5.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 103 Jede monotone Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar

Beweis: Es sei f zunächst monoton wachsend.

Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$

und die Zerlegung $Z_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ für $0 \le i \le n$

Dann ist $f(x_{i-1}) \le f(x) \le f(x_i)$ $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ und daher $m_i = f(x_{i-1})$ und

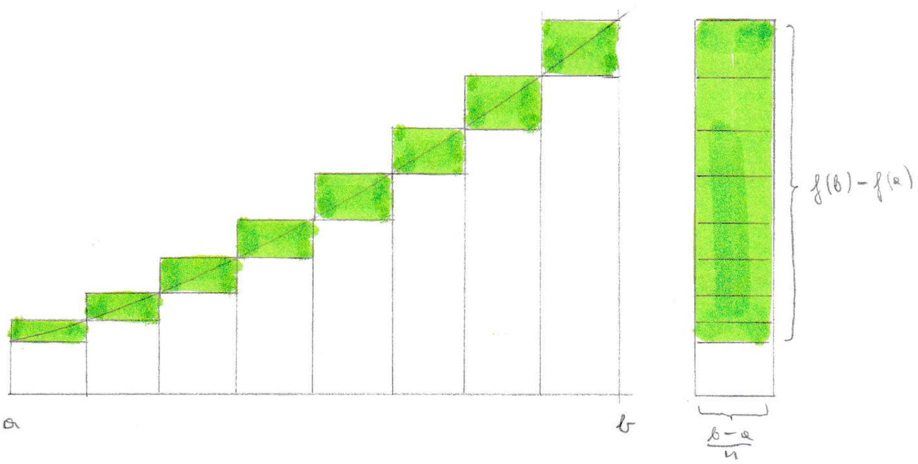
$M_i = f(x_i)$ für $1 \le i \le n$. Es folgt

$$O(f,Z_n) - U(f,Z_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{1}{n}(b-a)} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{1}{n}(b-a)\left(f(b) - f(a)\right) < \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 102.
Ist die Funktion f monoton fallend, kann der Beweis analog geführt werden.



Veranschaulichung des Beweises von Satz 103. Die grüne Fläche (links in Stücken, rechts zu einem Rechteck zusammengesetzt) entspricht gerade $O(f,Z_n) - U(f,Z_n) = \frac{1}{n}(b-a)(f(b)-f(a))$. Durch entsprechende Wahl von n kann man die grüne Säule rechts beliebig schmal und die Fläche dadurch beliebig klein machen.

Satz 104 Jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 57 ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sogar gleichmäßig stetig.

Also $\exists \delta > 0$, sodass $\forall x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Wähle nun eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit der Eigenschaft $x_i - x_{i-1} < \delta$ für $1 \leq i \leq n$. Sind nun $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so muss $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ gelten. Da die stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Satz 52 auf $[x_{i-1}, x_i]$ ihr Minimum m_i und ihr Maximum M_i annimmt, folgt $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für $1 \leq i \leq n$. Daraus erhält man

$$O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 102.

<u>Satz 105</u> (Linearität des Integrals) Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

(i) Sind $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist auch $f + g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.

(ii) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $cf : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_a^b (c f(x))\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$.

<u>Beweis</u>: (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Da $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind, gibt es nach Satz 102 Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a,b]$, derart dass $O(f, Z_1) - U(f, Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g, Z_2) - U(g, Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Bezeichnet $Z = Z_1 \cup Z_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so gelten wegen Lemma 98

$$O(f,Z) - U(f,Z) \leq O(f,Z_1) - U(f,Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$O(g,Z) - U(g,Z) \leq O(g,Z_2) - U(g,Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus

$$f(y)+g(y) \leq \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) + \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x) \quad \forall y \in [x_{i-1},x_i]$$

folgt

$$\sup_{x_{i-1}\leq y\leq x_i} (f(y)+g(y)) \leq \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) + \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x)$$

für $1\leq i\leq n$. Daraus erhält man (durch Multiplikation mit $x_i - x_{i-1}$ und anschließendem aufsummieren) $O(f+g,Z) \leq O(f,Z) + O(g,Z)$. Analog dazu zeigt man $U(f+g,Z) \geq U(f,Z) + U(g,Z)$. Daraus erhält man

$$O(f+g,Z) - U(f+g,Z) \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und nach Satz 102 ist $f+g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Aus

$$U(f,Z) + U(g,Z) \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq O(f,Z) + O(g,Z)$$

und

$$U(f,Z) + U(g,Z) \leq U(f+g,Z) \leq \int_a^b (f(x)+g(x))dx \leq O(f+g,Z) \leq O(f,Z) + O(g,Z)$$

folgt

$$\left| \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b (f(x)+g(x))dx \right| \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ gelten.

(ii) Ist $c=0$, so ist $cf = 0$ integrierbar und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt, da $\int_a^b (cf)(x)dx = 0 = c\int_a^b f(x)dx$.

Es sei nun $c>0$. Da $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, gibt es nach Satz 102 eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$, derart dass $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{c}$. Wegen Satz 8(ii) ist

$$\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} (cf(x)) = c \cdot \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$$

und daher (Multiplikation mit $x_i - x_{i-1}$ und aufsummieren) $O(cf,Z) = c \cdot O(f,Z)$.

Analog kann man $U(cf,Z) = c \cdot U(f,Z)$ zeigen und erhält

$$O(cf,Z) - U(cf,Z) = c\big(O(f,Z) - U(f,Z)\big) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Nach Satz 102 ist $c \cdot f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Aus

$$cU(f,Z) \leq c\int_a^b f(x)\,dx \leq c\,O(f,Z)$$

und

$$cU(f,Z) = U(cf,Z) \leq \int_a^b (cf(x))\,dx \leq O(cf,Z) = c\,O(f,Z)$$

folgt

$$\left| \int_a^b (cf(x))\,dx - c\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq c\big(O(f,Z) - U(f,Z)\big) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\int_a^b (cf(x))\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ gelten.

Es sei nun $c = -1$. Da $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, gibt es nach Satz 102 eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$, derart dass $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$. Wegen eines Analogons zu Korollar 9 ist

$$\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (-f(x)) = -\inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

woraus man (durch Multiplikation mit $x_i - x_{i-1}$ und aufsummieren) $O(-f,Z) = -U(f,Z)$ erhält. Analog zeigt man $U(-f,Z) = -O(f,Z)$.

Also ist $O(-f,Z) - U(-f,Z) = O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$ und $-f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar nach Satz 102. Aus

$$-O(f,Z) \leq -\int_a^b f(x)\,dx \leq -U(f,Z)$$

und

$$-O(f,Z) = U(-f,Z) \leq \int_a^b (-f(x))\,dx \leq O(-f,Z) = -U(f,Z)$$

folgt

$$\left| \int_a^b (-f(x))\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ gelten.

Ist $c<0$, so folgt die Behauptung aus den bisher gezeigten Fällen.

Die Funktion $cf: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, da $c \cdot f = (-1)\cdot|c|\cdot f$ und

$$\int_a^b (c f(x))\,dx = \int_a^b (-|c| f(x))\,dx = -\int_a^b (|c| f(x))\,dx = -|c|\int_a^b f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

18.5.2021

<u>Satz 106</u> Es seien $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen.

(i) Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\phi: D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $f([a,b]) \subseteq D$, so ist auch $\phi \circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(ii) Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $|f|: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(iii) Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $f^2: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(iv) Ist f integrierbar und $\exists \delta > 0: |f(x)| \geq \delta \ \forall x \in [a,b]$, so ist auch $\frac{1}{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(v) Sind $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ beide integrierbar, so ist auch $f\cdot g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(vi) Sind $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ beide integrierbar, so sind auch $\max\{f,g\}: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\min\{f,g\}: [a,b] \to \mathbb{R}$ beide integrierbar.

<u>Beweis:</u> (i) Da ϕ Lipschitz-stetig ist, $\exists L > 0: |\phi(y_1) - \phi(y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \ \forall y_1, y_2 \in D$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Da $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$, sodass $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{L}$. Für $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ ist

$$|\phi(f(x')) - \phi(f(x''))| \leq L\,|f(x') - f(x'')| \leq L\left(\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\right)$$

und daher

$$\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} \phi(f(x)) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} \phi(f(x)) \leq L\left(\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\right)$$

für $1 \leq i \leq n$. Durch Multiplikation mit $x_i - x_{i-1}$ und aufsummieren erhält man

$$O(\phi\circ f, Z) - U(\phi\circ f, Z) \leq L\big(O(f,Z) - U(f,Z)\big) < L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Nach Satz 102 ist $\phi\circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(ii) Die Funktion $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = |y|$ ist Lipschitz-stetig, da $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$.

Die Behauptung folgt aus (i)

(iii) Da $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion ist, ist $D := f([a,b])$ eine beschränkte Menge. Die Funktion $\phi: D \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = y^2$ ist Lipschitz-stetig, da

$$|y_1^2 - y_2^2| = |(y_1 - y_2)\cdot(y_1+y_2)| = |y_1+y_2|\cdot|y_1-y_2| \leq (|y_1| + |y_2|)\cdot|y_1-y_2|$$

$$\leq (2 \cdot \sup_{y \in D} |y|)\cdot|y_1 - y_2| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in D$$

mit $L = 1 + 2 \sup_{y \in D} |y| > 0$. Die Behauptung folgt aus (i).

(iv) Die Funktion $\phi: \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \geq \delta\} \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = \frac{1}{y}$ ist Lipschitz-stetig, da

$$\left|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right| = \frac{|y_1 - y_2|}{|y_1 y_2|} \leq \frac{1}{\delta^2}|y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in D = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \geq \delta\}$$

mit $L = \frac{1}{\delta^2}$. Die Behauptung folgt aus (i).

(v) Die Behauptung folgt aus der Darstellung $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$, Satz 105 und (iii).

(vi) Die Behauptung folgt aus den Darstellungen

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|) \quad \text{und} \quad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

Satz 105 und (ii).

<u>Satz 107</u> Es seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen.

(i) Ist $f \geq 0$ (d.h. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$), so ist $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(ii) Ist $f \geq g$ (d.h. $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [a,b]$), so ist $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

(Monotonie des Integrals)

(iii) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{(Dreiecksungleichung für Integrale)}$$

<u>Beweis</u>: (i) Ist $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so ist

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \quad \text{und daher} \quad U(f,Z) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

Daraus folgt $\int_a^b f(x)\,dx \geq U(f,Z) \geq 0$.

(ii) Aus $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ folgt sofort $f(x) - g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ und daraus (mittels (i) und Satz 105)

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

(iii) Nach Satz 106 (ii) ist auch $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Aus $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\ \forall x \in [a,b]$ folgt wegen (ii) und Satz 105

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$ und daraus (wegen Folgerung 4) in Abschnitt 1.3) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Satz 108 (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so $\exists \xi \in [a,b]$ sodass $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Beweis: Da die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist sie nach Satz 104 integrierbar und nach Satz 52 $\exists x_0, x_1 \in [a,b] : f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)\ \forall x \in [a,b]$.

Setzt man $m := f(x_0)$ und $M := f(x_1)$, so ist $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$.

Mit Hilfe von Satz 107 (ii) erhält man daraus

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

und daher

$$f(x_0) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(x_1).$$

Aus dem Zwischenwertsatz (Korollar 50) erhält man, dass

$$\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ (woraus sofort die Behauptung folgt).

Satz 109 Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $a < c < b$. Dann sind äquivalent:

(i) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar,

(ii) Die beiden Einschränkungen $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ und $f : [c,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.

Gilt eine der beiden (und damit beide) Bedingungen, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beweis: Es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{U(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} \qquad (*)$$
$$= \sup\{U(f,\overline{Z}) \mid \overline{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b] \text{ und } c \in \overline{Z}\}.$$

Einerseits ist $\{\overline{Z} \mid \overline{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b] \text{ und } c\in\overline{Z}\} \subseteq \{Z \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$, woraus

$$\{U(f,\overline{Z}) \mid \overline{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b] \text{ und } c\in\overline{Z}\} \subseteq \{U(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

und daher

$$\sup\{U(f,\overline{Z}) \mid \overline{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b], c\in\overline{Z}\} \le \sup\{U(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

folgt. Ist andererseits Z eine Zerlegung von $[a,b]$, so ist $\overline{Z} = Z \cup \{c\}$ eine (feinere) Zerlegung von $[a,b]$ und daher $U(f,Z) \le U(f,\overline{Z})$ nach Lemma 98. Daraus folgt

$$\sup\{U(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} \le \sup\{U(f,\overline{Z}) \mid \overline{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b], c\in\overline{Z}\},$$

womit die Gleichung $(*)$ bewiesen ist. Analog zeigt man

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{O(f,\overline{Z}) \mid \overline{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b], c\in\overline{Z}\}.$$

Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, so ist $\overline{Z} := Z_1 \cup Z_2$ eine Zerlegung von $[a,b]$, die $c \in \overline{Z}$ erfüllt. Ist $\overline{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $c\in\overline{Z}$, so sind $Z_1 := \overline{Z} \cap [a,c]$ und $Z_2 := \overline{Z}\cap[c,b]$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$. In beiden Situationen gilt

$$U(f,\overline{Z}) = U(f|_{[a,c]}, Z_1) + U(f|_{[c,b]}, Z_2),$$

wobei $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ die Einschränkungen von f auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ bezeichnen sollen. Daraus folgt

$$\{U(f,\overline{Z}) \mid \overline{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b], c\in\overline{Z}\} = \{U(f|_{[a,c]}, Z_1) \mid Z_1 \text{ Zerlegung von } [a,c]\}$$
$$+ \{U(f|_{[c,b]}, Z_2) \mid Z_2 \text{ Zerlegung von } [c,b]\},$$

woraus man wegen Satz 8 (i)

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

erhält. Analog zeigt man, dass

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Aus

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

folgen $\underline{\int_a^c} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)$ und $\underline{\int_c^b} f(x)dx = \overline{\int_c^b} f(x)dx$, woraus wegen Satz 101 die Beh. folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Aus

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$
$$= \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

erhält man $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$, woraus wegen Satz 101 die Behauptung folgt.

Gelten (i) und (ii), so ist $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx$. 20.5.2021

<u>Definition</u>: Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so setzt man $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) In der vorangegangenen Definition ist (wie bisher stets in diesem Kapitel) $a<b$ vorausgesetzt worden.

2) Direkt aus der Definition des Riemann-Integrals folgt $\int_a^a f(x)dx = 0$. (Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $f:[a,a]=\{a\} \to \mathbb{R}$ beliebig.)

3) Verwendet man die vorangegangene Definition (und Bemerkung 2), so gilt die Gleichung $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $a,b,c \in \mathbb{R}$ in beliebiger Reihenfolge. In Satz 109 wurde der Fall $a<c<b$ behandelt. Ist jetzt $c<a<b$ (oder $a<b<c$), so folgt aus Satz 109

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \quad \left(\text{bzw. } \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\right)$$

und daher

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\left(\text{bzw. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right).$$

Der Fall, dass zwei der drei Punkte a,b,c zusammenfallen (also $a=b$, $a=c$ oder $b=c$) kann leicht bewiesen werden. (Man muss bei all dem natürlich voraussetzen, dass $f:[m,M] \to \mathbb{R}$, mit $m=\min\{a,b,c\}$ und $M=\max\{a,b,c\}$, integrierbar ist.)

Lemma 110 Es sei $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq [a,b]$ eine endliche Menge und die Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ besitze die Eigenschaft, dass $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann ist die Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Beweis: O.B.d.A. sei $(a \leq) a_1 < a_2 < \dots < a_n (\leq b)$. Weiters sei $M := \max\{|f(a_1)|, |f(a_2)|, \dots, |f(a_n)|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |f(a_i)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun ein $\delta > 0$ mit den beiden Eigenschaften $2\delta < a_{i+1} - a_i$ (d.h. $\delta < \frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i)$) für $1 \leq i \leq n-1$ und $4Mn\delta < \varepsilon$ (d.h. $\delta < \frac{\varepsilon}{4Mn}$). D.h. $\delta < \min\left\{\frac{a_2 - a_1}{2}, \frac{a_3 - a_2}{2}, \dots, \frac{a_n - a_{n-1}}{2}, \frac{\varepsilon}{4Mn}\right\}$.

Die Zerlegung Z habe (außer a und b) die Teilungspunkte $\max\{a, a_1 - \delta\}, a_1 + \delta, a_2 - \delta, a_2 + \delta, \dots, a_n - \delta, \min\{b, a_n + \delta\}$. (Diese Teilungspunkte werden immer größer, da $a_i + \delta < a_{i+1} - \delta$ zur Bedingung $a_{i+1} - a_i > 2\delta$ äquivalent ist.) Aus

$$\sup_{a_i - \delta \leq x \leq a_i + \delta} f(x) \leq 2\delta M \quad \text{bzw.} \quad \inf_{a_i - \delta \leq x \leq a_i + \delta} f(x) \geq -2\delta M$$

für $1 \leq i \leq n$ (bzw. analogen Aussagen für a_1 und a_n, falls $a > a_1 - \delta$ bzw. $b < a_n + \delta$ sein sollte) folgt nun $O(f,Z) \leq n \cdot 2\delta M$ und $U(f,Z) \geq -n \cdot 2\delta M$ und damit $O(f,Z) - U(f,Z) \leq 4Mn\delta < \varepsilon$.

Also ist f integrierbar. Aus $-\varepsilon < U(f,Z) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq O(f,Z) < \varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ folgt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Satz 111 Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq [a,b]$ eine endliche Menge und die Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ besitze die Eigenschaft, dass $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann ist die Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Beweis: Die Funktion $g - f: [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt die Eigenschaft, dass $(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Nach Lemma 110 ist $g - f$ integrierbar und $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = 0$. Wegen Satz 105 (i) ist daher auch $g = (g-f) + f$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beispiele: 1) Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \ (\in \mathbb{R})$ eine konstante Funktion und $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, derart dass $g(x) = c \ \forall x \in (a,b)$ und $g(a), g(b) \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann ist g nach Satz 111 integrierbar und $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

2) Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. D.h. es gibt eine Partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, derart dass $f(x) = c_i \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$. Zusätzlich seien $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus Satz 109 und Beispiel 1) folgt, dass f integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$

3) Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, derart dass $g(x) = f(x) \ \forall x \in (a,b)$ und $g(a), g(b) \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann ist g nach Satz 111 integrierbar und $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
(Dieses Beispiel verallgemeinert Beispiel 1.)

4) Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion. D.h. es gibt eine Partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und stetige Funktionen $f_1:[x_0,x_1] \to \mathbb{R}$, $f_2:[x_1,x_2] \to \mathbb{R}, \dots, f_n:[x_{n-1},x_n] \to \mathbb{R}$, derart dass $f(x) = f_i(x) \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$ für $1 \le i \le n$. Aus Satz 109 und Beispiel 3) folgt, dass f integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx.$$

5) Ist also etwa $f:[-2,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^4+1 & \text{für } -2 < x < -1 \\ |x| & \text{für } -1 < x < 1 \\ 7x & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$$

und $f(-2), f(-1), f(1), f(2) \in \mathbb{R}$ beliebig,

so ist f integrierbar und $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^4+1)\,dx + \int_{-1}^1 |x|\,dx + \int_1^2 (7x)\,dx$.

27.5.2021