streng monoton fallend auf $(0, +\infty)$. Beides folgt daraus, dass $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beachte, dass daraus aber nicht folgt, dass $f(x) > f(y)$ wenn $x < 0 < y$, da 0 nicht im Definitionsbereich liegt. Tatsächlich ist ja z.B. $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ oder allgemeiner $f(x) < 0 < f(y)$ für $x < 0 < y$.



7) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$. Dann ist

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x-3)(x+2).$$

Folglich ist f streng monoton wachsend auf $(-\infty, -2)$ und $(3, +\infty)$ (da $f'(x) > 0 \ \forall x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$) und f ist streng monoton fallend auf $(-2, 3)$ (da $f'(x) < 0 \ \forall x \in (-2, 3)$).

8) Es sei $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\log x}{x}$. Wir haben weiter oben berechnet, dass $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ $\forall x>0$. Da die Logarithmusfunktion streng monoton wächst, ist $\log x<\log e=1$ für $x<e$. D.h. $f'(x)>0$ $\forall x\in(0,e)$ und f ist streng monoton wachsend auf $(0,e)$. Ebenso ist $\log x>\log e=1$ für $x>e$. Daher ist $f'(x)<0$ $\forall x\in(e,+\infty)$ und f ist streng monoton fallend auf $(e,+\infty)$.

Definition: Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$ und $\xi\in D$. Man sagt, f nimmt bei ξ ein striktes lokales Maximum (bzw. striktes lokales Minimum) an, wenn gilt, dass $\exists\,\delta>0$ $\forall x\in D$: $0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow f(x)<f(\xi)$
(bzw. $\exists\,\delta>0$ $\forall x\in D$: $0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow f(x)>f(\xi)$)

Satz 80 Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $c\in(a,b)$ und f auf $(a,b)\setminus\{c\}$ differenzierbar. Wenn $f'(x)>0$ $\forall x\in(a,c)$ und $f'(x)<0$ $\forall x\in(c,b)$, besitzt f bei c ein striktes lokales Maximum.

Beweis: Anwenden von Satz 78 (iii) auf $[a,c]$ ergibt, dass f auf $[a,c]$ streng monoton wächst, d.h. $f(x)<f(c)$ $\forall x\in[a,c)$. Anwenden von Korollar 79 (iii) auf $[c,b]$ ergibt, dass f auf $[c,b]$ streng monoton fällt, d.h. $f(c)>f(x)$ $\forall x\in(c,b]$.

Korollar 81 Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $c\in(a,b)$ und f auf $(a,b)\setminus\{c\}$ differenzierbar. Wenn $f'(x)<0$ $\forall x\in(a,c)$ und $f'(x)>0$ $\forall x\in(c,b)$, besitzt f bei c ein striktes lokales Minimum.

Beweis: Wende Satz 80 auf $-f:[a,b]\to\mathbb{R}$ an.

3.5.2021

Beispiele: 1) Es sei $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Dann ist f stetig auf $[-1,1]$ und $f'(x)=2x$ $\forall x\in(-1,1)$. D.h. $f'(x)<0$ $\forall x\in(-1,0)$ und $f'(x)>0$ $\forall x\in(0,1)$. Aus Korollar 81 folgt, dass f bei 0 ein striktes lokales Minimum besitzt. (Das ist natürlich offensichtlich, da $x^2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.)

2) Es sei $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Dann ist f stetig auf $[-1,1]$ und $f'(x) = 4x^3$ $\forall x \in (-1,1)$. D.h. $f'(x) < 0$ $\forall x \in (-1,0)$ und $f'(x) > 0$ $\forall x \in (0,1)$. Aus Korollar 81 folgt, dass f bei 0 ein striktes lokales Minimum besitzt. (Auch das ist offensichtlich, da $x^4 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

3) Es sei $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Dann ist f stetig auf $[-1,1]$, $f'(x) = -1 < 0$ $\forall x \in (-1,0)$ und $f'(x) = 1 > 0$ $\forall x \in (0,1)$. (Auch das ist offensichtlich, da $|x| > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

<u>Bemerkung</u>: Beachte, dass in Satz 80 bzw. Korollar 81 nicht vorausgesetzt wird, dass f in c differenzierbar ist. Man kann daher mit Hilfe von Satz 80 bzw. Korollar 81 lokale Extrema in Punkten finden, in denen f nicht differenzierbar ist (wie in Beispiel 3) oben). Aber auch bei zweimal differenzierbaren Funktionen ist es oft einfacher, Satz 80 bzw. Korollar 81 anzuwenden, als das Vorzeichen von $f''(c)$ zu untersuchen.

<u>Korollar 82</u> Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

(i) Ist $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$, so besitzt f bei ξ ein striktes lokales Maximum.

(ii) Ist $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$, so besitzt f bei ξ ein striktes lokales Minimum.

<u>Beweis</u>: (i) Aus

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{x - \xi} < 0$$

folgt:

$$\exists \delta > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta, x \in I \implies \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \frac{f'(x)}{x - \xi} < 0.$$

Daher ist $f'(x) > 0$ für $0 < \xi - x < \delta$, $x \in I$ (d.h. für $\xi - \delta < x < \xi$, $x \in I$) und $f'(x) < 0$ für $0 < x - \xi < \delta$, $x \in I$ (d.h. $\xi < x < \xi + \delta$, $x \in I$).

Die Behauptung folgt aus Satz 80.

(ii) Betrachte die Funktion $-f: I \to \mathbb{R}$. Da $-f'(\xi) = 0$ und $-f''(\xi) < 0$, besitzt $-f$ nach (i) bei ξ ein striktes lokales Maximum. Daher besitzt f bei ξ ein striktes lokales Minimum.

Bemerkungen: 1) Korollar 82 wird in vielen Extremwertaufgaben verwendet. Sind lokale Extrema der zweimal differenzierbaren Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ gesucht, so sucht man zunächst die „kritischen Punkte" $\xi \in I$ (d.h. jene Punkte $\xi \in I$, die $f'(\xi) = 0$ erfüllen). Danach entscheidet man mit Hilfe der zweiten Ableitung, ob in den kritischen Punkten ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt.

2) Die Umkehrung von Korollar 82 (i) bzw. (ii) gilt nicht. Z.B. besitzt die Funktion $f(x) = x^4$ im Punkt 0 ein lokales Minimum. (Das ist trivial, wir haben es oben aber auch mit Hilfe von Korollar 81 bewiesen.) Nun gilt aber $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$. Nun ist $f'(0) = f''(0) = 0$ und Korollar 82 daher nicht anwendbar. Man könnte sagen, Korollar 82 „sei zu schwach, um das Minimum zu erkennen". Tatsächlich gibt es stärkere Versionen von Korollar 82, mit deren Hilfe man überprüfen kann, dass $f(x) = x^4$ bei 0 ein lokales Minimum besitzt.

Beispiele: 1) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{R}$ und $f''(x) = 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Da $f'(x) = 2x = 0$ nur für $x = 0$, ist $x = 0$ der einzige kritische Punkt. Wegen $f''(0) = 2 > 0$ besitzt f bei 0 ein striktes lokales Minimum (was aber offensichtlich ist).

2) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$. Wir haben oben bereits $f'(x) = 6(x-3)(x+2)$ berechnet. Aus Satz 80 bzw. Korollar 81 folgt bereits, dass f bei -2 ein striktes lokales Maximum und bei 3 ein striktes lokales Minimum besitzt. Wir überprüfen das nochmals mit Hilfe von Korollar 82. Es ist $f'(x) = 6(x^2 - x - 6)$ und daher $f''(x) = 6(2x-1)$. Die kritischen Punkte sind in diesem Fall -2 und 3. Wegen $f''(-2) = 6 \cdot (-5) = -30 < 0$ und $f''(3) = 6 \cdot 5 = 30 > 0$ folgt nochmals, dass f bei -2 ein striktes lokales Maximum und bei 3 ein striktes lokales Minimum besitzt.

3) Es sei $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\log x}{x}$. Wir haben oben bereits $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$ berechnet. Aus Satz 80 folgt bereits, dass f bei e

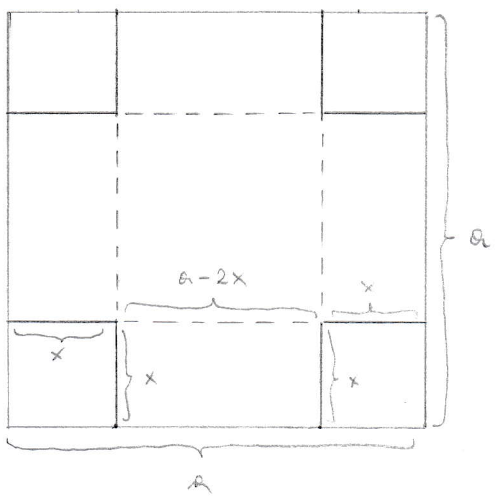
ein striktes lokales Maximum besitzt. Wir überprüfen das nochmals mit Hilfe von Korollar 82. Wegen $f'(x)=0 \iff \log x = 1 \iff x=e$ ist der einzige kritische Punkt bei e. Es ist nun

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\log x)}{x^4}=\frac{-1-2(1-\log x)}{x^3}$$

$$=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

Wegen $f''(e)=\frac{2-3}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0$ besitzt f bei e ein striktes lokales Maximum

Beispiele für Extremwertaufgaben: 1) Aus einem quadratischen Blech mit Seitenlänge a werden an den Ecken Quadrate weggeschnitten. Aus dem Rest wird eine (quaderförmige) Schachtel (ohne Deckel) gebildet. Für welche Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate entsteht eine Schachtel mit maximalem Volumen?



Gesucht ist das Maximum der folgenden Funktion:

$$V:\left[0,\tfrac{a}{2}\right]\to\mathbb{R},\quad V(x)=(a-2x)^2x=(4x^2-4ax+a^2)x=4x^3-4ax^2+a^2x$$

Es ist nicht sinnvoll, die Funktion für $x>\frac{a}{2}$ zu betrachten, da man dann mehr Blech wegschneiden würde als vorhanden ist. Darum ist V nur auf dem Intervall $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ definiert.

Man muss bei Extremwertaufgaben auch immer die Möglichkeit berücksichtigen, dass das Extremum am Rand des Definitionsbereichs angenommen wird.

Im vorliegenden Beispiel ist das wegen $V(0)=V(\frac{a}{2})=0$ aber sicher nicht der Fall.

Die Ableitung von V ist $V'(x)=12x^2-8ax+a^2$

Die Nullstellen von V' (d.h. die kritischen Punkte) sind

$$x_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2-48a^2}}{24} = \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24} = \frac{2a \pm a}{6}$$

D.h. $x_1 = \frac{a}{6}$ und $x_2 = \frac{a}{2}$.

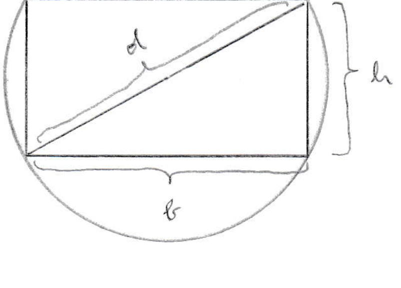
Man hätte bei der Berechnung der Ableitung V' und ihren Nullstellen auch von der Formel $V(x) = (a-2x)^2 x$ ausgehen können und die Produktregel anwenden können:

$$V'(x) = 2(a-2x)\cdot(-2)x + (a-2x)^2 = (a-2x)(-4x+a-2x)$$
$$= (a-2x)(a-6x)$$

Der Vorteil ist, dass man die Nullstellen $x_1 = \frac{a}{6}$ und $x_2 = \frac{a}{2}$ sofort ablesen kann. Außerdem erkennt man, dass die Funktion auf dem Intervall $[0, \frac{a}{6}]$ streng monoton wächst und auf dem Intervall $[\frac{a}{6}, \frac{a}{2}]$ streng monoton fällt. Die Funktion V nimmt ihr Maximum auf dem Intervall $[0, \frac{a}{2}]$ daher bei $x = \frac{a}{6}$ an. (wegen Satz 80).

Man kann das auch mittels Korollar 82 beweisen. Es ist $V''(x) = 24x - 8a = 8(3x-a)$. Also ist $V''(\frac{a}{6}) = 8\cdot(-\frac{a}{2}) = -4a < 0$ und $V''(\frac{a}{2}) = 8 \cdot \frac{a}{2} = 4a > 0$. Man sieht wieder, dass V bei $\frac{a}{6}$ ein Maximum annimmt (und bei $\frac{a}{2}$ ein Minimum). Man erhält $V(\frac{a}{6}) = (\frac{2a}{3})^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27}$. 4.5.2021

2) Aus einem Baumstamm mit kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt (und Breite b und Höhe h) ausgesägt werden. Der Balken soll dabei so ausgesägt werden, dass er möglichst tragfähig ist. Die Statik lehrt, dass zu diesem Zweck $b \cdot h^2$ möglichst groß sein soll. Wie müssen die Abmessungen des Balkens gewählt werden?



Da $b^2 + h^2 = d^2$ ist $h^2 = d^2 - b^2$ und gesucht ist das Maximum der Funktion $f : [0, d] \to \mathbb{R}$, $f(b) = b(d^2 - b^2) = d^2 b - b^3$.

Es ist $f'(b) = d^2 - 3b^2 = (d - \sqrt{3}b)(d + \sqrt{3}b)$ und $f''(b) = -6b$

Man sieht, dass $f'(b) = 0$ genau dann wenn $b \in \{\frac{d}{\sqrt{3}}, -\frac{d}{\sqrt{3}}\}$.

Bei $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ nimmt die Funktion f ein Maximum an. Das folgt aus Korollar 82 da $f''(\frac{d}{\sqrt{3}}) = -\frac{6d}{\sqrt{3}} < 0$. Es folgt aber auch aus Satz 80, da f auf dem Intervall $[0, \frac{d}{\sqrt{3}}]$ streng monoton wächst und auf dem Intervall $[\frac{d}{\sqrt{3}}, d]$ streng monoton fällt.

Man erhält also $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ ($\Rightarrow h^2 = \frac{2d^2}{3} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}}d = \frac{\sqrt{6}}{3}d$) und als maximalen Funktionswert

$$f\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = d^2 \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} - \frac{d^3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right)d^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}d^3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}d^3.$$

<u>Definition</u> Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir sagen,

- f ist konvex auf I, wenn f' auf I monoton wächst,
- f ist streng konvex auf I, wenn f' auf I streng monoton wächst,
- f ist konkav auf I, wenn f' auf I monoton fällt,
- f ist streng konkav auf I, wenn f' auf I streng monoton fällt.

<u>Bemerkung</u>: Es gibt allgemeinere (und bessere) Definitionen der Begriffe (streng) konvex und (streng) konkav, die auch für nicht differenzierbare Funktionen verwendet werden können.

<u>Korollar 83</u> Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

(i) f ist konvex auf I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$,

(ii) Ist $f''(x) > 0 \; \forall x \in I$, so ist f auf I streng konvex,

(iii) f ist konkav auf I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0 \; \forall x \in I$,

(iv) Ist $f''(x) < 0 \; \forall x \in I$, so ist f auf I streng konkav.

Beweis: (i) f ist konvex auf $I \iff f'$ wächst monoton auf $I \overset{\text{Satz } 78(i)}{\iff} f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

(ii) $f''(x) > 0 \ \forall x \in I \xRightarrow{\text{Satz } 78(iii)} f'$ wächst streng monoton auf $I \Rightarrow f$ ist streng konvex auf I

(iii) f ist konkav auf $I \iff f'$ fällt monoton auf $I \overset{\text{Kor. } 79(i)}{\iff} f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$

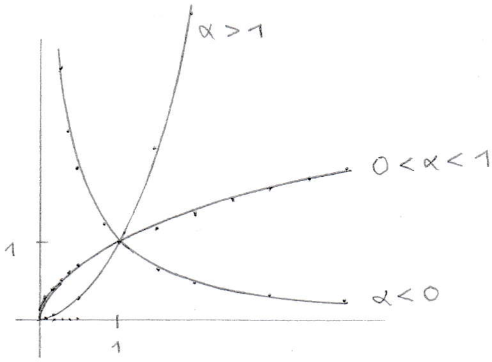
(iv) $f''(x) < 0 \ \forall x \in I \xRightarrow{\text{Kor. } 79(iii)} f'$ fällt streng monoton auf $I \Rightarrow f$ ist streng konkav auf I

Beispiele: 1) Es sei $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$. Die Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$, da $f''(x) = (\log a)^2 \cdot a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist die Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$ streng konvex.

2) Es sei $b > 1$. Die Logarithmusfunktion $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = {}_b\log x$ ist streng konkav auf $(0,+\infty)$, denn $f'(x) = \frac{1}{\log b \cdot x} \ \forall x > 0$ und daher

$$f''(x) = -\frac{1}{\log b \cdot x^2} < 0 \ \forall x > 0.$$

3) Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Wir betrachten die Potenzfunktion $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = x^\alpha$. Aus $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ und $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ und Korollar 83 (ii) bzw (iv) folgt: Die Potenzfunktion f ist streng konvex auf $(0,+\infty)$ wenn $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$ und streng konkav auf $(0,+\infty)$ wenn $0 < \alpha < 1$.



4) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$, da ihre Ableitung $f'(x) = 2x$ streng monoton wächst (bzw. $f''(x) = 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

5) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist streng konkav auf $(-\infty,0)$ und streng konvex auf $(0,+\infty)$, da ihre Ableitung $f'(x) = 3x^2$ auf $(-\infty,0)$ streng monoton fällt bzw. auf $(0,+\infty)$ streng monoton wächst (bzw. $f''(x) = 6x < 0 \ \forall x < 0$ und $f''(x) = 6x > 0 \ \forall x > 0$).

6) Die Funktion $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist streng konkav auf $(-\infty, 0)$ und streng konvex auf $(0, +\infty)$. Aus $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ folgt $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Daher ist $f''(x) = \frac{2}{x^3} < 0$ $\forall x < 0$ und $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ $\forall x > 0$.

Bemerkung: Man kann Bsp. 1) verwenden, um sich den Unterschied zwischen konvex und konkav zu merken:

Die **Ex**ponentialfunktion ist konv**ex**.

Korollar 84 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Ist f konvex auf I, so ist $f(x) \geq f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ $\forall a, x \in I$,

(ii) Ist f streng konvex auf I, so ist $f(x) > f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ $\forall a, x \in I$ mit $x \neq a$,

(iii) Ist f konkav auf I, so ist $f(x) \leq f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ $\forall a, x \in I$,

(iv) Ist f streng konkav auf I, so ist $f(x) < f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ $\forall a, x \in I$ mit $x \neq a$.

Beweis: (i) Es seien $x, a \in I$. Ist $x \neq a$, so gibt es nach Satz 75 ein $\xi \in I$ zwischen x und a, derart dass

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)\cdot(x-a) \geq f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

(Ist $x < a$, so ist $f'(\xi) \leq f'(a)$ und $x - a < 0$. Ist $x > a$, so ist $f'(\xi) \geq f'(a)$ und $x - a > 0$. In beiden Fällen ist $f'(\xi)\cdot(x-a) \geq f'(a)\cdot(x-a)$.)

(ii) Es seien $x, a \in I$ und $x \neq a$. Wie im Beweis von (i) gibt es ein ξ zwischen x und a, derart dass

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)\cdot(x-a) > f(a) + f'(a)\cdot(x-a).$$

(Ist $x < a$, so ist $f'(\xi) < f'(a)$ und $x - a < 0$. Ist $x > a$, so ist $f'(\xi) > f'(a)$ und $x - a > 0$. In beiden Fällen $f'(\xi)\cdot(x-a) > f'(a)\cdot(x-a)$.)

(iii) und (iv) Analog oder durch anwenden von (i) von (ii) auf $-f: I \to \mathbb{R}$. (Ist f' (streng) monoton wachsend (bzw. fallend), so ist $-f'$ (streng) monoton fallend (bzw. wachsend).)

Bemerkung: Korollar 84 bringt zum Ausdruck, dass bei einer konvexen (bzw. konkaven) Funktion, die Tangenten stets unterhalb (bzw. oberhalb) des Funktionsgraphen liegen.

Beispiele: 1) $e^x > 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$, da $f''(x) = e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Aus Korollar 84 (ii) folgt $e^x = f(x) > \underbrace{f(0)}_{=1} + \underbrace{f'(0)}_{=1} \cdot (x - 0) = 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

2) $(1+x)^n > 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad \forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ (Bernoullische Ungleichung)

Ist $f(x) = (1+x)^n$, so ist $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} > 0$ für $n \geq 2$ und $x > -1$, d.h. f ist streng konvex auf dem Intervall $(-1, +\infty)$. Aus Korollar 84 (ii) folgt $(1+x)^n = f(x) > \underbrace{f(0)}_{=1} + \underbrace{f'(0)}_{n} \cdot (x - 0) = 1 + nx \quad \forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

6.5.2021