4.3 Die Regel von de l'Hospital

Satz 85 Es seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ und $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$. Existiert $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \alpha$, so existiert auch

$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Dabei ist außer $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha = \pm\infty$ zulässig.

Beweis: Setze $f(a) = g(a) = 0$. Dann sind f und g auf $[a,b)$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Ist $x \in (a,b)$, so sind f und g auf $[a,x]$ stetig und auf (a,x) differenzierbar. Nach Satz 76 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

$$\exists \xi \in (a,x): f(x) g'(\xi) = (f(x) - f(a)) g'(\xi) = (g(x) - g(a)) f'(\xi) = g(x) f'(\xi).$$

Nach Voraussetzung ist dabei $g'(\xi) \neq 0$. Es muss aber auch $g(x) \neq 0$ gelten, denn sonst wäre $g(x) = g(a) = 0$ und nach dem Satz von Rolle (Satz 74) würde ein $\eta \in (a,x)$ mit der Eigenschaft $g'(\eta) = 0$ existieren, ein Widerspruch.

Daher ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wenn nun $x \to a+$, so gilt auch $\xi \to a+$ (da $a < \xi < x$) und daher $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \xrightarrow[x\to a+]{} \alpha$, woraus $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a+]{} \alpha$ folgt.

Bemerkung: Völlig analog zeigt man: Sind $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Aus Satz 85 und der analogen Aussage für linksseitige Grenzwerte ergibt sich auch eine analoge Aussage für beidseitige Grenzwerte.

Beispiele: 1) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Aus der Stetigkeit von Polynomfunktionen folgt sofort $\lim_{x\to 1} (1 + x + x^2 + \dots + x^n) = n + 1$.

Da $\lim_{x\to 1} (x^{n+1} - 1) = \lim_{x\to 1} (x - 1) = 0$, kann man dieses Ergebnis auch durch anwenden der Regel von de l'Hospital auf $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ erhalten:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(n+1)x^n}{1} = \lim_{x\to 1}(n+1)x^n = n+1.$$

2) Bei vielen Berechnungen von Grenzwerten wird die Regel von de l'Hospital mehrmals angewandt. Wichtig dabei ist, dass man nicht vergisst, vor jeder Anwendung zu überprüfen, dass die dafür nötigen Voraussetzungen erfüllt sind. In der Rechnung

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{x^2} \overset{①}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$$

$$\overset{②}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{1} = \lim_{x\to 0}\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right) = 4$$

wurde die Regel von de l'Hospital bei ① und ② angewandt. Das war bei ① möglich weil $\lim_{x\to 0}(e^{2x}+e^{-2x}-2) = \lim_{x\to 0}x^2 = 0$ und es war bei ② möglich, weil $\lim_{x\to 0}(e^{2x}-e^{-2x}) = \lim_{x\to 0}x = 0$ ist. D.h. die doppelte Anwendung der Regel von de l'Hospital war nur möglich weil zweimal die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ auftrat.

<u>Korollar 86</u> Es seien $f,g:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x)\neq 0 \ \forall x\in(a,+\infty)$ und $\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}g(x) = 0$. Existiert $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} =: \alpha$, so existiert auch $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Dabei sind außer $\alpha\in\mathbb{R}$ auch $\alpha=\pm\infty$ zulässig.

<u>Beweis:</u> OBdA sei $a>0$. Es sei $\tilde f:(0,\frac{1}{a})\to\mathbb{R}$, $\tilde f(t) := f(\frac{1}{t})$ und $\tilde g:(0,\frac{1}{a})\to\mathbb{R}$, $\tilde g(t) := g(\frac{1}{t})$. Aus $\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t} = +\infty$ folgt

$$\lim_{t\to 0+}\tilde f(t) = \lim_{t\to 0+}f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x\to+\infty}f(x) = 0 \quad \text{und analog} \quad \lim_{t\to 0+}\tilde g(t) = 0.$$

Weiters ist $\tilde g'(t) = \frac{d}{dt}g\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)\neq 0 \quad \forall t\in(0,\frac{1}{a})$ und analog

$\tilde f'(t) = -\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \forall t\in(0,\frac{1}{a})$. Daraus folgt

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\tilde f'(t)}{\tilde g'(t)} = \lim_{t\to 0+}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Wegen Satz 85 existiert $\lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)}$ und $\lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \alpha$.

Daraus erhält man

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \alpha.$$

<u>Bemerkung</u>: Völlig analog zeigt man: Sind $f, g : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (-\infty, a)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>Satz 87</u> Es seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ und $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty$. Existiert $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \alpha$, so existiert auch $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Dabei sind $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha = +\infty$ zulässig.

<u>Beweisskizze</u>: Es sei zunächst $\alpha \in \mathbb{R}$. Es sei $c \in (a,b)$. Ist x hinreichend nahe bei a, so gelten

$$f(x) - f(c) > 0, \quad g(x) - g(c) > 0, \quad f(x) > 0 \quad \text{und} \quad g(x) > 0$$

und in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \frac{f(x)}{f(x)-f(c)} \cdot \frac{g(x)-g(c)}{g(x)}$$

sind im Ausdruck auf der rechten Seite alle Zähler und Nenner positiv.

Nun ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha = \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}}_{=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}} - \alpha\Big)}_{\to 0} \underbrace{\frac{f(x)}{f(x)-f(c)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}}_{\to 1} + \alpha \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{f(x)}{f(x)-f(c)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}}_{\to 1} - 1\Big)}_{\to 0}$$

Dabei ist $\xi \in (x,c) \subseteq (a,c)$. Wählt man c hinreichend nahe bei a, so ist (für $\varepsilon > 0$ beliebig fest gewählt)

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - \alpha \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \alpha \right| < \varepsilon \quad \text{(bzw. ein passender Bruchteil von } \varepsilon\text{)}$$

Wählt man ein solches c von Anfang an, so kann man $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| < \varepsilon$ erreichen.

Es sei nun $\alpha = +\infty$, d.h. $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Dann ist $f'(x) \neq 0$ für x hinreichend nahe bei a und

$$\lim_{x \to a+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{1}{\frac{f'(x)}{g'(x)}} = 0,$$

woraus $\lim\limits_{x \to a+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ folgt. Wegen $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$

ist $f(x) > 0$ und $g(x) > 0$ für x hinreichend nahe bei a und daher

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}} = +\infty$$

Bemerkungen: 1) Es gelten wieder zu Satz 87 analoge Aussagen für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn diese von der unbestimmten Form $\frac{+\infty}{+\infty}$ sind (d.h. wenn $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to b-} g(x) = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$).

2) Die in Satz 85, Korollar 86 und Satz 87, sowie den Bemerkungen danach beschriebenen Aussagen werden alle als „Regel von de l'Hospital" bezeichnet.

Korollar 88 (i) Es sei $\alpha, \beta > 0$. Dann ist $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$,

(ii) Es sei $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $\alpha > 0$. Dann ist $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^{\alpha x}} = 0$,

(iii) Es sei $\alpha > 0$. Dann ist $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$,

(iv) Es sei $\alpha > 0$. Dann ist $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha \log x = 0$;

(v) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x = 1$

Beweis: (i) Bezeichnet $f(x) = x^\beta$ und $g(x) = e^{\alpha x}$, so ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}}, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha e^{\alpha x}}, \quad \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\beta(\beta-1)x^{\beta-2}}{\alpha^2 e^{\alpha x}}, \quad \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)x^{\beta-3}}{\alpha^3 e^{\alpha x}}, \ldots$$

Allgemein ist (was man auch leicht mit Induktion überprüft)

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)x^{\beta-n}}{\alpha^n e^{\alpha x}}$$

Ist $\beta > n$, so gilt $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to+\infty} \beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)x^{\beta-n} = +\infty$.

(Das folgt aus Bsp. 1) am Ende von Abschnitt 3.7 und einem Analogon zu Satz 61 (iii).)

Außerdem ist $\lim_{x\to+\infty} \alpha^n e^{\alpha x} = +\infty$. (Das folgt aus Bsp. 2) am Ende von Abschnitt 3.7 und einem Analogon zu Satz 61 (iii).) Wir wenden die Regel von de l'Hospital nun n-mal an, solange bis $\beta \leq n$. Dann ist

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{\alpha^n x^{n-\beta} e^{\alpha x}},$$

wobei $n-\beta \geq 0$. Nun ist $\lim_{x\to+\infty} x^{n-\beta} = +\infty$ (falls $\beta<n$) bzw. $x^{n-\beta} = 1$ (falls $\beta = n$) und $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} = +\infty$. Falls $\beta < n$ folgt $\lim_{x\to+\infty} \alpha^n x^{n-\beta} e^{\alpha x} = +\infty$ aus analogen Aussagen zu Satz 61 (iv) und (iii).

Ist $\beta = n$, so ist $\lim_{x\to+\infty} \alpha^n x^{n-\beta} e^{\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} \alpha^n e^{\alpha x} = +\infty$. In beiden Fällen erhält man (für das kleinste $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $\beta \leq n$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{\alpha^n x^{n-\beta} e^{\alpha x}} = 0.$$

(ii) Es sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{e^{\alpha x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{a_k x^k}{e^{\alpha x}}}_{=0} = 0.$$

(iii) Es ist $\lim_{x\to+\infty} \log x = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ (wegen Bsp. 1) bzw. 3) am Ende von Abschnitt 3.7) und daher (da $\lim_{x\to+\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

(iv) Da $\lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0$ und $\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty$ (Bsp. 4) vor Satz 61 in Abschnitt 3.7)

handelt es sich hier um die unbestimmte Form $0\cdot(-\infty)$ und man kann die Regel von de l'Hospital nicht direkt anwenden. Dies ist allerdings möglich, wenn man verwendet, dass $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ und $\lim_{x\to 0+} x^{-\alpha} = +\infty$.

Dann erhält man

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{x^{\alpha+1}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right) = 0.$$

Dass die unbestimmte Form bei $\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x^{-\alpha}}$ von der Gestalt $\frac{-\infty}{+\infty}$ ist (und nicht $\frac{+\infty}{+\infty}$) ist kein Problem. Man kann z.B. argumentieren, dass

$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = -\lim_{x\to 0+}\frac{-\log x}{x^{-\alpha}}$. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0+}\frac{-\log x}{x^{-\alpha}}$ hat dann die unbestimmte Form $\frac{+\infty}{+\infty}$ und eine zu obigen Rechnung analoge zeigt

$$\lim_{x\to 0+}\frac{-\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right) = 0.$$

(v) Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^{\lim_{x\to 0+} x\log x} \overset{\text{Bsp. 4)}}{=} e^0 = 1.$$