5.5 Uneigentliche Integrale

<u>Definition</u>: Die Funktion $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,x]$ integrierbar $\forall x > a$ und der Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ würde existieren und setzt $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$.

<u>Bemerkung</u>: Erfüllt $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen dieser Definition und ist $b > a$, so gilt für $x \geq b$, dass $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^x f(t)\,dt$. Daher existiert $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ genau dann, wenn $\int_b^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_b^x f(t)\,dt$ existiert und in diesem Fall ist $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,dt$.

<u>Beispiele</u>: 1) $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, denn $\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^x = -e^{-x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ existiert genau dann wenn $\alpha > 1$ und $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$ (z.B. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$)

denn

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_{t=1}^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{für } \alpha < 1 \end{cases} \\ \left[\log t\right]_{t=1}^x = \log x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

<u>Definition</u>: Die Funktion $f: (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ sei auf $[x,a]$ integrierbar $\forall x < a$ und der Grenzwert $\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ würde existieren und setzt $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$.

<u>Definition</u>: Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man sagt, das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existiert, wenn für irgendein $a \in \mathbb{R}$ die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ und $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ beide existieren. In diesem Fall setzt man $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^a f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Eine Überlegung analog zur Bemerkung oben zeigt, dass die Existenz und der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ nicht von der Wahl von a abhängen.

2) Es kann, aber muss nicht gelten, dass $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_{-x}^{x} f(t)\,dt$. Z.B. ist $\int\limits_{-x}^{x} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=-x}^{x} = \frac{x^2-x^2}{2} = 0$ und daher $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{-x}^{x} t\,dt = 0$. Das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ existiert aber gar nicht.

3) Das wichtigste uneigentliche Integral der Gestalt $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ ist wahrscheinlich das Gaußsche Fehlerintegral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Seine Bedeutung beruht darauf, dass es für die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung benötigt wird. Aus zeitlichen Gründen beweisen wir diese Gleichung hier nicht.

Definition: Die Funktion $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[a,x]$ integrierbar für jedes $x\in(a,b)$ und der Limes $\lim\limits_{x\to b-}\int\limits_a^x f(t)\,dt$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ würde existieren und setzt

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-}\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Bemerkungen: 1) In dieser Definition wird vorausgesetzt, dass f für jedes $x\in(a,b)$ auf dem Intervall $[a,x]$ beschränkt ist, aber nicht, dass f auf $[a,b)$ beschränkt ist. (D.h. f kann auf $[a,b)$ unbeschränkt sein.)

2) Ist in der obigen Situation $a<c<b$, so überlegt man sich leicht analog zu oben: $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ existiert genau dann wenn $\int\limits_c^b f(t)\,dt$ existiert. Falls beide uneigentlichen Integrale existieren, so gilt $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^c f(t)\,dt + \int\limits_c^b f(t)\,dt$

Definition: Die Funktion $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[x,b]$ integrierbar für jedes $x\in(a,b)$ und der Limes $\lim\limits_{x\to a+}\int\limits_x^b f(t)\,dt$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ würde existieren und setzt

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a+}\int\limits_x^b f(t)\,dt.$$

Definition: Die Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ sei auf jedem Teilintervall $[x,y]\subseteq(a,b)$ (mit $a<x<y<b$) integrierbar. Existieren für irgendein $c\in(a,b)$ die beiden (uneigentlichen) Integrale $\int\limits_a^c f(t)\,dt$ und $\int\limits_c^b f(t)\,dt$, so sagt man, dass uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(t)$ würde existieren und setzt

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^c f(t)\,dt + \int\limits_c^b f(t)\,dt.$$

Bemerkung: Man kann die beiden Arten uneigentlicher Integrale auch „mischen". Ist z.B. die Funktion $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[x,y]$ (mit $a<x<y$) integrierbar und existieren für irgendein $c>a$ die beiden (uneigentlichen) Integrale $\int_a^c f(t)\,dt$ und $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$, so sagt man, dass uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ würde existieren und setzt

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Beispiele: 1) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ existiert genau dann wenn $\alpha<1$ und $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ für $\alpha<1$

(also z.B. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$), denn

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_{t=x}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow[x\to 0+]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{für } \alpha<1 \\ +\infty & \text{für } \alpha>1 \end{cases} \\ \left[\log t\right]_{t=x}^1 = -\log x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty & \text{für } \alpha=1 \end{cases}$$

(Beachte: Dabei handelt es sich nur für $\alpha>0$ um ein uneigentliches Integral. Für $\alpha\le 0$ handelt es sich um ein ganz gewöhnliches Integral.)

2) $\int_0^1 \log t\,dt = -1$, denn $\int_x^1 \log t\,dt = [t\log t - t]_{t=x}^1 = -1 - \underbrace{(x\log x - x)}_{\substack{\to 0 \\ (x\to 0+)}} \xrightarrow[x\to 0+]{} -1$

(Dabei wurde verwendet, dass in Korollar 88 (iv) $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$ bewiesen wurde.)

3) Die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ existieren.

Wir zeigen zunächst $\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $-1<x<1$:

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2} + x\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sqrt{1-x^2} - \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Daraus folgt $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right) + 2\sqrt{1-x^2}$.

Für $-1 < a < b < 1$ erhält man

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[-x\sqrt{1-x^2}\right]_{x=a}^{b} + 2\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = a\sqrt{1-a^2} - b\sqrt{1-b^2} + 2\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Also ist

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1-}\left(-x\sqrt{1-x^2} + 2\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Beachte, dass die Funktion $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ auf $[0,1]$ stetig und daher integrierbar ist.

Völlig analog zeigt man $\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,dt$.

Da die Funktionen $(-1,1) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (bzw. $[-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sqrt{1-t^2}$) gerade sind, gilt $\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (bzw. $\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$), was man auch leicht durch Substitution überprüft.

<u>Definition</u>: Die reelle Zahl π sei definiert als $\pi := \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Bemerkung</u>: Aus den obigen Überlegungen folgen sofort

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Dabei besagt die zweite Gleichung, dass der halbe Einheitskreis Fläche $\frac{\pi}{2}$ hat. Aber auch unsere Definition von π hat eine sehr anschauliche Bedeutung: Sie besagt, dass der halbe Einheitskreis Bogenlänge π besitzt (was im folgenden Abschnitt begründet werden wird).