5. Integrierbare Funktionen

5.1 Definition des Riemann-Integrals

Def.: Eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ ist eine endliche Menge $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a,b]$ mit der Eigenschaft $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Die Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n$ werden Teilungspunkte der Zerlegung Z genannt, die Intervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ werden Teilungsintervalle der Zerlegung Z genannt.

Definition: Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, so heißt Z_2 feiner als Z_1, wenn $Z_1 \subseteq Z_2$. (D.h. Z_2 hat mindestens so viele Teilungspunkte wie Z_1.)

Lemma 97 Die Relation feiner zu sein ist eine Ordnungsrelation auf der Menge der Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$.

Beweis: Offenbar gilt $Z \subseteq Z$ für jede Zerlegung Z von $[a,b]$. Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ und $Z_1 \subseteq Z_2$ und $Z_2 \subseteq Z_1$, so folgt $Z_1 = Z_2$.
Sind Z_1, Z_2 und Z_3 Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ und $Z_1 \subseteq Z_2$ und $Z_2 \subseteq Z_3$, so folgt $Z_1 \subseteq Z_3$.

Bemerkungen: 1) Die Relation feiner zu sein ist keine Totalordnung, da zwei Zerlegungen möglicherweise nicht vergleichbar sind, z.B.: sind $Z_1 = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, 1\}$ und $Z_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$ zwei Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$, für die weder $Z_1 \subseteq Z_2$ noch $Z_2 \subseteq Z_1$ gilt.

2) Zu zwei Zerlegungen Z_1 und Z_2 gibt es aber immer die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \cup Z_2$, die feiner als Z_1 und Z_2 ist. Im Bsp. in Bemerkung 1 wäre das $Z_1 \cup Z_2 = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Definition: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so definiert man die Untersumme

$$U(f,Z) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

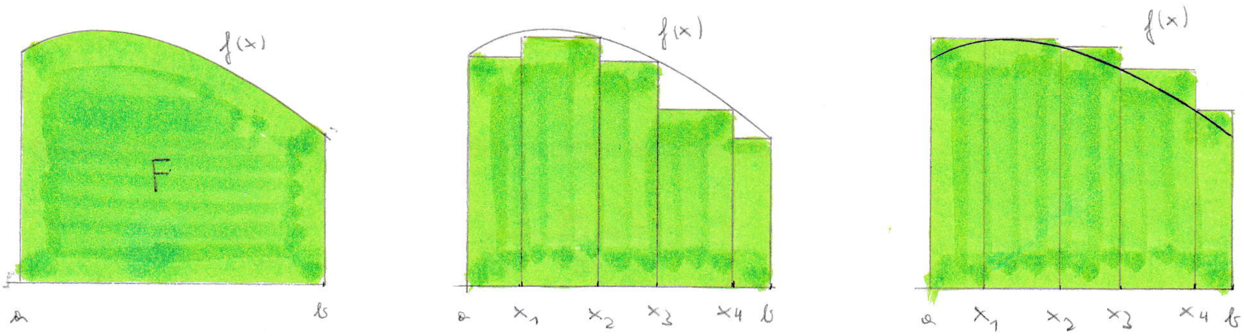
wobei $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \inf f([x_{i-1}, x_i])$

und die Obersumme

$$O(f,Z) = M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + \dots + M_n(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

wobei $M_i = \sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = \sup\{f(x) \mid x_{i-1}\le x\le x_i\} = \sup f([x_{i-1},x_i])$

<u>Bemerkung</u>: Ist die Fläche F unter dem Graphen der beschränkten Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ gesucht, so entsprechen Unter- und Obersumme der Approximation der Fläche durch Rechtecke von unten und oben:



Fläche F   Untersumme $U(f,Z)$ Obersumme $O(f,Z)$

Offenbar gilt dabei $U(f,Z) \le F \le O(f,Z)$ für jede Zerlegung Z und die Approximation wird umso besser sein, je feiner die Zerlegung Z ist.

<u>Lemma 98</u> Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von $[a,b]$ und Z_2 feiner als Z_1. Dann gilt

$$U(f,Z_1) \le U(f,Z_2) \le O(f,Z_2) \le O(f,Z_1).$$

<u>Beweis</u>: 1. Ungleichung: Ist $Z_1 = \{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ und $y\in Z_2\setminus Z_1$ mit $x_{i-1}<y<x_i$, so ist

$$(x_i-x_{i-1}) \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = (y-x_{i-1}) \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) + (x_i-y) \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$$

$$\le (y-x_{i-1}) \inf_{x_{i-1}\le x\le y} f(x) + (x_i-y) \inf_{y\le x\le x_i} f(x)$$

Ist $Z_2\setminus Z_1=\{y\}$, so ist der Beweis der ersten Ungleichung fertig (da die übrigen Summanden gleich bleiben). Ansonsten verwende Induktion nach $|Z_2\setminus Z_1|$, d.h. füge einen Teilungspunkt nach dem anderen hinzu.

2. Ungleichung: Für $1 \le i \le n$ ist

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \le \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = M_i$$

und daher

$$U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = O(f,Z)$$

3. Ungleichung: Analog zu 1. Ungleichung.

<u>Korollar 99</u> Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von $[a,b]$ und $Z = Z_1 \cup Z_2$ die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Dann gilt

$$U(f,Z_1) \le U(f,Z) \le O(f,Z) \le O(f,Z_2).$$

<u>Beweis</u>: Folgt sofort aus Lemma 98.

<u>Definition</u>: Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Funktion f heißt (Riemann-) integrierbar, wenn es <u>genau eine</u> Zahl $I \in \mathbb{R}$ gibt, derart dass $U(f,Z_1) \le I \le O(f,Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt. Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so wird diese Zahl I das (bestimmte) Integral der Funktion f von a bis b genannt und man schreibt dafür

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

<u>Definition</u>: Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so seien

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{U(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{O(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

<u>Lemma 100</u> Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so ist $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

<u>Beweis</u>: Angenommen, es gäbe eine beschränkte Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx > \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Es sei $\delta := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx > 0$.

Dann gibt es (wegen Satz 5) Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a,b]$, derart dass

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\delta}{2} < U(f,Z_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le O(f,Z_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\delta}{2}.$$

Bezeichnet Z die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so folgt

$$O(f,Z) \le O(f,Z_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\delta}{2} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\delta}{2} < U(f,Z_1) \le U(f,Z),$$

ein Widerspruch.

<u>Satz 101:</u> Es sei $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist integrierbar,

(ii) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

<u>Beweis:</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii) Ist $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, so gibt es unendlich viele $I \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le I \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und daher

$$U(f,Z_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le I \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le O(f,Z_2)$$

für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$. Da das für unendlich viele $I \in \mathbb{R}$ gilt, ist $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht integrierbar.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Es sei $I := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Dann ist

$$U(f,Z_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = I = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le O(f,Z_2)$$

und daher $U(f,Z_1) \le I \le O(f,Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a,b]$. Weiters ist I die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft. (Gäbe es zwei Zahlen $I_1 < I_2$, die diese Bedingung erfüllen, so wäre $U(f,Z_1) \le I_1 < I_2 \le O(f,Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a,b]$ und daher $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le I_1 < I_2 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, ein Widerspruch.)

<u>Bemerkung:</u> Der Beweis von Satz 101 zeigt auch: Ist $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Satz 102 Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist integrierbar,

(ii) $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$, sodass $O(f,Z_2)-U(f,Z_1)<\varepsilon$,

(iii) $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ Zerlegung Z von $[a,b]$, sodass $O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Wegen Satz 101 ist $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

und es gibt Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a,b]$, derart dass

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < U(f,Z_1) \le \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x)\,dx \le O(f,Z_2) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt

$$O(f,Z_2)-U(f,Z_1) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Es seien Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$, derart dass $O(f,Z_2)-U(f,Z_1)<\varepsilon$. Bezeichnet Z $(=Z_1\cup Z_2)$ die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so folgt aus Korollar 99

$$O(f,Z)-U(f,Z) \le O(f,Z_2)-U(f,Z_1) < \varepsilon.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nicht integrierbar, so muss wegen Lemma 100 und Satz 101 $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ gelten. Dann ist aber

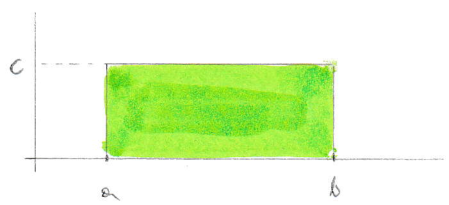
$$O(f,Z)-U(f,Z) \ge \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx > 0 \quad \text{für jede Zerlegung } Z$$

von $[a,b]$ und Bedingung (iii) kann für $\varepsilon>0$ mit $\varepsilon < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ nicht erfüllt werden.

Beispiele: 1) Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c\ (\in\mathbb{R})$ $\forall x\in[a,b]$. (D.h. f ist eine konstante Funktion.) Dann ist f auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = c\cdot(b-a)$. Es sei $Z=\{a,b\}$ (d.h. $x_0=a$, $x_1=b$). Dann ist

$m_1 = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x) = c$ und $M_1 = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x) = c$ und daher

$$U(f,Z)=O(f,Z)=c(b-a).$$



2) Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x$. Dann ist f auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar und $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

17.5.2021

Es sei Z_n die Zerlegung $Z_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ für $0 \le i \le n$.
Dann ist $m_i = \min\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \min\{x \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = x_{i-1} = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$,
$M_i = \max\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \max\{x \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ und
$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ für $1 \le i \le n$. Daraus folgt

$$U(f,Z_n) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(na + \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i\right) = \frac{b-a}{n}\left(na + \frac{b-a}{n}\,\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$= ab - a^2 + \frac{(b-a)^2(n-1)}{2n} = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2ab - 2a^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n} = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}$$

und

$$O(f,Z_n) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(na + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{b-a}{n}\left(na + \frac{b-a}{n}\,\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

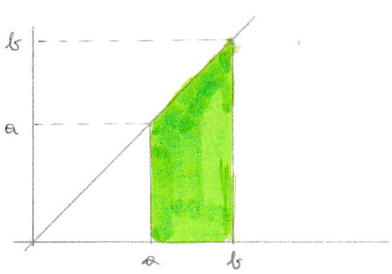
$$= ab - a^2 + \frac{(b-a)^2(n+1)}{2n} = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2ab - 2a^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n} = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

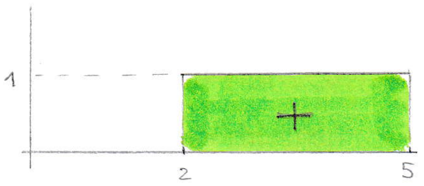
Man erhält $O(f,Z_n) - U(f,Z_n) = \frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit der Eigenschaft $\frac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon$. Für dieses n ist $O(f,Z_n) - U(f,Z_n) < \varepsilon$ und f ist integrierbar nach Satz 102.

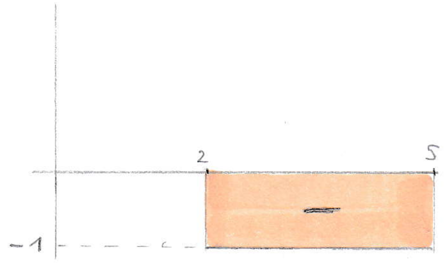
Da $\lim_{n\to\infty} O(f,Z_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$ ist $I = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$ die einzige Zahl mit der Eigenschaft $U(f,Z) \le I \le O(f,Z_n)$ und

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$$



Bemerkungen: 1) Das Integral einer Funktion f berechnet zwar anschaulich die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f, es versieht den Flächeninhalt aber mit einem Vorzeichen – je nachdem, ob diese Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. In Bsp. 1) oben ist für $f(x)=1$ z.B. $\int_2^5 f(x)\,dx = 3$ aber für $g(x) = -1$ ist $\int_2^5 g(x)\,dx = -3$.

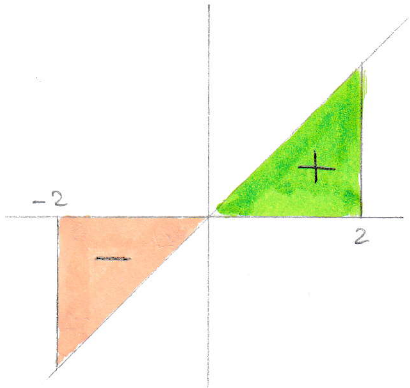




$$\int_2^5 f(x)\,dx = 1\cdot(5-2) = 3 \qquad \int_2^5 g(x)\,dx = (-1)\cdot(5-2) = -3$$

Die Werte für Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse können sich dabei auch gegenseitig aufheben. In Bsp. 2) oben wäre z.B.

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = \frac{2^2-(-2)^2}{2} = 0.$$



2) Es gibt beschränkte Funktionen, die nicht (Riemann-)integrierbar sind. Ein Bsp. wäre etwa $c_{\mathbb{Q}}: [0,1] \to \mathbb{R}$, $c_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

Es sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ irgendeine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$. Wegen Satz 3 ist $[x_{i-1},x_i]\cap\mathbb{Q} \neq \emptyset$ und daher $M_i = 1$ für $1 \le i \le n$. Daraus ergibt sich $O(f,Z) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1$. Nun kann man leicht $[x_{i-1},x_i]\setminus\mathbb{Q} \neq \emptyset$ zeigen, woraus $m_i = 0$ und $U(f,Z) = 0$ folgt. In diesem Bsp. erfüllt jedes $I \in [0,1]$ die Bedingung $U(f,Z) \le I \le O(f,Z)$ für alle Zerlegungen Z von $[0,1]$ und es gilt $\underline{\int_0^1} c_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} c_{\mathbb{Q}}(x)\,dx$.