4.4 Der Satz von Taylor

Satz 89 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar in a. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} p \leq n$, die die Eigenschaft $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq n$ besitzt, nämlich

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Beweis: Eindeutigkeit: Angenommen, die Polynomfunktion

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

besitzt die geforderte Eigenschaft. Für $0 \leq k \leq n$ ist

$$p^{(k)}(x) = k!\,c_k + (k+1)\cdot k \cdots 2\, c_{k+1}(x-a) + \dots + n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}.$$

Daher muss $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!\,c_k$ und daher $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ (für $0 \leq k \leq n$) gelten.

Existenz: Nach der eben durchgeführten Rechnung besitzt das Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ die Eigenschaft $p^{(k)}(a) = k! \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = f^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq n$.

10.5.2021

Definition: Gelten die Voraussetzungen von Satz 89, so wird das Polynom $T_{n,a}(f) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ als das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle a bezeichnet.

Beispiele: 1) Es sei $f(x) = e^x$ und $a = 0$. Dann ist $f^{(k)}(x) = e^x \ \forall k \geq 0$ und daher $f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \ \forall k \geq 0$. Daher ist

$$T_{n,0}(f) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2) Es sei $f(x) = \log(1+x)$ und $a = 0$. Dann ist $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \ \forall k \geq 1$ (wie in Bsp. 4) am Ende von Abschnitt 4.1) und daher $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \ \forall k \geq 1$.
Da $f(0) = 0$ ist $T_{n,0}(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$

Satz 90 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x \in I$ und die beiden Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien beide in x n-mal differenzierbar. Dann ist auch $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ in x n-mal differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$

Beweis: Induktion nach n.

Der Fall $n = 1$ ist gerade die Produktregel (Satz 67 (iv)), denn

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \binom{1}{0} f^{(1-0)}(x) \cdot g^{(0)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x).$$

Induktionsschritt:

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left((f \cdot g)^{(n)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d}{dx}\left(f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

$$= f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x) + f(x)\, g^{(n+1)}(x)$$

$$= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)}(x)\, g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x) + \binom{n+1}{n+1} f(x)\, g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

Satz 91 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und die beiden Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien beide in a n-mal differenzierbar. Gilt $f(x) = p(x) + (x-a)^n g(x)$ $\forall x \in I$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion mit $\operatorname{grad} p \leq n$ ist und g die Bedingung $g(a) = 0$ erfüllt, so ist $p = T_{n,a}(f)$.

Beweis: Aus der Gleichung $f(x) = p(x) + (x-a)^n \cdot g(x)$ folgt für $0 \le k \le n$ mit Hilfe von Satz 90

$$f^{(k)}(x) = p^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(x) \cdot n(n-1) \dots (n-j+1) \cdot (x-a)^{n-j}$$

und daher

$$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(a) \cdot n(n-1) \dots (n-j+1) \cdot (a-a)^{n-j}$$

Für $0 \le j \le k-1$ ist (wegen $k-1 \le n-1$) auch $0 \le j \le n-1$ und daher $n-j \ge 1$.

Also ist $(a-a)^{n-j} = 0$ und damit

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(a) \cdot n(n-1) \dots (n-j+1) \cdot (a-a)^{n-j} = 0$$

Für $j = k$ ist $g^{(k-j)}(a) = g(a) = 0$. Also ist

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(a) \cdot n(n-1) \dots (n-j+1) \cdot (a-a)^{n-j} = 0$$

und daher $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ (für $0 \le k \le n$). Aus Satz 89 folgt, dass $p = T_{n,a}(f)$.

Beispiel: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Wendet man nun Satz 91 mit $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $a = 0$ und $g(x) = \frac{x}{1-x}$ an, so erhält man $T_{n,0}(f) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Satz 92 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar. Die Ableitung von $T_{n,a}(f)$ ist $T_{n-1,a}(f')$.

Beweis: Aus $T_{n,a}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ folgt

$$\frac{d}{dx} T_{n,a}(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = T_{n-1,a}(f')(x).$$

Beispiel: Für $f(x) = \log(1+x)$ ist $T_{n+1,0}(f) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(siehe oben). Wendet man Satz 92 an, erhält man sofort das n-te Taylorpolynom von $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ an der Stelle 0.

$$T_{n,0}(f') = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = 1 - x + x^2 - + \cdots + (-1)^n x^n$$

Definition: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$. Man sagt, f sei (auf I) stetig differenzierbar, wenn die Ableitung f' von f auf I existiert und f' stetig ist. Allgemein heißt f n-mal stetig differenzierbar, wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f auf I existiert und $f^{(n)}$ stetig ist.

Bemerkung: Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss nicht stetig sein. z.B. ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

differenzierbar, ihre Ableitung f' ist im Punkt $x=0$ aber nicht stetig.

Satz 93 Die Funktion $f: [a,x] \to \mathbb{R}$ (bzw. $f: [x,a] \to \mathbb{R}$) sei n-mal stetig differenzierbar und ihre $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ möge auf (a,x) (bzw. (x,a)) existieren. Weiters sei $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Dann $\exists \xi \in (a,x)$ (bzw. $\exists \xi \in (x,a)$), derart dass

$$f(x) - T_{n,a}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \cdot p}(x-a)^p (x-\xi)^{n+1-p}.$$

Bemerkung: Der Ausdruck auf der rechten Seite wird als Schlömilchsches Restglied bezeichnet.

Beweis: Es seien $F, G: [a,x] \to \mathbb{R}$ (bzw. $F, G: [x,a] \to \mathbb{R}$) definiert als

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \quad \text{und} \quad G(t) = (x-t)^p.$$

Dann gelten $F(a) = f(x) - T_{n,a}(f)(x)$, $F(x) = G(x) = 0$,

$G'(t) = -p(x-t)^{p-1}$ und

$$F'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)$$

$$= -f'(t) - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - f'(t)\right)$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad \forall t \in (a,x) \quad (\text{bzw } \forall t \in (x,a))$$

Da F und G auf $[a,x]$ (bzw. $[x,a]$) stetig und auf (a,x) (bzw. (x,a)) differenzierbar sind, kann man den Verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 76) anwenden. Dh es gibt ein ξ zwischen a und x, derart dass

$$\left(T_{n,a}(f)(x) - f(x)\right)\cdot\left(-p(x-\xi)^{p-1}\right) = \left(F(x)-F(a)\right)\cdot G'(\xi)$$

$$= \left(G(x)-G(a)\right)\cdot F'(\xi) = -(x-a)^p\left(-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right)$$

bzw.

$$\left(f(x) - T_{n,a}(f)(x)\right)\cdot p(x-\xi)^{p-1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)^p(x-\xi)^n.$$

Daraus folgt sofort

$$f(x) - T_{n,a}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}.$$

Korollar 94 Die Funktion $f:[a,x]\to\mathbb{R}$ (bzw. $f:[x,a]\to\mathbb{R}$) sei n-mal stetig differenzierbar und ihre $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ möge auf (a,x) (bzw. (x,a)) existieren.

(i) $\exists\xi\in(a,x)$ (bzw $\exists\xi\in(x,a)$): $f(x) - T_{n,a}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n$,

(Cauchysches Restglied)

(ii) $\exists\xi\in(a,x)$ (bzw. $\exists\xi\in(x,a)$): $f(x) - T_{n,a}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

(Lagrangesches Restglied)

Beweis: (i) Setze $p=1$ in Satz 93.

(ii) Setze $p=n+1$ in Satz 93

Bemerkungen: 1) Am häufigsten wird das Lagrangesche Restglied (Korollar 94 (iii)) verwendet, d.h.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

2) Eine weitere Darstellung des Restglieds (das Integralrestglied) folgt später.

Beispiel: Es sei $f(x) = e^x$ und $a = 0$. Dann folgt sofort aus Korollar 94 (iii): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein ξ zwischen 0 und x, derart dass

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Korollar 95 $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right)$

Beweis: Wählt man im vorangegangenen Beispiel $x = 1$, so erhält man:

$\forall n \geq 1 \quad \exists \xi_n \in (0,1): \; e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}$ und daher

$$\left|1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} - e\right| = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{n+1} \leq \frac{4}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Korollar 96 Die Zahl e ist irrational (d.h. $e \notin \mathbb{Q}$).

Beweis: Angenommen, es wäre $e = \frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Setzt man $n := \max\{q, 3\}$, so wäre

$$\frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

für ein $\xi \in (0,1)$. Daraus folgt

$$\underbrace{\frac{pn!}{q}}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{e^\xi}{n+1}$$

und daher $\qquad \frac{e^\xi}{n+1} = \frac{pn!}{q} - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \in \mathbb{Z}.$

Nun gilt aber

$$0 < \xi < 1 \implies 0 < e^\xi < e \leq 4 \implies 0 < \frac{e^\xi}{n+1} < \frac{4}{n+1} \leq 1,$$

d.h. $\frac{e^\xi}{n+1} \in (0,1)$, ein Widerspruch.