5.7 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Beispiel: $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\left(-\log|1-x| + \log|1+x|\right) = \log\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} + C \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$$

Wir wollen daraus eine Methode machen, die für alle rationale Funktionen funktioniert.

1) Division mit Rest für Polynome: Es seien p_1, p_2 zwei Polynome, $p_1 \neq 0$ und $\operatorname{grad} p_2 \geq 1$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q und r mit den Eigenschaften $p_1 = q p_2 + r$ und $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p_2$. (und daher $\frac{p_1}{p_2} = q + \frac{r}{p_2}$)

Beweis: Existenz: Ist $\operatorname{grad} p_1 < \operatorname{grad} p_2$, so ist $p_1 = \underbrace{0}_{=:q} \cdot p_2 + \underbrace{p_1}_{=:r}$.

Es sei also $\operatorname{grad} p_1 \geq \operatorname{grad} p_2$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{grad} p_1 \neq 0$. (Wäre $\operatorname{grad} p_1 = 0$, so wäre $\operatorname{grad} p_2 \leq 0$, Widerspruch.) Verwende Induktion nach $\operatorname{grad} p_1 \geq 1$.

Ist $\operatorname{grad} p_1 = 1$, so ist $1 = \operatorname{grad} p_1 \geq \operatorname{grad} p_2 \geq 1$, also $\operatorname{grad} p_2 = 1$. Sind nun $p_1(x) = a_1 x + a_0$ und $p_2(x) = b_1 x + b_0$ mit $a_1, b_1 \neq 0$, so ist

$$p_1(x) = a_1 x + a_0 = \frac{a_1}{b_1}(b_1 x + b_0) + \left(a_0 - \frac{a_1 b_0}{b_1}\right)$$

Induktionsschritt: Es seien $p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $p_2(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ mit $a_n, b_m \neq 0$ (wobei $1 \leq \operatorname{grad} p_2 = m \leq \operatorname{grad} p_1 = n$). Dann ist $\operatorname{grad}\left(p_1(x) - \frac{a_n}{b_m} p_2(x) x^{n-m}\right) < \operatorname{grad} p_1(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Polynome $\bar{q}, r$, derart dass

$$p_1(x) - \frac{a_n}{b_m} p_2(x) x^{n-m} = \bar{q}(x) p_2(x) + r(x) \quad \text{und } \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p_2$$

und daher

$$p_1(x) = \underbrace{\left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \bar{q}(x)\right)}_{=:q(x)} p_2(x) + r(x).$$

Eindeutigkeit: Angenommen, $p_1(x) = q(x) p_2(x) + r(x) = \bar{q}(x) p_2(x) + \bar{r}(x)$ für Polynome $q, \bar{q}, r$ und $\bar{r}$, die $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p_2$ und $\operatorname{grad} \bar{r} < \operatorname{grad} p_2$ erfüllen. Dann ist $r - \bar{r} = (\bar{q} - q) p_2$. Wäre $q \neq \bar{q}$, so würde folgen, dass $\operatorname{grad}(r - \bar{r}) < \operatorname{grad} p_2 \leq \operatorname{grad}(\bar{q} - q) + \operatorname{grad} p_2 = \operatorname{grad}((\bar{q} - q) p_2) = \operatorname{grad}(r - \bar{r})$, ein Widerspruch. Also ist $q = \bar{q}$ und daher $r = \bar{r}$.

2) Ist p ein Polynom (mit reellen Koeffizienten) mit $\text{grad}\, p \geq 1$ und $x_1 \ (\in \mathbb{C})$ eine Nullstelle von p (dh $p(x_1) = 0$), so gibt es ein Polynom q (mit komplexen Koeffizienten) und $\text{grad}\, q = \text{grad}\, p - 1$, derart dass $p(x) = (x - x_1) q(x)$.

<u>Beweis</u>: Nach 1) gibt es Polynome q und r, derart dass $p(x) = (x - x_1) q(x) + r(x)$ und $\text{grad}\, r < 1$. Aus $0 = p(x_1) = (x_1 - x_1) q(x_1) + r(x_1) = r(x_1)$ folgt $r = 0$ und daher $p(x) = (x - x_1) q(x)$ und $\text{grad}\, q = \text{grad}\, p - 1$

3) Fundamentalsatz der Algebra: Ist $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom mit <u>komplexen</u> Koeffizienten (dh $a_j \in \mathbb{C}$ für $0 \leq j \leq n$) und $\text{grad}\, p \geq 1$, so besitzt p eine <u>komplexe</u> Nullstelle (dh $\exists z_1 \in \mathbb{C} : p(z_1) = 0$). (Ohne Beweis)

4) Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$), so heißt $\bar{z} = a - ib$ komplex Konjugierte zu z.

Es gelten $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$ und $\bar{z} = z$ $\forall z \in \mathbb{R}$

<u>Beweis</u>: Ist $z = a + ib$, $w = c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so ist $z + w = a + c + i(b + d)$

$\Rightarrow \overline{z + w} = a + c - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{z} + \bar{w}$ und $zw = ac - bd + i(ad + bc)$

$\Rightarrow \overline{zw} = ac - bd - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

Ist $z \in \mathbb{R}$, so ist $\bar{z} = \overline{z + i \cdot 0} = z - i \cdot 0 = z$.

5) Ist $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten (dh $a_j \in \mathbb{R}$ für $0 \leq j \leq n$) und $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist Nullstelle von p, so ist auch $\bar{z}_1 \ (\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ Nullstelle von p

<u>Beweis</u>: $p(\bar{z}_1) = \sum_{j=0}^{n} a_j \bar{z}_1^{\,j} = \sum_{j=0}^{n} \bar{a}_j \bar{z}_1^{\,j} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j z_1^j} = \overline{p(z_1)} = \bar{0} = 0$.

6) Ist $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sind $z_1, \bar{z}_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstellen von p, so ist $p(x) = (x^2 + A_1 x + B_1) \cdot q(x)$ für gewisse $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ und ein Polynom q mit <u>reellen</u> Koeffizienten und $\text{grad}\, q = \text{grad}\, p - 2$.

<u>Beweis</u>: Da z_1 Nullstelle von p ist, ist $p(x) = (x - z_1) q_1(x)$ für ein Polynom q_1 mit komplexen Koeffizienten und $\text{grad}\, q_1 = \text{grad}\, p - 1$. Wegen $0 = p(\bar{z}_1) = (\bar{z}_1 - z_1) q_1(\bar{z}_1)$ und $\bar{z}_1 \neq z_1$ ist $q_1(\bar{z}_1) = 0$. Daher ist $q_1(x) = (x - \bar{z}_1) q_2(x)$ für ein Polynom q_2 mit komplexen Koeffizienten und $\text{grad}\, q_2 = \text{grad}\, q_1 - 1 = \text{grad}\, p - 2$. Offensichtlich ist $p(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1) q_2(x)$.

Es ist nun $(x-z_1)(x-\overline{z}_1) = x^2-(z_1+\overline{z}_1)x+z_1\overline{z}_1$. Ist $z_1 = a_1+ib_1$ mit $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, so ist $z_1+\overline{z}_1 = 2a_1 \in \mathbb{R}$ und $z_1\overline{z}_1 = a_1^2+b_1^2 \in \mathbb{R}$. Setzt man $A_1 = -(z_1+\overline{z}_1)$ und $B_1 = z_1\overline{z}_1$, so ist $(x-z_1)(x-\overline{z}_1) = x^2+A_1x+B_1$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Wendet man Polynomdivision mit Rest nun auf p und $x^2+A_1x+B_1$ an, so folgt: Es gibt Polynome q und r (mit reellen Koeffizienten), derart dass $p(x) = (x^2+A_1x+B_1)q(x)+r(x)$ und $\operatorname{grad} r < 2$. Genau dasselbe würde man erhalten, wenn man alle auftretenden Polynome als Polynome mit komplexen Koeffizienten auffasst. Aus der Eindeutigkeit folgen nun $q = q_2$ (und $q_2 = q$ besitzt daher reelle Koeffizienten) und $r = 0$.

7) Aus dem bisherigen folgt: Ist q ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $\operatorname{grad} q \geq 1$, so besitzt q eine Darstellung der folgenden Gestalt:

$$q(x) = a(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_k)^{m_k}(x^2+A_1x+B_1)^{s_1}\cdots(x^2+A_\ell x+B_\ell)^{s_\ell}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ der Leitkoeffizient von q (d.h. der Koeffizient der höchsten im Polynom q auftretenden Potenz), $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von q mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k$ und bezeichnen $z_1, \overline{z}_1, \dots, z_\ell, \overline{z}_\ell \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen nicht reellen Nullstellen von q mit Vielfachheiten $s_1, \dots, s_\ell$, so gilt $x^2+A_jx+B_j = (x-z_j)(x-\overline{z}_j)$ für $1 \leq j \leq \ell$.

8) Es seien p_1, p_2 zwei Polynome (mit $\operatorname{grad} p_1 \geq 1$ und $\operatorname{grad} p_2 \geq 1$) mit <u>reellen</u> Koeffizienten ohne gemeinsame <u>komplexe</u> Nullstelle. Dann gibt es für jedes Polynom q (mit reellen Koeffizienten) Polynome f_1, f_2 (mit reellen Koeffizienten), derart dass $q = f_1p_1+f_2p_2$.

<u>Beweis:</u> Es sei $I = \{f_1p_1+f_2p_2 \mid f_1, f_2 \text{ sind Polynome mit reellen Koeffizienten}\}$. Dann enthält I das konstante Polynom 0 (da $0 = 0\cdot p_1+0\cdot p_2$) und I enthält sicher Polynome $\neq 0$ (z.B. p_1, da $p_1 = 1\cdot p_1+0\cdot p_2$).

Wir behaupten, dass I ein konstantes Polynom $\neq 0$ enthält. Daraus folgt die Behauptung. Ist nämlich $f_1p_1+f_2p_2 = a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, so gilt

$$\left(\tfrac{1}{a}qf_1\right)p_1+\left(\tfrac{1}{a}qf_2\right)p_2 = q \quad \text{für jedes beliebige Polynom } q$$

Angenommen, I würde als einziges konstantes Polynom das Polynom 0 enthalten

Es sei nun $q_0 \in I \setminus \{0\}$ ein Polynom mit $\operatorname{grad} q_0 \geq 1$ minimal. Dann gibt es Polynome s_1, t_1, derart dass $p_1 = s_1 q_0 + t_1$ und $\operatorname{grad} t_1 < \operatorname{grad} q_0$. Da $t_1 = p_1 - s_1 q_0 \in I$ und $\operatorname{grad} t_1 < \operatorname{grad} q_0$, muss $t_1 = 0$ gelten, d.h. $p_1 = s_1 q_0$. Völlig analog kann man zeigen, dass $p_2 = s_2 q_0$ für ein Polynom s_2. Da $\operatorname{grad} q_0 \geq 1$, besitzt q_0 eine komplexe Nullstelle, die gemeinsame Nullstelle von p_1 und p_2 wäre, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

9) Sind p_1, p_2 zwei Polynome wie in 8) (mit reellen Koeffizienten ohne gemeinsame komplexe Nullstelle), so kann man in der Darstellung $q = f_1 p_1 + f_2 p_2$, die nach 8) für jedes Polynom q existiert, verlangen, dass $\operatorname{grad} f_2 < \operatorname{grad} p_1$ gilt.

<u>Beweis:</u> Ist $q = \tilde{f}_1 p_1 + \tilde{f}_2 p_2$ irgendeine solche Darstellung und ist $\tilde{f}_2 = s p_1 + t$ für Polynome s, t mit $\operatorname{grad} t < \operatorname{grad} p_1$, so ist

$$q = \tilde{f}_1 p_1 + \tilde{f}_2 p_2 = \tilde{f}_1 p_1 + (s p_1 + t) p_2 = \underbrace{(\tilde{f}_1 + s p_2)}_{=: f_1} p_1 + \underbrace{t}_{=: f_2} p_2$$

14.6.2021

10) Partialbruchzerlegung: Sind p und q zwei Polynome mit reellen Koeffizienten und $0 \leq \operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ und besitzt q eine Faktorisierung, wie sie in 7) beschrieben wurde, so besitzt die rationale Funktion $\frac{p}{q}$ eine Darstellung folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} = {} & \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \\
& + \dots \\
& + \frac{a_{k1}}{x - x_k} + \frac{a_{k2}}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{a_{km_k}}{(x-x_k)^{m_k}} \\
& + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2 + A_1 x + B_1} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^2} + \dots + \frac{b_{1s_1}x + c_{1s_1}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^{s_1}} \\
& + \dots \\
& + \frac{b_{l1}x + c_{l1}}{x^2 + A_l x + B_l} + \frac{b_{l2}x + c_{l2}}{(x^2 + A_l x + B_l)^2} + \dots + \frac{b_{ls_l}x + c_{ls_l}}{(x^2 + A_l x + B_l)^{s_l}}
\end{aligned}$$

Dabei sind $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (für $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m_i$) und $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$ (für $1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq s_i$).

Beweisskizze: Ist $q = q_1^m \cdot q_2$, wobei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und q_1 und q_2 Polynome mit reellen Koeffizienten, $\operatorname{grad} q_1 \geq 1$ und $\operatorname{grad} q_2 \geq 1$ und ohne gemeinsame komplexe Nullstelle sein sollen, so gibt es nach 8) und 9) Polynome f_1 und f_2 mit den Eigenschaften $p = f_1 q_1 + f_2 q_2$ und $\operatorname{grad} f_2 < \operatorname{grad} q_1$. Daraus folgt

$$\frac{p}{q} = \frac{f_1 q_1 + f_2 q_2}{q_1^m q_2} = \frac{f_1 q_1}{q_1^m q_2} + \frac{f_2 q_2}{q_1^m q_2} = \frac{f_1}{q_1^{m-1} q_2} + \frac{f_2}{q_1^m}.$$

Fortwährende Anwendung mit $q_1(x) = x - x_j$ (mit $1 \leq j \leq k$) bzw. $q_1(x) = x^2 + A_j x + B_j$ (mit $1 \leq j \leq l$) ergibt die obige Darstellung.

11) Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} zu berechnen, die wir anhand des Beispiels $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ demonstrieren:

1. Koeffizientenvergleich: $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + a-b}{x^2-1}$

Koeffizientenvergleich im Zähler führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a+b &= 0 \\ a-b &= 1 \end{aligned}\right\}$$ dessen Lösung $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ man berechnet.

2. Einsetzen spezieller Werte: Setzt man etwa $x = 2$ bzw $x = -2$, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a + \frac{b}{3} &= \frac{1}{3} \\ -\frac{a}{3} - b &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$ dessen Lösung $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ man wieder berechnet

3. Grenzwerte: $\frac{x-1}{x^2-1} = a + \frac{b(x-1)}{x+1} \Rightarrow a = \lim\limits_{x \to 1} \left(a + \frac{b(x-1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

bzw. $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)}{x-1} + b \Rightarrow b = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{a(x+1)}{x-1} + b\right) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$

Beispiel: Man kann (und soll) die verschiedenen Verfahren mischen:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + a-c}{x^3-1}$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a+b \quad &= 1 \\ a-b+c &= 0 \\ a \quad -c &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Die Zahl a kann mit Hilfe von Grenzwerten berechnet werden: Aus

$$\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^3-1} = a + \frac{(bx+c)(x-1)}{x^2+x+1} \quad \text{folgt}$$

$$a = \lim_{x\to 1}\left(a + \frac{(bx+c)(x-1)}{x^2+x+1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt $b = \frac{1}{3}$ und $c = -\frac{1}{3}$, also

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

„Algorithmus" für Anwendung der Partialbruchzerlegung

1. Falls der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms, führe Polynomdivision mit Rest durch. Man erhält eine Summe aus einem Polynom (leicht zu integrieren) und einer rationalen Funktion, bei der der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms.
2. Faktorisiere das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren (wie in 7) oben). Achtung: Das ist im allgemeinen ganz und gar nicht trivial!
3. Berechne die Partialbruchzerlegung (wie in 10) oben)
4. Wende die folgenden Formeln an (mit $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $a, \alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$ und $A^2 < 4B$)

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+Ax+B} = \frac{2}{\sqrt{4B-A^2}}\arctan\frac{2x+A}{\sqrt{4B-A^2}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+Ax+B)^m} = \frac{2x+A}{(m-1)(4B-A^2)(x^2+Ax+B)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4B-A^2)}\int \frac{dx}{(x^2+Ax+B)^{m-1}}$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+Ax+B}\,dx = \frac{\alpha}{2}\log(x^2+Ax+B) + \left(\beta - \frac{\alpha A}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+Ax+B}$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+Ax+B)^m}\,dx = -\frac{\alpha}{2(m-1)(x^2+Ax+B)^{m-1}} + \left(\beta - \frac{\alpha A}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+Ax+B)^m}$$

Zahlreiche verwandte Integrale lassen sich durch Substitution auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen. In den folgenden Beispielen soll R stets eine rationale Funktion (in ein oder zwei Variablen) bezeichnen.

1) $\int R(e^x)\,dx$. Durch die Substitution $t = e^x \Rightarrow x = \log t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

erhält man $\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\cdot \frac{1}{t}\,dt \Big|_{t=e^x}$

2) $\int R(\sqrt[n]{x})\,dx$ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Die Substitution $t = \sqrt[n]{x} \Rightarrow x = t^n \Rightarrow \frac{dx}{dt} = n t^{n-1}$

$\Rightarrow dx = n t^{n-1}\,dt$ führt auf $\int R(\sqrt[n]{x})\,dx = n \int R(t)\cdot t^{n-1}\,dt \Big|_{t=\sqrt[n]{x}}$

3) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ (wobei R jetzt eine rationale Funktion in zwei Variablen sein kann). Hier kann man die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ verwenden. Dann ist $x = 2\arctan t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. Um $\sin x$ und $\cos x$ mittels t auszudrücken, verwendet man

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

und $\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

Insgesamt ist $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}$

Beispiele: 1) $\int \frac{dx}{2+e^{2x}}$ (Verwende die Substitution $t = e^{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\log t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{1}{2t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{2+e^{2x}} = \int \frac{1}{2+t}\cdot\frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2+t}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\log t - \log(2+t)\right) = \frac{1}{4}\left(2x - \log(2+e^{2x})\right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\log(2+e^x) + C$$

2) $\int \frac{\cot x}{1+\cos x}\,dx$ (Verwende die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, die oben beschrieben wurde)

$$\int \frac{\cot x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x\,(1+\cos x)}\,dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}\;\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\;\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1-t^2}{2t} \frac{2}{\underbrace{1+t^2+1-t^2}_{=1}} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{t} dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - t\right) dt = \frac{1}{2}\log|t| - \frac{t^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C$$