5.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 112 Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert als $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$.

Dann ist F stetig.

Beweis: Da f integrierbar ist, $\exists M > 0 : |f(t)| \leq M \quad \forall t \in [a,b]$. Es sei $\varepsilon > 0$.

Sind $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \frac{\varepsilon}{M}$ und $y \leq x$, so

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt \right| \overset{\text{Satz 109}}{=} \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \overset{\text{Satz 107 (iii)}}{\leq} \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\,dt$$

$$\overset{\text{Satz 107 (ii)}}{\leq} M \cdot |x-y| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Völlig analog zeigt man $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ falls $y > x$.

Bemerkung: Es folgt sofort: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, so ist F stetig, da $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$ nach Satz 112 stetig ist.

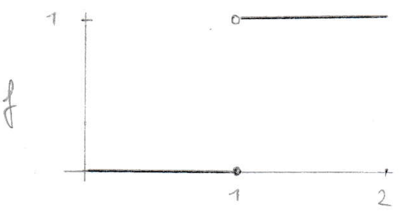
Beispiel: Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{falls } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

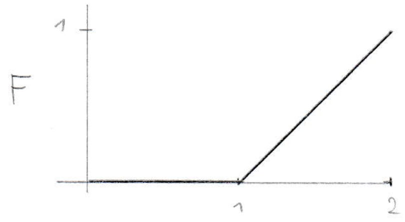
ist nach Beispiel 2) oben integrierbar und $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Für $0 \leq x \leq 1$ ist $F(x) = 0 \cdot (x-0) = 0$ und für $1 < x \leq 2$ ist

$$F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (x-1) = x-1.$$





Satz 113 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 1. Teil)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Dann ist F auf (a,b) differenzierbar und $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Beweis: Es sei $a<x<y<b$. Nach Satz 108 (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$$\exists\, \xi \in [x,y]: F(y)-F(x) = \int_x^y f(t)\,dt = f(\xi)\cdot(y-x).$$

Wenn nun $y \to x+$, dann auch $\xi \to x+$ und (wegen der Stetigkeit von f) auch $f(\xi) \to f(x)$. Da f bei x stetig ist,

$$\exists\, \delta>0, \text{ sodass } |y-x|<\delta,\ y\in[a,b] \Longrightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon.$$

Ist nun $0<y-x<\delta$, so $|\xi-x|<\delta$ und daher $|f(\xi)-f(x)|<\varepsilon$ und schließlich

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right| = |f(\xi)-f(x)| < \varepsilon, \quad \text{d.h. } \lim_{y\to x+} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x).$$

Analog zeigt man

$$\lim_{y\to x-} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x).$$

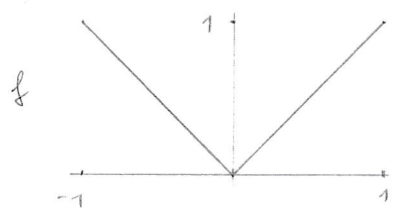
Bemerkung: Es folgt sofort: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_x^b f(t)\,dt$, so ist F differenzierbar und $F'(x) = -f(x)\ \forall x\in(a,b)$, was aus Satz 113 durch ableiten der Gleichung $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$ folgt.

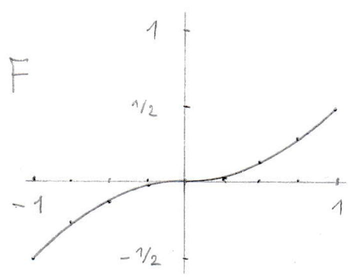
Beispiel: Es sei $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ und

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x |t|\,dt = \begin{cases} \int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x^2 & \text{falls } 0\le x\le 1 \\ -\int_x^0 |t|\,dt = -\frac{1}{2}x^2 & \text{falls } -1\le x<0 \end{cases}$$

Dabei ist $F(x) = \int_0^x |t|\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}(x^2-0^2) = \frac{1}{2}x^2$ falls $0\le x\le 1$ und

$$F(x) = -\int_x^0 |t|\,dt = -\int_x^0 (-t)\,dt = \int_x^0 t\,dt = \frac{1}{2}(0^2-x^2) = -\frac{1}{2}x^2 \quad \text{falls } -1\le x<0.$$





Beachte: Die Ableitung $F'(0)$ existiert und $F'(0)=0$.

Definition: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$. Dann heißt $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f (auf I), wenn F differenzierbar ist und $F' = f$.

Lemma 114 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.

(i) Ist $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Sind $F, G: I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f, so unterscheiden sie sich nur um eine Konstante, dh $\exists c \in \mathbb{R}: F - G = c$.

Beweis: (i) $\frac{d}{dx}(F(x) + c) = F'(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in I$.

(ii) Aus $\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$ folgt wegen Satz 77: $\exists c \in \mathbb{R}: F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$.

Bemerkungen: 1) Statt Stammfunktion sagt man auch unbestimmtes Integral oder (seltener) Antiderivierte oder Primitive

2) Ist F Stammfunktion von f, so schreibt man dafür $\int f(x)dx = F(x) + C$. Der Summand „$+C$" bringt zum Ausdruck, dass Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante bestimmt sind. Die Notation $\int f(x)dx$ wird durch Satz 115 verständlich und bezeichnet die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f.

3) Aus Satz 113 folgt sofort, dass stetige Funktionen (auf Intervallen) stets eine Stammfunktion besitzen.

Satz 115 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 2. Teil)

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. (Genauer sei $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.) Dann gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$, derart dass $\int_a^b f(x)dx \geq U(f, Z) > \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$. Nach Satz 75 gilt für $1 \leq i \leq n$: $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, sodass

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Verwendet man wieder die Bezeichnung $m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$, so folgt

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i) - F(x_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = U(f, Z) > \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon$$

Da dabei $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $F(b) - F(a) \geq \int_a^b f(x)\,dx$.

Analog zeigt man mit Hilfe von Obersummen die umgekehrte Ungleichung $F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$.

Bemerkungen: 1) Die übliche Methode, ein Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zu berechnen, ist, eine Stammfunktion F von f zu finden und Satz 115 anzuwenden. Der schwierige Teil dabei ist eine Stammfunktion zu finden. Tabellen und Computerprogramme können dabei sehr hilfreich sein. Zwar besagt Satz 113, dass man für eine stetige Funktion stets eine Stammfunktion finden kann, allerdings heißt das noch nicht, dass man sie auch mit Hilfe der üblichen Funktionen schreiben kann. (Tatsächlich gibt es relativ einfache Funktionen, für die man zeigen kann, dass das unmöglich ist.)

2) Man kann Satz 113 auch so umformulieren: Ist die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitung $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$. Tatsächlich gilt sogar, dass $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$. Dass gilt insbesondere, wenn die Ableitung $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, d.h. f stetig differenzierbar ist.

3) Für die Differenz $F(b) - F(a)$, die bei Anwendung des Hauptsatzes auftritt, schreibt man $\left[F(x)\right]_{x=a}^{b}$ (oder $\left[F(x)\right]_a^b$ oder $F(x)\Big|_{x=a}^{b}$ oder $F(x)\Big|_a^b$), d.h. $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{b}$.

4) Integrierbarkeit einer Funktion und Existenz einer Stammfunktion dafür sind durch den Hauptsatz eng verknüpft, trotzdem impliziert keine der beiden Eigenschaften die andere! D.h. eine Funktion kann integrierbar sein aber keine Stammfunktion besitzen und umgekehrt.

5) Sind $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (d.h. $F' = f$ und $G' = g$) und $c \in \mathbb{R}$, so folgt sofort aus Satz 67 (i) bzw. (iii), dass $F+G$ Stammfunktion von $f+g$ ist bzw. cF Stammfunktion von cf ist. Man darf auch $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ und $\int (cf(x))\,dx = c\int f(x)\,dx$ schreiben.

6) Aus den Ergebnissen von Kapitel 4 erhält man sofort die folgenden wichtigen Stammfunktionen:

- Ist $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so ist $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Ist $n \in \{-2,-3,-4,\dots\}$, so ist $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

  (Das wurde in Bsp. 5) vor Satz 72 bewiesen.)
- Ist $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, so ist $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \forall x > 0$
- Ist $a > 0$, so ist $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a} a^x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int e^x\,dx = e^x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Spezialfall $a = e$ des vorangegangenen Punkts)
- $\int \log x\,dx = x\log x - x + C = x(\log x - 1) + C \quad \forall x > 0$

  (Das wurde in Bsp. 6) vor Satz 69 bewiesen.)

<u>Beispiele</u>: 1) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c\ (\in \mathbb{R})$, so ist $\int_a^b c\,dx = \big[cx\big]_{x=a}^{b} = c(b-a)$.

2) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, so ist $\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2}$

3) Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, so ist $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1^3-0^3}{3} = \frac{1}{3}$

4) Ist allgemeiner $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, so ist
$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_{x=a}^{b} = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

5) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \big[\log|x|\big]_{x=1}^{2} = \log 2 - \log 1 = \log 2$

6) Ist allgemeiner $0 < a < b$, so ist $\int_a^b \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{x=a}^{b} = \log b - \log a = \log\frac{b}{a}$

7) $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x+1\right)dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_{x=0}^{1} = \left[\frac{x^2}{4}+x\right]_{x=0}^{1} = \left(\frac{1}{4}+1\right)-(0+0) = \frac{5}{4}$

8) Sind allgemeiner $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ und $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, so ist

$$\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \left(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0\right)dx = \left[c_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots + c_1\frac{x^2}{2} + c_0 x\right]_{x=a}^{b}$$

$$= \left(c_n\frac{b^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{b^n}{n} + \dots + c_1\frac{b^2}{2} + c_0 b\right) - \left(c_n\frac{a^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{a^n}{n} + \dots + c_1\frac{a^2}{2} + c_0 a\right)$$

$$= \frac{c_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) + \frac{c_{n-1}}{n}\left(b^n - a^n\right) + \dots + \frac{c_1}{2}\left(b^2 - a^2\right) + c_0(b-a)$$

9) $\int_5^7 e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{x=5}^{7} = \frac{1}{3}e^{21} - \frac{1}{3}e^{15} = \frac{1}{3}\left(e^{21}-e^{15}\right) = \frac{1}{3}e^{15}\left(e^6-1\right)$

Man kann die Stammfunktion $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ durch ein Verfahren, das wir im nächsten Kapitel besprechen werden (Substitution) finden. Es ist allerdings klar, was passiert: Da $\frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$, benötigt man den Faktor $\frac{1}{3}$, um die innere Ableitung 3 auszugleichen.

10) $\int_4^5 \frac{1}{x-2}\,dx = \int_4^5 \frac{dx}{x-2} = \Big[\log|x-2|\Big]_{x=4}^{5} = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}$

Auch in diesem Beispiel könnte man die Stammfunktion $\int\frac{dx}{x-2} = \log|x-2| + C$ durch Substitution finden, allerdings sollte man auch hier besser verstehen, was passiert. Beachten Sie, dass die Integrationsgrenzen 4 und 5 beide größer als 2 sind – das Integral $\int_0^4 \frac{dx}{x-2}$ wäre gar nicht definiert, da die Funktion $f: [0,4]\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$ unbeschränkt ist. (Man kann das auch nicht retten, indem man z.B. $f(2) = 0$ setzt.)