5.6 Die Winkelfunktionen

Definition: Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Bogenlänge des Graphen $[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto(x,f(x))$ wird definiert als

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Bemerkung: Als Motivation dieser Definition geben wir zwei heuristische Argumente:

1. In der „Physikerherleitung" wird der Satz des Pythagoras auf infinitesimal kleine Strecken dx und dy angewandt. Die Bogenlänge ergibt sich zu

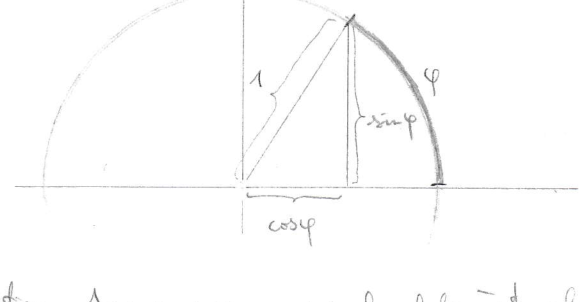
$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

2. Mathematisch exakter ist die folgende Überlegung. Ist $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, so approximiert man die Bogenlänge des Graphen der Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ durch die Länge des Polygonzugs mit den Eckpunkten $(x_i,f(x_i))$ mit $0\le i\le n$. Diese ist

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right)^2}\,(x_i-x_{i-1})$$

Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 75) auf die Funktion $f:[x_{i-1},x_i]\to\mathbb{R}$ an, so erhält man $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = f'(\xi_i)$ für ein $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ (wobei $1\le i\le n$). Die Länge des Polygonzugs wird dann zu $\sum_{i=1}^n \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,(x_i-x_{i-1})$. Lässt man nun $x_i-x_{i-1}\to 0$ gehen, so ist anschaulich zu erwarten, dass dieser Ausdruck gegen $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ konvergiert.

7.6.2021



Definition: Die Funktion Arcus cosinus wird definiert als

$$\arccos:[-1,1]\to\mathbb{R},\quad \arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Bemerkungen: 1). Nach der obigen Definition erhält man für die Bogenlänge des Graphen der Funktion $[x,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ den Wert

$$\int_x^1 \sqrt{1+\left(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt = \int_x^1 \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt = \int_x^1 \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\,dt = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

2) Nach Beispiel 3) am Ende des vorangegangenen Abschnitts ist

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

(Insbesondere existiert das uneigentliche Integral.)

3) Aus der Definition des Arcus cosinus folgen sofort:

$$\arccos(-1) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi, \quad \arccos(0) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und } \arccos(1) = 0$$

Lemma 119 Die Funktion arccos ist stetig auf $[-1,1]$, differenzierbar auf $(-1,1)$ mit Ableitung $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und streng monoton fallend.

Beweis: Die Stetigkeit folgt aus Satz 112 (bzw. der Bemerkung danach). Die Differenzierbarkeit folgt aus Satz 113 (bzw. der Bemerkung danach), ebenso dass

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{d}{dx}\left(\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \text{ für } x \in (-1,1).$$

Daraus folgt (wegen Korollar 79 (iii)), dass die Funktion arccos streng monoton fällt.

Definition: Die Funktion Cosinus wird auf dem Intervall $[0,\pi]$ als Umkehrfunktion des arccos definiert, d.h. $\cos: [0,\pi] \to \mathbb{R}$

Definition: Die Funktion Sinus wird auf dem Intervall $[0,\pi]$ definiert durch $\sin: [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\sin\varphi := \sqrt{1-(\cos\varphi)^2}$.

Bemerkungen: 1) Wir werden die beiden Funktionen sin und cos sehr rasch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

2) Aus der obigen Bemerkung 3) folgen sofort $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

3) Aus Bemerkung 2) folgen sofort $\sin(0) = \sqrt{1-1^2} = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1-0^2} = 1$ und $\sin(\pi) = \sqrt{1-(-1)^2} = 0$.

Lemma 120 Die Funktionen sin und cos sind auf $[0,\pi]$ differenzierbar (wobei in den Randpunkten 0 und π einseitige Ableitungen gemeint sein sollen) und ihre Ableitungen sind dort $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi$.

Beweis: Aus Satz 72 folgt für $0<\varphi<\pi$, dass

$$\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = \frac{1}{\frac{d}{dx}(\arccos x)} = -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-(\cos\varphi)^2} = -\sin\varphi$$

und daher

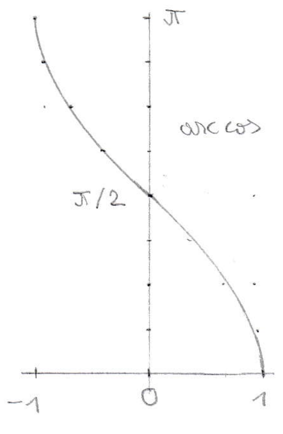
$$\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \frac{d}{d\varphi}\sqrt{1-(\cos\varphi)^2} = \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{1-(\cos\varphi)^2}}}(-\cancel{2}\cos\varphi)\cdot(-\cancel{\sin\varphi}) = \cos\varphi.$$

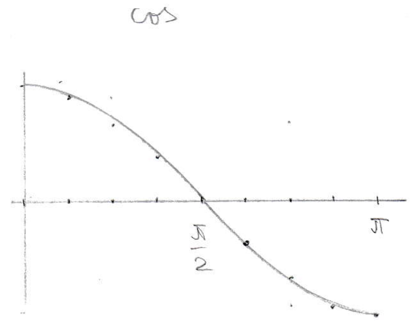
Schließlich erhält man unter Verwendung der Regel von de l'Hospital

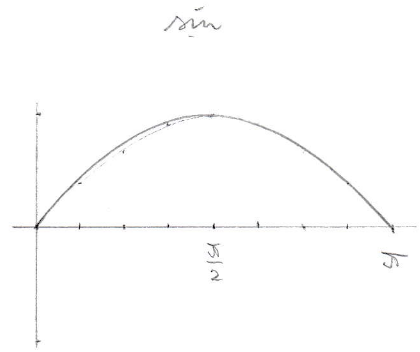
$$\lim_{\varphi\to 0+}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi-0} = \lim_{\varphi\to 0+}(-\sin\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to\pi-}\frac{\cos\varphi+1}{\varphi-\pi} = \lim_{\varphi\to\pi-}(-\sin\varphi) = 0$$

sowie

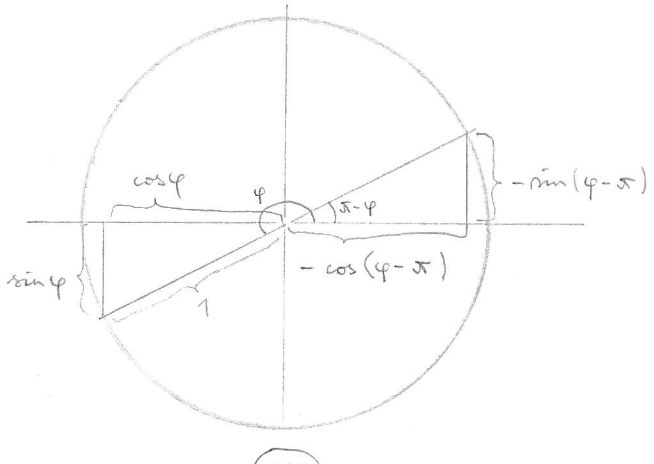
$$\lim_{\varphi\to 0+}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-0} = \lim_{\varphi\to 0+}\cos\varphi = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to\pi-}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-\pi} = \lim_{\varphi\to\pi-}\cos\varphi = -1.$$







Definition: Für $\pi<\varphi\le 2\pi$ sei $\cos\varphi := -\cos(\varphi-\pi)$ und $\sin\varphi := -\sin(\varphi-\pi)$.



Lemma 12.1 Die Funktionen sin und cos sind auf $[0,2\pi]$ differenzierbar (wobei in den Randpunkten 0 und 2π einseitige Ableitungen gemeint sein sollen) und ihre Ableitungen sind dort $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi$. Weiters gilt $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \forall \varphi \in [0,2\pi]$ (mit $\sin^2\varphi = (\sin\varphi)^2$ und $\cos^2\varphi = (\cos\varphi)^2$).

Beweis: Für $\pi < \varphi < 2\pi$ ist $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\frac{d}{d\varphi}\cos(\varphi-\pi) = \sin(\varphi-\pi) = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = -\frac{d}{d\varphi}\sin(\varphi-\pi) = -\cos(\varphi-\pi) = \cos\varphi$.

Die Funktionen cos und sin sind bei π stetig, da

$$\lim_{\varphi\to\pi+}\cos\varphi = -\lim_{\varphi\to\pi+}\cos(\varphi-\pi) = -\lim_{\varphi\to 0+}\cos\varphi = -1 \quad \text{und}$$

$$\lim_{\varphi\to\pi+}\sin\varphi = -\lim_{\varphi\to\pi+}\sin(\varphi-\pi) = -\lim_{\varphi\to 0+}\sin\varphi = 0.$$

Weiters gelten

$$\lim_{\varphi\to\pi+}\frac{\cos\varphi+1}{\varphi-\pi} = \lim_{\varphi\to\pi+}(-\sin\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to\pi+}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-\pi} = \lim_{\varphi\to\pi+}\cos\varphi = -1$$

(d.h. cos und sin sind bei π differenzierbar, $\left.\frac{d}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pi}\cos\varphi = 0$ und $\left.\frac{d}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pi}\sin\varphi = -1$) sowie

$$\lim_{\varphi\to 2\pi-}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi-2\pi} = \lim_{\varphi\to 2\pi-}(-\sin\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to 2\pi-}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-2\pi} = \lim_{\varphi\to 2\pi-}\cos\varphi = 1.$$

Für $0 \le \varphi \le \pi$ folgt $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ direkt aus der Definition des Sinus.
Für $\pi < \varphi \le 2\pi$ ist $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \sin^2(\varphi-\pi) + \cos^2(\varphi-\pi) = 1$.

Definition: Auf $\mathbb{R}\setminus[0,2\pi]$ seien cos und sin durch periodische Fortsetzung definiert, d.h. man fordert $\cos(\varphi+2\pi) = \cos\varphi$ und $\sin(\varphi+2\pi) = \sin\varphi \ \forall\varphi\in\mathbb{R}$.
Etwas genauer kann man dabei so vorgehen: Ist $\varphi \in \mathbb{R}\setminus[0,2\pi]$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $k\in\mathbb{Z}$, derart dass $\varphi + 2k\pi \in [0,2\pi)$. Man setzt nun $\cos\varphi := \cos(\varphi+2k\pi)$ und $\sin\varphi := \sin(\varphi+2k\pi)$.

Satz 12.2 Die Funktionen sin und cos sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitungen $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi$ für alle $\varphi\in\mathbb{R}$.
Weiters gilt $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \forall\varphi\in\mathbb{R}$.

<u>Beweisskizze</u>: Das folgt nun leicht aus Lemma 121, da $\cos(0)=\cos(2\pi)=1$, $\sin(0)=\sin(2\pi)=0$,

$$\lim_{\varphi\to 0+}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi-0}=\lim_{\varphi\to 2\pi-}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi-2\pi}=0 \text{ und } \lim_{\varphi\to 0+}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-0}=\lim_{\varphi\to 2\pi-}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-2\pi}=1.$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) Wir haben en passant bewiesen, dass $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (was man auch leicht mit Hilfe der Regel von de l'Hospital zeigt: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$).

2) Offenbar sind die Funktionen sin und cos beliebig oft differenzierbar und es gelten

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\begin{cases}\sin x & \text{wenn } n=4k\\ \cos x & \text{wenn } n=4k+1\\ -\sin x & \text{wenn } n=4k+2\\ -\cos x & \text{wenn } n=4k+3\end{cases} \quad\text{und}\quad \frac{d^n}{dx^n}\cos x=\begin{cases}\cos x & \text{wenn } n=4k\\ -\sin x & \text{wenn } n=4k+1\\ -\cos x & \text{wenn } n=4k+2\\ \sin x & \text{wenn } n=4k+3\end{cases}$$

für ein $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

3) Aus Bemerkung 2) folgt, dass sin und cos die Differentialgleichung $f''(x)+f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ erfüllen. Tatsächlich gilt das für jede Linearkombination dieser beiden Funktionen. Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cos x+b\sin x$ mit $a,b\in\mathbb{R}$, so folgt $f'(x)=-a\sin x+b\cos x$ und daher $f''(x)=-a\cos x-b\sin x$.

<u>Satz 123</u> Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und erfülle die Differentialgleichung $f''(x)+f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Dann hat f die Gestalt $f(x)=f(0)\cdot\cos x+f'(0)\cdot\sin x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>: Es sei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2$. Dann ist

$$h'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)\underbrace{(f(x)+f''(x))}_{=0}=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

Nach Satz 77 ist h eine konstante Funktion, also $h(x)=h(0)=(f(0))^2+(f'(0))^2\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Ist $f(0)=f'(0)=0$, so ist $h(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ und daher $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ und die Behauptung ist erfüllt.
Sind $f(0)$ und $f'(0)$ nicht beide $=0$, so betrachte die Funktion

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-f(0)\cdot\cos x-f'(0)\sin x.$$

Nach Voraussetzung und Bemerkung 3) oben gilt $g''(x)+g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$,

$g(0) = f(0) - f(0) = 0$ und aus $g'(x) = f'(x) + f(0)\sin x - f'(0)\cos x$ folgt $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$. Aus dem schon bewiesenen Fall folgt $g(0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, dh $f(x) = f(0)\cdot\cos x + f'(0)\cdot\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Satz 124</u> (i) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$,

(ii) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>: (i) Für festes $y \in \mathbb{R}$ sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x+y)$. Dann gilt offenbar $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt

$$\sin(x+y) = f(x) = f(0)\cdot\cos x + f'(0)\cdot\sin x = \sin y\cdot\cos x + \cos y\cdot\sin x.$$

(ii) Für festes $y\in\mathbb{R}$ sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x+y)$. Dann gilt offenbar $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt

$$\cos(x+y) = f(x) = f(0)\cdot\cos x + f'(0)\cdot\sin x = \cos y\cdot\cos x - \sin y\cdot\sin x.$$

8.6.2021

<u>Korollar 125</u> (i) Die Funktion cos ist gerade, dh $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$,

(ii) Die Funktion sin ist ungerade, dh $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in\mathbb{R}$,

(iii) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$,

(iv) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$,

(v) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$,

(vi) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$,

(vii) $\sin(2x) = 2\sin x\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$,

(viii) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(ix) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$,

(x) $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$,

(xi) $\sin(x+\pi) = -\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$,

(xii) $\cos(x+\pi) = -\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>: (i) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \cos(-x)$ erfüllt $f'(x) = \sin(-x)$ und $f''(x) + f(x) = -\cos(-x) + \cos(-x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt

$$\cos(-x) = f(x) = \underbrace{f(0)}_{=1}\cdot\cos x + \underbrace{f'(0)}_{=0}\cdot\sin x = \cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(ii) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(-x)$ erfüllt $f'(x) = -\cos(-x)$ und $f''(x) + f(x) = -\sin(-x) + \sin(-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt

$$\sin(-x) = f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} \cdot \cos x + \underbrace{f'(0)}_{=-1} \cdot \sin x = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(iii) $\sin(x-y) = \sin(x+(-y)) \overset{\text{Satz 124 (i)}}{=} \sin x \cdot \cos(-y) + \cos x \cdot \sin(-y) \overset{(i),(ii)}{=} \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

(iv) $\cos(x-y) = \cos(x+(-y)) \overset{\text{Satz 124 (ii)}}{=} \cos x \cdot \cos(-y) - \sin x \cdot \sin(-y) \overset{(i),(ii)}{=} \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

(v) Durch Subtraktion von

$$\sin x = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) \overset{\text{Satz 124 (i)}}{=} \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$

und

$$\sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \overset{(iii)}{=} \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$

erhält man $\sin x - \sin y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$.

(vi) Durch Subtraktion von

$$\cos x = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) \overset{\text{Satz 124 (ii)}}{=} \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$

und

$$\cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \overset{(iv)}{=} \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$

erhält man $\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$

(vii) Folgt aus Satz 124 (i) wenn man $x = y$ setzt.

(viii) Folgt aus Satz 124 (ii) wenn man $x = y$ setzt.

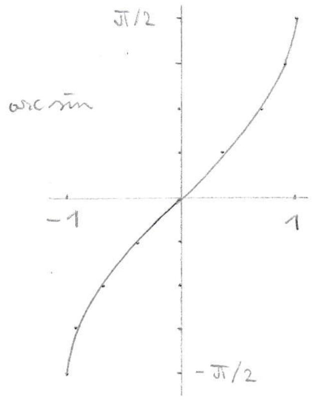
(ix) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Satz 124 (i)}}{=} \sin x \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos x \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \cos x$

(x) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Satz 124 (ii)}}{=} \cos x \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin x \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = -\sin x$

(xi) $\sin(x+\pi) \overset{\text{Satz 124 (i)}}{=} \sin x \cdot \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + \cos x \cdot \underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\sin x$

(xii) $\cos(x+\pi) \overset{\text{Satz 124 (ii)}}{=} \cos x \cdot \underbrace{\cos\pi}_{=-1} - \sin x \cdot \underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\cos x$

<u>Definition</u>: Die Einschränkung der Funktion $\sin$ auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist eine streng monoton wachsende Funktion, da $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit Werten von $-1 \left(= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ bis $1 \left(= \sin\frac{\pi}{2}\right)$. Ihre Umkehrfunktion wird als Arcus sinus bezeichnet, d.h. $\arcsin: [-1, 1] \to \mathbb{R}$.



Lemma 126 Die Funktion arc sin ist stetig auf $[-1,1]$, differenzierbar auf $(-1,1)$ mit Ableitung $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und streng monoton wachsend.

Beweis: Dass arc sin stetig und streng monoton wachsend ist, folgt aus Satz 54 (da die Einschränkung von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ stetig und streng monoton wachsend ist). Für $-1 < x < 1$ folgt aus Satz 72

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lemma 127: (i) Die Nullstellen der Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind genau die Zahlen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Die Nullstellen der Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind genau die Zahlen $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Es ist $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Daher ist $\frac{\pi}{2}$ die einzige Nullstelle von cos im Intervall $[0, \pi]$. Für $\pi < x \leq 2\pi$ ist $\cos x = 0 \iff \cos(x - \pi) = 0 \iff x - \pi = \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi$. D.h. cos besitzt im Intervall $[0, 2\pi]$ genau die beiden Nullstellen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} + \pi$. Die Behauptung folgt nun daraus, dass cos auf $\mathbb{R}$ durch periodische Fortsetzung definiert wird.

(ii) Aus Korollar 125 (x) folgt $\sin x = 0 \iff \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 0$ $\iff x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ $\iff x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Definition: Die Funktion Tangens wird für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definition: Die Funktion Cotangens wird für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Lemma 128 (i) $\tan(x+\pi) = \tan x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) $\cot(x+\pi) = \cot x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(iii) $\tan(-x) = -\tan x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(iv) $\cot(-x) = -\cot x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(v) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right)$,

(vi) tan ist auf seinem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

(vii) cot ist auf seinem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x. \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: (i) $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{\text{Kor. 125 (xi),(xii)}}{=} \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

(ii) $\cot(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} \overset{\text{Kor 125 (xi),(xii)}}{=} \dfrac{-\cos x}{-\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

(iii) $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \overset{\text{Kor. 125 (i),(ii)}}{=} \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(iv) $\cot(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} \overset{\text{Kor. 125 (i),(ii)}}{=} \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\dfrac{\cos x}{\sin x} = -\cot x$

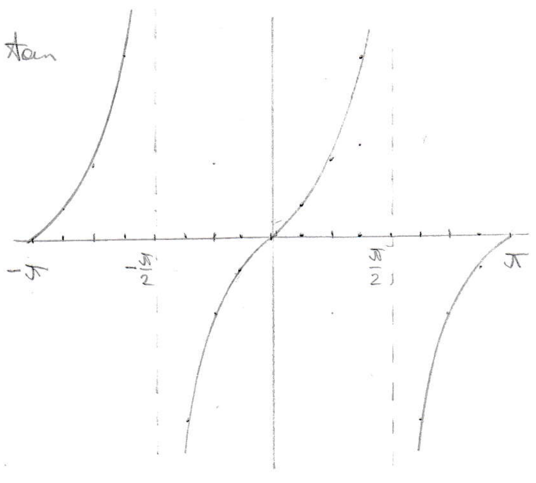
(v) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{1}{\tan x}$

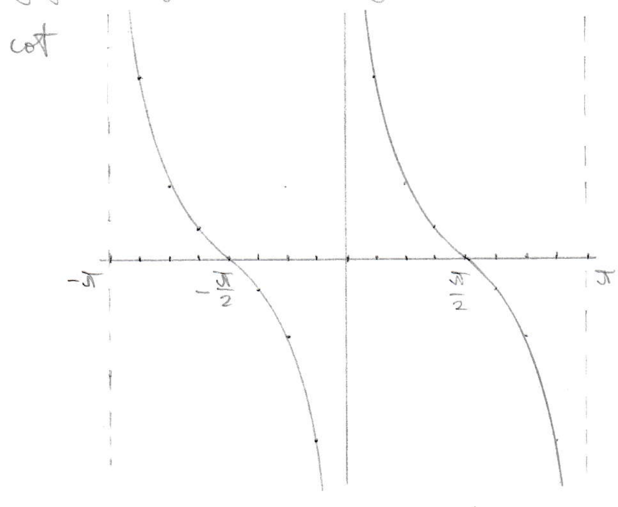
(vi) $\dfrac{d}{dx} \tan x = \dfrac{d}{dx} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$,

was man leicht auf eine der beiden angegebenen Gestalten bringen kann

(vii) $\dfrac{d}{dx} \cot x = \dfrac{d}{dx} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

was man leicht auf eine der beiden angegebene Gestalten bringen kann

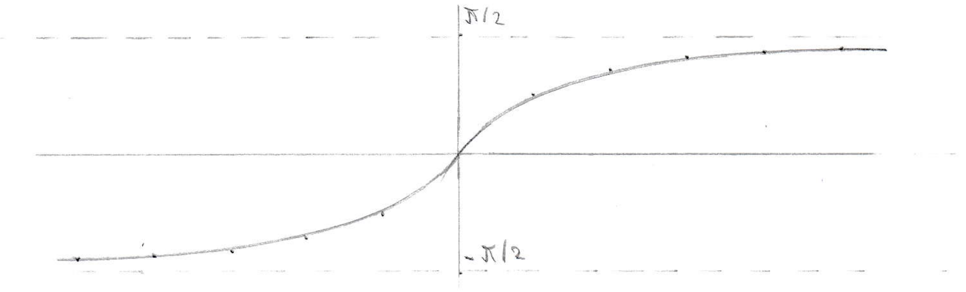




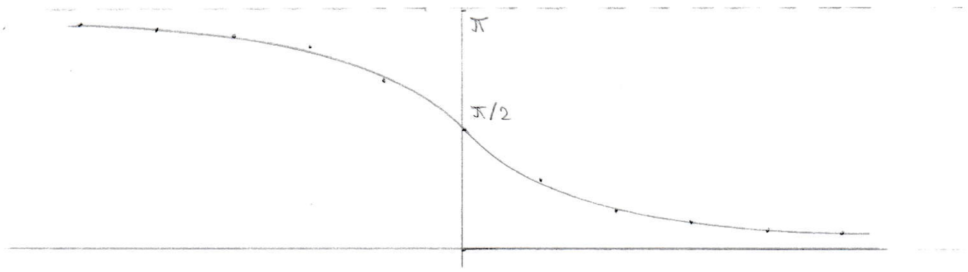
Definition: Die Einschränkung von tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist streng monoton wachsend (mit ganz $\mathbb{R}$ als Bild). Die Umkehrfunktion wird als Arcus Tangens bezeichnet, d.h. $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definition: Die Einschränkung von cot auf $(0, \pi)$ ist streng monoton fallend (mit ganz $\mathbb{R}$ als Bild). Die Umkehrfunktion wird als Arcus cotangens bezeichnet, d.h. $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

arctan



arccot



Lemma 129: (i) Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Die Funktion $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Beweis: (i) $$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \tan y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(ii) $$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{1}{\frac{d}{dx} \cot y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Aus den Resultaten dieses Abschnitts erhält man sofort die folgenden Stammfunktionen:

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- $\int \tan x \, dx = -\log|\cos x| + C \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- $\int \cot x \, dx = \log|\sin x| + C \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \forall x \in (-1,1)$

- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Beispiele</u>: 1) Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ist $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$,

denn

$$\int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) - (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx$$

$$\Rightarrow n \int \sin^n x \, dx = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

2) $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Setze $n=2$ in Bsp 1)

3) $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C$ für $x \in (-1,1)$

Verwende Substitution mit $x = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t \cdot dt$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt = \int (1 - \sin^2 t) \, dt$$

$$= t - \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

(Beachte: Ist $-1 < x < 1$, so kann man $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ wählen. Für diese t ist $\cos t > 0$. Deshalb ist es korrekt, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ zu rechnen.)

10.6.2021