6.3 Potenzreihen und Taylorreihen

Definition: Eine Reihe der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$, wird Potenzreihe (um a) genannt. Dabei ist x eine Variable, $a \in \mathbb{R}$ und $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \geq 0$.

Bemerkungen: 1) Genau genommen handelt es sich bei einer Potenzreihe also um eine Reihe, bei der Funktionen aufsummiert werden (nämlich die Abbildungen $x \mapsto a_k(x-a)^k$).

2) Häufig wählt man $a=0$, d.h. man betrachtet Reihen der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Definition: Für eine gegebene Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ definiert man ihren Konvergenzradius R durch die Formel $R := \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$, wobei man $\frac{1}{+\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ setzt (Formel von Cauchy-Hadamard).

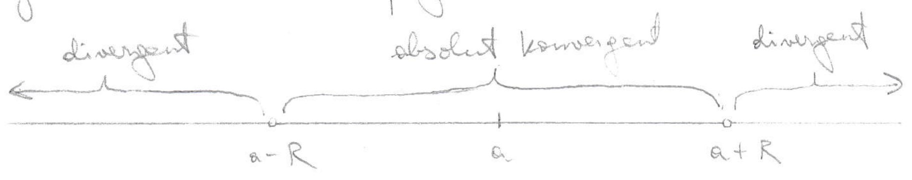
Satz 144 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ möge Konvergenzradius R besitzen.

(i) Ist $R=0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ nur für $x=a$ und divergiert für $x \neq a$.

(ii) Ist $R=\infty$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ absolut $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Ist $R \in (0,+\infty)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|x-a| < R$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|x-a| > R$.

Bemerkung: Man diesen Satz folgendermaßen veranschaulichen:



Beweis: (i) Ist $R=0$, so folgt $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$ und daher

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x-a| \right) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}.$$

Also ist $\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|} \geq 1$ für unendlich viele k und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ daher divergent für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$ (nach Satz 135 (ii)).

(ii) Ist $R = \infty$, so folgt $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ und daher

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k (x-a)^k|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x-a| \right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ nach Korollar 136 (i).

(iii) Für $R \in (0, +\infty)$ ist (unter Verwendung von Übungsbeispiel 63 a))

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k (x-a)^k|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left(|x-a| \cdot \sqrt[k]{|a_k|} \right) \overset{\text{Bsp 63a)}}{=} |x-a| \cdot \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x-a|}{R}$

Für $|x-a| < R$ ist nun $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k (x-a)^k|} = \frac{|x-a|}{R} < 1$ und die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$

ist wegen Korollar 136 (i) absolut konvergent.

Für $|x-a| > R$ ist $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k (x-a)^k|} = \frac{|x-a|}{R} > 1$ und die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$

ist, wegen Korollar 136 (ii) divergent.

Beispiele: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ folgt $R = 0$ und die

Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ konvergiert daher nur für $x = 0$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n} x^n$: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt $R = \infty$ und

die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n} x^n$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ folgt $R = 1$ und die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

(d.h. die geometrische Reihe) konvergiert absolut wenn $|x| < 1$ und

divergiert wenn $|x| > 1$.

22.6.2021

Bemerkung: Das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den beiden Randpunkten $a+R$ und $a-R$ des Konvergenzintervalls $(a-R, a+R)$ kann man auf diese Weise nicht bestimmen.

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (d.h. die geometrische Reihe) divergiert in ihren beiden Randpunkten $x = 1$ (da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$) und $x = -1$

(da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergiert).

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ besitzt Konvergenzradius $R=1$ (denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$). Sie konvergiert im Randpunkt $x=-1$ (da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert) und divergiert im Randpunkt $x=1$ (da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$).

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ besitzt ebenfalls Konvergenzradius $R=1$ (denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$). Sie konvergiert sowohl im Randpunkt $x=-1$ (da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert) als auch im Randpunkt $x=1$ (da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert).

<u>Satz 145</u> In der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ sei $a_k \neq 0$ für fast alle $k \geq 0$, und es existiere entweder $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ als reelle Zahl oder es sei $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = +\infty$. Dann erfüllt der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ die Gleichung $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (mit $R=\infty$ wenn $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = +\infty$).

<u>Beweis</u>: Ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 0$, so divergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, denn für diese x gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(x-a)^{k+1}}{a_k (x-a)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-a| = |x-a| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} = +\infty$$

und die Behauptung folgt aus Satz 137 (ii).

Ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = +\infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für alle $x \in \mathbb{R}$, denn (für $x \neq a$)

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(x-a)^{k+1}}{a_k (x-a)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-a| = |x-a| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} = 0$$

und die Behauptung folgt aus Korollar 138 (i).

Ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \in (0, +\infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut wenn $|x-a| < \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ und divergiert für $|x-a| > \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, denn (für $x \neq a$)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(x-a)^{k+1}}{a_k(x-a)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\cdot|x-a| = \lim_{k\to\infty}\frac{|x-a|}{\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} = \frac{|x-a|}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}.$$

Für $|x-a| < \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(x-a)^{k+1}}{a_k(x-a)^k}\right| = \dfrac{|x-a|}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} < 1$

und die Potenzreihe konvergiert absolut nach Korollar 138 (i).

Für $|x-a| > \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(x-a)^{k+1}}{a_k(x-a)^k}\right| = \dfrac{|x-a|}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} > 1$

und die Potenzreihe divergiert nach Korollar 138 (ii).

<u>Satz 146</u> Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ besitze Konvergenzradius $R \neq 0$.

Auf dem Konvergenzintervall der Potenzreihe wird dadurch eine Funktion f definiert, d.h. genauer:

Ist $R \in (0,+\infty)$, so ist $f: (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$.

Ist $R = \infty$, so ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$.

Für x im Konvergenzintervall (d.h. $x \in (a-R, a+R)$ falls $R \in (0,+\infty)$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ falls $R = \infty$) gelten dann:

(i) f ist stetig in x,

(ii) $\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$ (wobei diese Potenzreihe ebenfalls Konvergenzradius R besitzt),

(iii) f ist bei x differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ (wobei diese Potenzreihe ebenfalls Konvergenzradius R besitzt),

(iv) f ist bei x beliebig oft differenzierbar und

$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k(x-a)^{k-n}$ für alle $n \geq 1$,

(v) $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ für alle $n \geq 0$.

(Ohne Beweis)

Bemerkungen: 1) Die in Punkt (i) genannte Stetigkeit folgt natürlich aus der Differenzierbarkeit in Punkt (iii). Dass sie trotzdem extra genannt wird, liegt am (ausgelassenen) Beweis, der für diese Vorlesung zu umfangreich und schwer ist. Aus der Stetigkeit folgt auch die (in Punkt (ii)) verwendete Integrierbarkeit

2) Punkt (ii) besagt, dass eine Potenzreihe gliedweise integriert werden kann, dh

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\xi-a)^k\right) dx \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^x (\xi-a)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(\xi-a)^{k+1}}{k+1}\right]_{\xi=a}^{x}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$$

Dass die bei $(*)$ vorgenommene Vertauschung von $\int_a^x$ und $\sum_{k=0}^{\infty}$ korrekt ist, ist alles andere als selbstverständlich.

3) Punkt (iii) besagt, dass eine Potenzreihe gliedweise differenziert werden kann, dh

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{d}{dx}(x-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$$

Auch hier ist es ganz und gar nicht selbstverständlich, dass die bei $(*)$ vorgenommene Vertauschung von $\frac{d}{dx}$ und $\sum_{k=0}^{\infty}$ gestattet ist.

4) Punkt (iv) folgt aus Punkt (iii) mit Induktion nach n.

5) Punkt (v) folgt sofort aus Punkt (iv) durch Einsetzen von a: $f^{(n)}(a) = n!\,a_n$

Beispiele: Wir leiten mit Hilfe des letzten Satzes aus der geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ (für $|x|<1$) weitere Potenzreihenentwicklungen her:

1) Differenzieren $\left(\frac{d}{dx}\right)$ liefert $1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$ (für $|x|<1$)

2) Integrieren $\left(\int_0^x\right)$ liefert $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \left[-\log(1-\xi)\right]_{\xi=0}^{x} = -\log(1-x)$

x durch $-x$ ersetzen: $-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + - \dots = -\log(1+x)$

Multiplikation mit -1: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots = \log(1+x)$ (für $|x|<1$)

3) x durch $-x$ ersetzen: $1 - x + x^2 - + \dots = \frac{1}{1+x}$

x durch x^2 ersetzen: $1 - x^2 + x^4 - + \dots = \frac{1}{1+x^2}$

integrieren $\left(\int_0^x\right)$: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots = \left[\arctan \xi\right]_{\xi=0}^{x} = \arctan x$ (für $|x|<1$)

24.6.2021

Eine wichtige Anwendung dieser Reihe ist die näherungsweise Berechnung von π. Bis vor circa 300 Jahren verwendete man dafür regelmäßige n-Ecken, die einem Kreis ein- und umgeschrieben wurden. Ab dann wurden bis ins 20. Jahrhundert analytische Methoden verwendet. Setzt man in der letzten Potenzreihe $x = 1$, so erhält man $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Das ist zwar richtig, wir haben es aber nicht bewiesen, da 1 am Rand des Konvergenzintervalls liegt. Diese Reihe ist für die Berechnung von π aber ohnehin nicht zu gebrauchen, da sie nur sehr langsam konvergiert. So gilt z.B.

$$4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\dots+\frac{1}{100001}\right) = 3{,}141612\dots$$

Davon sind nur die ersten drei Nachkommastellen (141) korrekt, aber nicht die Stellen danach. Die folgende Vorgangsweise von John Machin ermöglicht eine wesentlich bessere Berechnung mit Hilfe der Arcustangens-Reihe. Ausgangspunkt ist die Formel $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ (Übungsbeispiel 137), die man, wenn man $\alpha = \arctan x$ und $\beta = \arctan y$ setzt und Arcus tangens auf die Gleichung anwendet, umschreiben kann zu

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \qquad (*)$$

Mit ihrer Hilfe erhält man

$$\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{239} = \arctan 1 + \arctan\frac{1}{239} \overset{(*)}{=} \arctan\frac{\frac{240}{239}}{\frac{238}{239}} = \arctan\frac{240}{238}$$

$$= \arctan\frac{120}{119} = \arctan\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} \overset{(*)}{=} 2\arctan\frac{5}{12} = 2\arctan\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} \overset{(*)}{=} 4\arctan\frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

$$= 4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^3}+-\dots\right) - \left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+-\dots\right)$$

Diese Darstellung konvergiert wesentlich rascher und ist für die näherungsweise Berechnung von π gut geeignet.

(Tatsächlich gibt es eine größere Zahl ähnlicher „Arcustangens-Formeln", z.B. $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ und $\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}$.)

<u>Definition</u>: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $a \in I$. Dann wird eine Reihe der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ als Taylorreihe bezeichnet.

Bemerkung: Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ die Summenfunktion einer Potenzreihe, so ist diese die Taylorreihe von f (wegen Satz 146 (vi)).

Umgekehrt kann man jeder unendlich oft differenzierbaren Funktion eine Taylorreihe zuordnen, diese braucht für $x \neq a$ aber nicht zu konvergieren bzw. falls sie konvergiert, muss sie nicht gegen f konvergieren.

Satz 147 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $a \in I$. Dann gelten:

(i) Die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ konvergiert bei $x \in I$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} T_{n,a}(f)(x)$ existiert, wobei $T_{n,a}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle a bezeichnet,

(ii) Für ein $x \in I$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} (f(x) - T_{n,a}(f)(x)) = 0$,

(iii) Wenn $\exists c, r, A > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq c A^n \;\; \forall n \geq 1 \;\; \forall x \in (a-r, a+r) \; (\subseteq I)$,

dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \forall x \in (a-r, a+r)$.

Beweis: (i) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ konvergiert

$\iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ existiert $\iff \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(f)(x)$ existiert

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$

$\iff \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(f)(x) = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} (f(x) - T_{n,a}(f)(x)) = 0$

(iii) Wir verwenden das Lagrangesche Restglied (Korollar 94 (ii)).

D.h. es gibt ein ξ zwischen x und a, derart dass

$$\left| f(x) - T_{n,a}(f)(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{c(A|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für jedes $x \in (a-r, a+r)$. Die Behauptung folgt nun aus (ii). (Dass $\lim_{n\to\infty} \frac{c(A|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, folgt z.B. aus Übungsbeispiel 52.)

Korollar 148: (i) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

(iii) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis: (i) Wir haben für $f(x) = e^x$ in Bsp. 1) nach Satz 89 bereits bewiesen, dass $T_{n,0}(f)(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ und in einem Beispiel vor Korollar 95, dass $f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$ für ein ξ zwischen 0 und x.

Da $|f^{(n)}(x)| = |e^x| = e^x \leq e^r$ für $n \geq 1$ und $x \in (-r, r)$ sind die Bedingungen von Satz 147 (iii) erfüllt (z.B. mit $c = 1$ und $A = e^r$). Die Behauptung folgt nun aus Satz 147 für $x \in (-r, r)$ und (da $r > 0$ beliebig war) für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Es sei nun $f(x) = \sin x$. Wegen Bemerkung 2) nach Satz 122 ist

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{falls } n = 4k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1 & \text{falls } n = 4k+3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Daher ist $T_{2n+1,0}(f) = T_{2n+2,0}(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Weiters folgt $|f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \forall x \in \mathbb{R}$. ~~Also~~ sind wieder die Voraussetzungen von Satz 147 (iii) (mit $c = A = 1$) erfüllt und die Behauptung folgt aus Satz 147.

(iii) Es sei $f(x) = \cos x$. Wieder wegen Bemerkung 2) nach Satz 122 ist

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ 1 & \text{falls } n = 4k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1 & \text{falls } n = 4k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Daher ist $T_{2n,0}(f) = T_{2n+1,0}(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. Wie im Beweis von Punkt (ii) gilt $|f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Da die Voraussetzungen von Satz 147 (iii) sind wieder (mit $c = A = 1$) erfüllt und die Behauptung folgt aus Satz 147.