5.4 Integrationstechniken (Partielle Integration und Substitution)

Satz 116 (Partielle Integration) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gelten:

(i) $\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$ (mit $x \in I$),

(ii) Ist $[a,b] \subseteq I$, so ist $\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = \left[f(x) g(x) \right]_{x=a}^{b} - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$.

Beweis: (i) Es sei F eine Stammfunktion von $f' g$ (d.h. $F'(x) = f'(x) g(x)$ $\forall x \in I$) und G eine Stammfunktion von $f \cdot g'$ (d.h. $G'(x) = f(x) \cdot g'(x)$ $\forall x \in I$). Aus der Produktregel (Satz 67 (iv)) folgt

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) g(x) - G(x) \right) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) - f(x) g'(x) = f'(x) g(x) \quad \forall x \in I,$$

d.h. $f \cdot g - G$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von $f' g$. Nach Lemma 114 unterscheiden sich F und $f \cdot g - G$ nur um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ (d.h. $F(x) = f(x) \cdot g(x) - G(x) + c$ $\forall x \in I$). Geht man nun zur jeweiligen Menge aller Stammfunktionen über (d.h. $\int f'(x) g(x)\, dx$ bzw. $\int f(x) g'(x)\, dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen von $f' g$ bzw $f g'$), so erhält man die angegebene Gleichung. (Da $\int f'(x) g(x)\, dx = F(x) + C_1$ und $\int f(x) g'(x)\, dx = G(x) + C_2$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die Konstanten C_1 und C_2 werden „von der Notation geschluckt.")

(ii) Hat G dieselbe Bedeutung wie im Beweis von (i), so folgt aus Satz 115

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = \left[f(x) g(x) - G(x) \right]_{x=a}^{b} = \left[f(x) g(x) \right]_{x=a}^{b} - \left[G(x) \right]_{x=a}^{b}$$

$$= \left[f(x) g(x) \right]_{x=a}^{b} - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

Beispiele: 1) $\int \log x\, dx = \int 1 \cdot \log x\, dx = \int \left(\frac{d}{dx} x \right) \cdot \log x\, dx$

$= x \cdot \log x - \int x \cdot \left(\frac{d}{dx} \log x \right) dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \log x - \int dx$

$= x \log x - x + C$ (für $x > 0$)

2) $\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot \log x\,dx = \int \left(\frac{d}{dx}\log x\right)\cdot \log x\,dx$

$= \log x \cdot \log x - \int \log x \cdot \left(\frac{d}{dx}\log x\right)dx = (\log x)^2 - \int \log x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x}\,dx$

$\Longrightarrow 2\int \frac{\log x}{x}\,dx = (\log x)^2 \Rightarrow \int \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$ (für $x > 0$).

Dass die Rechnung in der letzten Zeile korrekt ist, kann man sich überlegen, indem man $\int \frac{\log x}{x}\,dx$ als die Menge aller Stammfunktionen von $\frac{\log x}{x}$ auffasst. Allerdings hat man auf diese Weise offensichtlich eine Stammfunktion von $\frac{\log x}{x}$ gefunden, da $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(\log x)^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log x}{x}$

3) $\int x e^x\,dx = \int \left(\frac{d}{dx}e^x\right)\cdot x\,dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot \left(\frac{d}{dx}x\right)dx = xe^x - \int e^x \cdot 1\,dx$

$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\int x^2 e^x\,dx = \int \left(\frac{d}{dx}e^x\right)\cdot x^2\,dx = e^x x^2 - \int e^x \cdot \left(\frac{d}{dx}x^2\right)dx = x^2e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx$

$= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx \overset{\text{Bsp 3)}}{=} x^2e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) Ist allgemein $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, so ist

$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$ (Rekursionsformel für die Berechnung von $\int x^n e^x dx$),

denn

$$\int x^n e^x\,dx = \int \left(\frac{d}{dx}e^x\right)x^n\,dx = e^x \cdot x^n - \int e^x \left(\frac{d}{dx}x^n\right)dx$$

$$= x^n e^x - \int e^x \cdot n x^{n-1}\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

6) Verwendet man partielle Integration, um z. B. das Integral $\int_1^2 xe^x\,dx$ zu berechnen, so hat man zwei Möglichkeiten:

1. Man findet zuerst die Stammfunktion von xe^x und setzt danach die Grenzen ein:

$$\int_1^2 xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_{x=1}^2 = 1\cdot e^2 - 0\cdot e = e^2$$

Diese Vorgangsweise hat den Vorteil, dass man die Korrektheit der Stammfunktion vor dem Einsetzen durch differenzieren überprüfen kann.

2. Man verwendet Satz 116 (ii):

$\int_1^2 xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_{x=1}^2 - \int_1^2 e^x\,dx = 2e^2 - e - \left[e^x\right]_{x=1}^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$

Satz 117 (Satz von Taylor mit Integralrestglied) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $a, x \in I$. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Bemerkung: Der Ausdruck $\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ wird (aus offensichtlichen Gründen) als Integralrestglied bezeichnet. Satz 117 ergänzt Satz 93 bzw. Korollar 94.

Beweis: Induktion nach n

$n=0$: Aus Satz 115 folgt $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) + \frac{1}{0!}\int_a^x (x-t)^0 \cdot f^{(0+1)}(t)\,dt$.

Ist die Behauptung für $n-1$ schon bewiesen, so gilt

$$f(x) - f(a) - f'(a)\cdot(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = -\int_a^x \frac{d}{dt}\left(\frac{(x-t)^n}{n!}\right) f^{(n)}(t)\,dt$$

$$\overset{\text{Satz 116 (iii)}}{=} \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_{t=a}^{x} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Satz 118 (Substitutionsregel) Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ (offene) Intervalle, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi: J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi(J) \subseteq I$. Dann gelten:

(i) $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \Big|_{x=\varphi(t)}$

D.h. ist F Stammfunktion von f auf I, so ist $F\circ\varphi$ Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ auf J.

(ii) Gilt zusätzlich $\varphi'(t) > 0\ \forall t \in J$ oder $\varphi'(t) < 0\ \forall t \in J$ (woraus folgt, dass φ streng monoton ist) und ist $\varphi(J) = I$, so

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

D.h. ist G Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ auf J, so ist $G\circ\varphi^{-1}$ Stammfunktion von f auf I.

(iii) Sind $a, b \in I$, $a = \varphi(\alpha)$ und $b = \varphi(\beta)$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

<u>Beweis</u>: (i) Es sei F eine Stammfunktion f auf I (dh $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$)

Aus der Kettenregel (Satz 70) folgt

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in J,$$

dh $F \circ \varphi$ ist Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ auf J.

(ii) Es sei G eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ auf J

(dh $G'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \ \forall t \in J$). Wegen der zusätzlichen Voraussetzung, dass $\varphi'(t) > 0\ \forall t \in J$ oder $\varphi'(t) < 0\ \forall t \in J$ ist φ nach Satz 78 (iii) bzw. Korollar 79 (iii) streng monoton und es existiert die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : J \to I$. Nach Satz 72 ist φ^{-1} differenzierbar und

$$(G \circ \varphi^{-1})'(x) = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f\underbrace{(\varphi(\varphi^{-1}(x)))}_{= x} \cdot \underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}}_{= 1} = f(x) \quad \forall x \in I,$$

dh $G \circ \varphi^{-1}$ ist Stammfunktion von f auf I.

(iii) Ist F Stammfunktion von f auf I (dh $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$), so ist $F \circ \varphi$ Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ auf J und

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Big[F(\varphi(t))\Big]_{t=\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \Big[F(x)\Big]_{x=\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}$$

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) In der Praxis überprüft man bei Anwendung der Substitutionsregel die Voraussetzungen von Satz 118 in der Regel nicht, sondern „rechnet einfach drauf los." Hat man auf diese Weise eine Stammfunktion gefunden, so kann man sich ja durch differenzieren von der Korrektheit überzeugen.

2) In der Praxis kann man auf folgende Weise „mechanisch" rechnen (wodurch keine Probleme entstehen): $x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt$.

Beispiele: 1) Zu berechnen ist das Integral $\int_3^6 e^{t/3}\,dt \left(= 3\int_3^6 e^{t/3}\cdot\frac{1}{3}\,dt\right)$

Setze $x = \frac{t}{3} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \rightarrow dt = 3\,dx \Rightarrow \int e^{t/3}\,dt = 3\int e^x\,dx\Big|_{x=\frac{t}{3}} = 3e^x\Big|_{x=\frac{t}{3}} = 3e^{t/3} + C$

Auch hier hat man wieder zwei Möglichkeiten, das Integral zu berechnen:

1. Man findet die Stammfunktion (mit Hilfe von Substitution) und setzt dann die Grenzen ein: $\int_3^6 e^{t/3}\,dt = \left[3e^{t/3}\right]_{t=3}^6 = 3(e^2 - e) = 3e(e-1)$.

2. Man transformiert die Grenzen mit (wobei man $x = \frac{t}{3}$ verwendet):

$$\int_3^6 e^{t/3}\,dt = 3\int_1^2 e^x\,dx = 3\left[e^x\right]_{x=1}^2 = 3(e^2 - e) = 3e(e-1)$$

2) $\int t e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \quad (t \in \mathbb{R})$, denn $x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow t\,dt = \frac{1}{2}dx$

$$\Rightarrow \int t e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^x\,dx\Big|_{x=t^2} = \frac{1}{2}e^x\Big|_{x=t^2} = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$$

3) $\int \frac{t^3}{\sqrt{t^4+2}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{t^4+2} + C \quad (t \in \mathbb{R})$, denn $x = t^4 + 2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4t^3 \Rightarrow t^3\,dt = \frac{1}{4}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{t^3}{\sqrt{t^4+2}}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{x}}\Big|_{x=t^4+2} = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{x}\Big|_{x=t^4+2} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\Big|_{x=t^4+2} = \frac{1}{2}\sqrt{t^4+2} + C$$

4) $\int \frac{dt}{t\log t} = \log(\log t) + C \quad (t > 1)$, denn $x = \log t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{dt}{t} = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{t\log t} = \int \frac{dx}{x}\Big|_{x=\log t} = \log x\Big|_{x=\log t} = \log(\log t) + C$$

5) $\int \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C \quad \left(x > -\frac{3}{2}\right)$,

denn $x = \frac{t^2-3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{t^2} = t$ sowie $\frac{dx}{dt} = t$. ($\Rightarrow dx = t\,dt$) und daher

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \int t\cdot t\,dt\Big|_{t=\sqrt{2x+3}} = \int t^2\,dt\Big|_{t=\sqrt{2x+3}} = \frac{t^3}{3}\Big|_{t=\sqrt{2x+3}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{2x+3}^{\,3} = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C$$