6. Reihen

6.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

Definition: Es sei $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Folge $(s_n)_{n \geq 1}$, die folgendermaßen definiert ist:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + \cdots\cdots + a_n$$
$$\vdots$$

Die s_n werden Partialsummen genannt. Für die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen schreibt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und bezeichnet sie als Reihe.

Ist die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ konvergent (bzw. divergent), so wird die Reihe konvergent (bzw. divergent) genannt. Ist $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so bezeichnet man auch diesen Grenzwert mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, d.h. man schreibt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Bemerkungen: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen: Die Folge der Partialsummen und ihren Grenzwert (falls er existiert).

2) Wie bei Folgen muss der Index, mit dem die Reihe beginnt, nicht 1 sein. Er ist oft 0, kann aber auch ein anderes $p \in \mathbb{Z}$ sein (d.h. die Reihe hat die Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$).

Beispiele: 1) Ist $|q| < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{1}{1-q}$.

D.h. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q|<1$ und $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe).

(Das wurde bereits in Bsp. 5) am Ende von Abschnitt 2.2 bewiesen.)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (harmonische Reihe), da die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen keine Cauchyfolge ist. Genauer wurde in Bsp. 2) nach Satz 24 bewiesen, dass $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$. Da die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ streng monoton wächst, ist sie (wegen Satz 22) unbeschränkt und daher $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, da die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge ist.

(Das wurde in Bsp. 3) nach Satz 24 bewiesen.)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergiert, da $s_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, denn $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \;\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

und daher $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

D.h. bei s_n handelt es sich um eine Teleskopsumme. (Vergleiche Übungsbsp. 44a)

<u>Satz 130</u> (i) Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $c, d \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n + d b_n)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n + d b_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

(ii) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$,

(iii) Werden in einer konvergenten (bzw. divergenten) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur endlich viele Summationsglieder a_n abgeändert, so ist auch die neu entstandene Reihe konvergent (bzw. divergent),

(iv) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so gelten $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$,

(v) Ist $a_n \geq 0 \;\forall n \geq 1$, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow (s_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt,

(vi) Wenn $\exists c > 0 : 0 \leq a_n \leq c b_n \;\forall n \geq 1$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Man nennt in diesem Fall $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(vii) Wenn $\exists c > 0 : a_n \geq c b_n \geq 0 \;\forall n \geq 1$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert, dann divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Man nennt in diesem Fall $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(viii) (Cauchy-Kriterium für Reihen) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \geq 1$ sodass $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \;\forall n \geq n_0 \;\forall p \geq 1$.

Beweis: (i) Aus Satz 21 (i) und (iv) folgt

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k+db_k) = c\sum_{k=1}^{n}a_k + d\sum_{k=1}^{n}b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} c\sum_{k=1}^{\infty}a_k + d\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

(ii) Wäre die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ konvergent, so wäre wegen (i) auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}((a_n+b_n)+(-1)a_n)$ konvergent, ein Widerspruch.

(iii) Es bezeichne $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ die Reihe, die entsteht, wenn man in der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ endlich viele Summanden abändert, d.h. $\exists n_0\geq 1\ \forall n>n_0: b_n=a_n$.

Offensichtlich ist $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+(b_n-a_n))$. Für $n>n_0$ ist nun $b_n-a_n=0$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ ist daher konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n) = \sum_{n=1}^{n_0}(b_n-a_n)$.

Ist $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergent (bzw. divergent), so ist $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+(b_n-a_n))$ daher nach (i) (bzw. (ii)) ebenfalls konvergent (bzw. divergent).

(iv) Bezeichnet $s=\lim_{n\to\infty}s_n = \sum_{k=1}^{\infty}a_k$, so folgt $a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} s-s=0$

bzw. $\sum_{k=n}^{\infty}a_k = s-s_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} s-s=0$.

(v) Da $a_n\geq 0\ \forall n\geq 1$ ist die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und aus Satz 22 folgt: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)_{n\geq 1}$ beschränkt.

(vi) Da $s_n = \sum_{k=1}^{n}a_k \leq c\sum_{k=1}^{n}b_k \leq c\sum_{k=1}^{\infty}b_k\ \forall n\geq 1$, ist die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und daher wegen (v) konvergent.

(vii) Wäre die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergent, so wäre wegen $b_n\leq \frac{1}{c}a_n\ \forall n\geq 1$ und (vi) auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergent, Widerspruch.

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\overset{\text{Satz 24}}{\Longleftrightarrow} (s_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchy-Folge

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\geq 1$ sodass $\forall n,m\geq n_0$ gilt $|s_m-s_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\geq 1$ sodass $\forall n\geq n_0\ \forall p\geq 1$ gilt $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\geq 1$ sodass $\forall n\geq n_0\ \forall p\geq 1$ gilt $|a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$

Bemerkung: Die Umkehrung des 1. Teils von Satz 130 (iv) gilt nicht, da $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ aber $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

Korollar 131 Es seien $a_n, b_n > 0$ $\forall n \geq 1$ und es möge der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ existieren. Dann sind die beiden Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Beweis: Es sei $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$. Wähle nun $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \geq 1$, sodass $\left|\frac{a_n}{b_n} - \alpha\right| < \frac{\alpha}{2}$ für $n \geq n_0$. Daher ist $-\frac{\alpha}{2} < \frac{a_n}{b_n} - \alpha < \frac{\alpha}{2}$ für $n \geq n_0$ und somit $\frac{\alpha}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\alpha}{2}$ für $n \geq n_0$. Wegen Satz 130 (vi) bzw (vii) sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ daher für einander wechselseitig konvergente Majoranten bzw. divergente Minoranten. Wegen Satz 130 (iii) reicht es, dass diese Bedingungen nur für $n \geq n_0$ erfüllt sind.

Beispiele: 1) Ist $|q| \geq 1$, so ist $(q^n)_{n\geq 0}$ keine Nullfolge (da $|q^n| = |q|^n \geq 1$ $\forall n \geq 0$). Aus Satz 130 (iv) folgt daher, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = +\infty$. Aus $3n+1 \leq 4n$ $\forall n \geq 1$ folgt $\frac{1}{3n+1} \geq \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}$. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante. Alternativ dazu kann man auch verwenden, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$. Die Behauptung folgt aus Korollar 131 und der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert. Es gilt $n! \geq 2^{n-1}$ $\forall n \geq 0$ (Induktion nach n. $n=0$: $0! = 1 \geq \frac{1}{2} = 2^{-1}$, $n=1$: $1! = 1 \geq 1 = 2^0$ und für $n \geq 1$ ist $n+1 \geq 2$ und daher $(n+1)! = n!\,(n+1) \geq 2^{n-1}\cdot 2 = 2^n$) Es folgt $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = 2\cdot\frac{1}{2^n}$ $\forall n \geq 0$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ eine konvergente Majorante.

(Tatsächlich haben wir in Korollar 95 bereits bewiesen, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.)

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1$ und der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ folgt wegen Korollar 131 die Behauptung.

(Man kann zeigen, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

5) Ist $\alpha \geq 2$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Aus $n^\alpha \geq n^2 \; \forall n \geq 1$ folgt $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \; \forall n \geq 1$.

Die $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ divergiert. Aus $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ folgt $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Die

Behauptung folgt nun aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und Korollar 131.