6.2 Konvergenz- und Divergenzkriterien

Definition: Eine Reihe, bei der die Vorzeichen der Summanden abwechseln, heißt alternierend. Formal genauer: Ist $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$, so heißen Reihen der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \ (= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \cdots)$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \ (= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - + \cdots)$ alternierend.

Satz 132 (Leibniz-Kriterium) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Beweis: Es gelten $s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0$ und $s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+3} - a_{2k+2} \leq 0$, d.h. die Folge $(s_{2k})_{k\geq 1}$ ist monoton wachsend und die Folge $(s_{2k-1})_{k\geq 1}$ ist monoton fallend. Da $s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k+1} \leq s_1 \ \forall k \geq 1$ ist die Folge $(s_{2k})_{k\geq 1}$ nach oben beschränkt (durch s_1) und die Folge $(s_{2k+1})_{k\geq 0}$ nach unten beschränkt (durch s_2). Wegen Satz 22 existieren $s^- := \lim_{k\to\infty} s_{2k}$ und $s^+ := \lim_{k\to\infty} s_{2k+1}$. Aus

$$s^+ - s^- = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} - \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$$

folgt $s^+ = s^- = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Beispiele: 1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge.

(Man kann zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.)

2) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $(\frac{1}{2n+1})_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

(Man kann zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.)

3) Dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ divergiert, zeigt, dass nicht jede alternierende Reihe konvergiert.

Definition: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 133 Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, so ist nach Voraussetzung die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent. Es sei $\varepsilon > 0$. Anwendung des Cauchy-Kriteriums (Satz 130 (viii)) auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ liefert: $\exists n_0 \geq 1 \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \geq 1 : \big| |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \big| < \varepsilon$ und daher

$$\forall n \geq n_0 \ \forall p \geq 1 : |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| = \big| |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \big| < \varepsilon.$$

Wieder nach dem Cauchykriterium (Satz 130 (viii)), diesmal angewandt auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung: Die Umkehrung von Satz 133 gilt nicht, d.h. es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Z.B. konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 132), aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Lemma 134 Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $c, d \in \mathbb{R}$, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n + d b_n)$ absolut konvergent.

Beweis: Es ist $|c a_n + d b_n| \leq |c||a_n| + |d||b_n| \ \forall n \geq 1$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (|c||a_n| + |d||b_n|)$ konvergiert nach Satz 130 (i) und ist daher eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c a_n + d b_n|$, die wegen Satz 130 (vi) konvergiert.

Satz 135 (Wurzelkriterium, 1. Version)

(i) Gibt es ein $q \in (0,1)$, derart dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n (d.h. alle bis auf endlich viele n), so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(ii) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis: (i) Es gibt ein $n_0 \geq 1$, derart dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \ \forall n \geq n_0$ und daher $|a_n| \leq q^n \ \forall n \geq n_0$. D.h. die geometrische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ ist eine konvergente Majorante für $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$. Also konvergiert $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ und daher (wegen Satz 130 (iii)) auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$:

(ii) Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so folgt $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n. Daher ist $(a_n)_{n\geq 1}$ keine Nullfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert (wegen Satz 130 (iv)).

Korollar 136 (Wurzelkriterium, 2. Version). Es sei $\alpha := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (≥ 0).

(i) Ist $\alpha < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent,

(ii) Ist $\alpha > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis: (i) Da $\alpha < 1$, ist $\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0$. Wegen Satz 32 ist $\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ für fast alle n, d.h. die Voraussetzung von Satz 135 (i) ist mit $q = \frac{1+\alpha}{2}$ erfüllt.

(ii) Da $\alpha > 1$, ist $\varepsilon := \frac{\alpha-1}{2} > 0$. Wegen Satz 32 ist $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \frac{\alpha-1}{2} = \frac{1+\alpha}{2} > 1$ für unendlich viele n, d.h. die Voraussetzung von Satz 135 (ii) ist erfüllt.

Bemerkungen: 1) Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (was in vielen Anwendungsbeispielen der Fall ist), so ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und man kann Korollar 136 in folgender Form anwenden:

(i) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent,

(ii) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

2) Es reicht in Satz 135 (i) nicht, dass $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für fast alle n. z.B. folgt aus $\sqrt[n]{n} > 1$ $\forall n \geq 2$, dass $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} < 1$ $\forall n \geq 2$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

3) Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (d.h. $\alpha = 1$ in Korollar 136), so kann man (mit Hilfe des Wurzelkriteriums) keine Aussage machen.

z.B. ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Das wurde in Beispiel 1) nach Satz 21 bewiesen.)

Es folgt sofort, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}) \overset{\text{Satz 21 (iii)}}{=} (\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 = 1^2 = 1$.

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$. Nun divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, während die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert. Man kann das Summationsglied abschätzen mittels

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdots\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)} = \frac{n^n}{n!}.$$

Nun gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \ \forall n \geq 1$. (Das ist trivial für $n=1$ und folgt für $n \geq 2$ aus der Bernoulli-Ungleichung (Satz 18): $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2$.) Man erhält daraus

$$\frac{n^n}{n!} = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \geq 2^{n-1}.$$ Es folgt sofort $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n}$

und daher $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{2}$ für $n \geq 1$.

Da die Folge $\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)_{n\geq 1}$ beschränkt ist (wegen $0 \leq \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \leq \frac{2}{2} = 1$), existiert $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. Wendet man Satz 20 (i) auf die gegen $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ konvergierende Teilfolge von $\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)_{n\geq 1}$ an, so erhält man $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$.

(Dabei haben wir die Beziehung $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ verwendet, die in Beispiel 2) nach Satz 21 enthalten ist.)

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ folgt nun aus Korollar 136 (i).

(Tatsächlich konvergiert die Folge $\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)_{n\geq 1}$ und man kann zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.)

Satz 137 (Quotientenkriterium, 1. Version) Es sei $a_n \neq 0$ für fast alle $n \geq 1$.

(i) Gibt es ein $q \in (0,1)$, sodass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für fast alle n (d.h. alle bis auf endlich viele n), so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis: (i) Ist $n_0 \geq 1$, derart dass $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \ \forall n \geq n_0$, so folgt $|a_{n_0+p}| \leq q^p |a_{n_0}| \ \forall p \geq 0$ (Induktion nach p: $p=0$ ist trivial und

$$|a_{n_0+p+1}| = \left|\frac{a_{n_0+p+1}}{a_{n_0+p}}\right| \cdot |a_{n_0+p}| \leq q\cdot q^p |a_{n_0}| = q^{p+1}|a_{n_0}|.)$$ Also ist die geometrische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(ii) Ist $n_0 \geq 1$, derart dass $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ $\forall n \geq n_0$, so gilt

$|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \cdots \geq |a_{n_0+1}| \geq |a_{n_0}|$ $\forall n \geq n_0$, d.h. $|a_n| \geq |a_{n_0}| > 0$ $\forall n \geq n_0$.

Daher ist $(a_n)_{n\geq 1}$ keine Nullfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert (wegen Satz 130 (iv)).

<u>Korollar 138</u> (Quotientenkriterium, 2. Version) Es sei $a_n \neq 0$ für fast alle $n \geq 1$.

(i) Ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent,

(ii) Ist $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

<u>Beweis</u>: (i) Es sei $\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Wählt man wieder $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} > 0$,

so ist (wegen Satz 32) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ für fast alle n, d.h. die

Voraussetzung von Satz 137 (i) ist mit $q = \frac{1+\alpha}{2}$ erfüllt.

(ii) Es sei $\beta := \underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Wählt man $\varepsilon = \frac{\beta-1}{2}$, so gilt wegen

der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.5, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \beta - \frac{\beta-1}{2} = \frac{1+\beta}{2} > 1$

für fast alle n, d.h. die Voraussetzung von Satz 137 (ii) ist erfüllt.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Existiert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (was in vielen Anwendungsbeispielen

der Fall ist) so ist $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und man

kann Korollar 138 in folgender Form anwenden:

(i) Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent,

(ii) Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

2) Es reicht in Satz 137 (i) <u>nicht</u>, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für fast alle n.

Z.B. ist $\left|\frac{1/n+1}{1/n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ $\forall n \geq 1$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

3) Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, so kann man (mit Hilfe des Quotientenkriteriums)

keine Aussage machen. Z.B. gelten $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1/n+1}{1/n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ und

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert, denn

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

Bemerkungen: 1) Wurzel- und Quotientenkriterium entstehen beide durch Vergleich der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ mit der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

2) Man kann zeigen: Kann man die (absolute) Konvergenz einer Reihe mit dem Quotientenkriterium beweisen, so kann man sie auch mit dem Wurzelkriterium beweisen. Es gibt aber Reihen, deren Konvergenz man mit dem Wurzelkriterium zeigen kann, aber nicht mit dem Quotientenkriterium.

3) Als Faustregel kann man sich merken: Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium, das Quotientenkriterium ist aber oft einfacher in der Handhabung (wie z.B. oben im Fall der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$).

Bemerkung: Der nachfolgende Satz und das darauffolgende Korollar sind Nachträge zu den Abschnitten 3.7 bzw. 5.5. Sie sind Analoga zu den Sätzen 22 (für Folgen) bzw. 130 (v) (für Reihen).

Satz 139 Die Funktion $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ sei monoton. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existiert,

(ii) f ist beschränkt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\alpha := \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Dann $\exists x_0 \geq a \ \forall x \geq x_0: |f(x)-\alpha| < 1$.

Daraus folgt $|f(x)| - |\alpha| \leq ||f(x)|-|\alpha|| \leq |f(x)-\alpha| < 1$ und daher $|f(x)| \leq |\alpha|+1 \ \forall x \geq x_0$

Auf dem Intervall $[a,x_0]$ ist f beschränkt, da $f(a) \leq f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in [a,x_0]$ (falls f monoton wächst) bzw. $f(x_0) \leq f(x) \leq f(a) \ \forall x \in [a,x_0]$ (falls f monoton fällt). In beiden Fällen ist $|f(x)| \leq \max\{|f(x_0)|, |f(a)|\} \ \forall x \in [a,x_0]$.

Insgesamt ist $|f(x)| \leq \max\{|\alpha|+1, |f(x_0)|, |f(a)|\} \ \forall x \geq a$, d.h. f ist beschränkt.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei zunächst f monoton wachsend. Es sei $\alpha := \sup_{x\geq a} f(x)$.

Behauptung: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$. Es sei $\varepsilon > 0$. Wegen Satz 5 gibt es ein $x_0 \geq a$, derart dass $\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leq \alpha$ und daher $\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \quad \forall x \geq x_0$.

Daraus folgt $|f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \forall x \geq x_0$ und damit die Behauptung.

Falls f monoton fällt, folgt die Behauptung durch anwenden des bisher gezeigten auf $-f$.

21.6.2021

<u>Korollar 140</u> Es sei $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, x]$ $\forall x \geq a$ und $f \geq 0$. Dann sind äquivalent:

(i) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existiert,

(ii) $\exists K > 0: \int\limits_a^x f(t)\,dt \leq K \quad \forall x \geq a$.

<u>Beweis</u>: Für $x \geq a$ sei $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Dann ist $F \geq 0$ und die Funktion F ist monoton wachsend. (Ist $x < y$, so gilt

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \leq \int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_x^y f(t)\,dt = \int\limits_a^y f(t)\,dt = F(y).)$$ Also gilt

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ existiert} \iff \lim_{x \to +\infty} F(x) \text{ existiert} \overset{\text{Satz 139}}{\iff} F \text{ ist beschränkt}$$

<u>Satz 141</u> (Integralkriterium) Die Funktion $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ erfülle $f > 0$ und sei monoton fallend. Dann sind äquivalent:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert,

(ii) $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ existiert.

<u>Beweis</u>: Es sei $s_n := f(1) + \cdots + f(n)$. Dann gilt offenbar

$$s_n - f(1) = f(2) + \cdots + f(n) \leq \int\limits_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{n-1}^n f(x)\,dx \leq f(1) + \cdots + f(n-1) = s_{n-1},$$

woraus sofort folgt, dass $s_n - f(1) \leq \int\limits_1^n f(x)\,dx \leq s_{n-1}$. Nun gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \overset{\text{Satz 130 (v)}}{\iff} (s_n)_{n \geq 1} \text{ ist beschränkt}$$

$$\iff \text{Die Folge } \left(\int\limits_1^n f(t)\,dt\right)_{n \geq 1} \text{ ist beschränkt}$$

$$\iff \text{Die Abbildung } [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int\limits_1^x f(t)\,dt \text{ ist beschränkt}$$

$$\overset{\text{Kor. 140}}{\iff} \int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt \text{ existiert}$$

<u>Korollar 142</u> Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann wenn $\alpha > 1$.

<u>Beweis</u>: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\overset{\text{Satz 141}}{\iff} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert $\iff \alpha > 1$ (siehe Abschnitt 5.5)

Bemerkung: Für $\alpha > 1$ erhält man so die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Da sie die Produktdarstellung $\zeta(\alpha) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-\alpha}}$ (Produkt über alle Primzahlen) besitzt, wird sie in der analytischen Zahlentheorie verwendet, um die Verteilung der Primzahlen zu untersuchen. Man kann sie auf die gesamte komplexe Ebene (mit Ausnahme des Punkts 1) fortsetzen. Sie ist auch Gegenstand der berühmten Riemannschen Vermutung, die sich mit der Lage ihrer nichttrivialen Nullstellen beschäftigt.

Satz 143 Die Funktion $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ erfülle $f > 0$ und sei monoton fallend. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \right) \in [0, f(1)]$.

Beweis: Für $n \geq 1$ sei $t_n := \int_1^n f(x)\,dx - (f(2) + \dots + f(n))$. Die Folge $(t_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend, denn

$$t_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx - (f(2) + \dots + f(n+1)) = \underbrace{\left(\int_1^n f(x)\,dx - (f(2) + \dots + f(n)) \right)}_{= t_n} + \underbrace{\int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1)}_{\geq 0} \geq t_n$$

Weiters gilt $0 \leq t_n \leq f(1) - f(n)$ für $n \geq 1$, denn

$$0 \leq \left(\int_1^2 f(x)\,dx - f(2) \right) + \dots + \left(\int_{n-1}^n f(x)\,dx - f(n) \right) = \int_1^n f(x)\,dx - (f(2) + \dots + f(n)) = t_n$$

$$\leq (f(1) - f(2)) + \dots + (f(n-1) - f(n)) = (f(1) + \dots + f(n-1)) - (f(2) + \dots + f(n))$$

$$= f(1) - f(n)$$

Also ist die Folge $(t_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und durch $f(1)$ nach oben beschränkt. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} t_n$ (nach Satz 22) und $\lim_{n\to\infty} t_n \in [0, f(1)]$ (wegen Satz 20 (i)). Bezeichnet $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(s_n - \int_1^n f(x)\,dx \right) = \lim_{n\to\infty} (f(1) - t_n) = f(1) - \lim_{n\to\infty} t_n \in [0, f(1)].$$

Bemerkung: Beachten Sie, dass wir weder vorausgesetzt haben, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert, noch dass $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ existiert.

Beispiel: Anwendung von Satz 143 auf die Funktion $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ergibt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) =: \gamma$ existiert. Die Zahl γ wird Euler-Mascheroni-Konstante genannt. Es ist nicht bekannt, ob γ rational oder irrational ist.