Anhang: Einige berühmte Gleichungen

Lemma 149 (i) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$,

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$,

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx \quad \forall n \geq 3$,

(iv) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \forall k \geq 1$,

(v) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \quad \forall k \geq 1$.

Beweis: (i) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_{x=0}^{\pi/2} = 1$.

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \left[\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)\right]_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \underbrace{\left[-\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x\right]_{x=0}^{\pi/2}}_{=0} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx \overset{(iii)}{=} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \overset{(ii)}{=} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

(v) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx \overset{(iii)}{=} \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \overset{(i)}{=} \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3}$

Satz 150 (Wallissches Produkt)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$$

Beweis: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist $0 \leq \sin x \leq 1$ und daher $\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$ für alle $k \geq 1$. Es folgt $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1} x \, dx$, d.h.

$$\frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \leq \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3}$$

wegen Lemma 149. Daraus erhält man

$$\frac{1}{2k+1} \cdot \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2k} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2}$$

und daher

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2k}\,\frac{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2k)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2k-1)^2} \leq \frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{\pi}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Die Behauptung folgt sofort aus Satz 20 (ii)

Korollar 151

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k!)^2\, 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$$

Beweis: Aus Satz 150 folgt

$$\pi = \lim_{k\to\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2k)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2k-1)^2}\cdot\frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k))^4}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k))^2}\cdot\frac{1}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(2^k\cdot k!)^4}{((2k)!)^2}\cdot\frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k)!}\right)^2\cdot\frac{1}{k}$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k!)^2\,2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\left(\frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k)!}\right)^2\cdot\frac{1}{k}} = \sqrt{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k)!}\right)^2\cdot\frac{1}{k}} = \sqrt{\pi}.$$

Satz 152 (Stirlingsche Formel)

(i) Für $n \geq 1$ ist

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq e^{1/4n},$$

(ii)

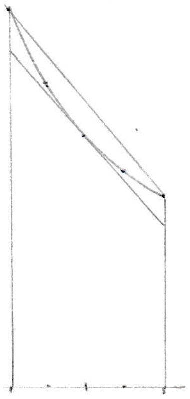
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Beweis: (i) Für $n \geq 1$ sei $a_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \dfrac{n!}{n^{n+1/2}\,e^{-n}}$. Dann ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^{n+1/2}\,e^{-n}}\;\frac{(n+1)^{n+1/2}(n+1)e^{-n-1}}{(n+1)!} = e^{-1}\,\frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$$

und daher $\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$. Da die Funktion $(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{x}$ konvex ist, kann man $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ folgendermaßen abschätzen:

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\frac{n+1}{n} = \log(n+1)-\log n = \int_n^{n+1}\frac{dx}{x}\begin{cases} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \\[2ex] > \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}\end{cases}$$



$n \qquad n+\frac{1}{2} \qquad n+1$

In der Zeichnung ist $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ die Fläche unter der Kurve und $\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$ die Fläche des kleineren bzw. größeren Trapezes. D.h. es gilt
$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$ und daher

$$0 < \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) - 1 = \log\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$< \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}\right) - 1 = \frac{2n+1}{4}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)} - \frac{4n(n+1)}{4n(n+1)}$$

$$= \frac{4n^2+4n+1-4n^2-4n}{4n(n+1)} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

woraus sofort $1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}$ folgt. Man sieht, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fällt und beschränkt ist und daher nach Satz 22 konvergiert.
Es sei $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$. Für $k \geq 1$ ist

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)} = e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)}$$

Lässt man nun $k\to\infty$ gehen, so erhält man $1 \leq \frac{a_n}{\alpha} \leq e^{\frac{1}{4n}}$. Zu zeigen bleibt $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Aus Korollar 151 folgt

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\,\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(a_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)^2 2^{2n}}{a_{2n}(2n)^{2n+1/2} e^{-2n}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 \cdot n^{2n+1} e^{-2n}\, 2^{2n}}{a_{2n}\, 2^{2n}\sqrt{2}\, n^{2n+1} e^{-2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\sqrt{2}\, a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^2}{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

woraus man sofort $\alpha = \sqrt{2\pi}$ erhält.

(ii) Wegen $\lim_{n\to\infty} e^{1/4n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}} = e^0 = 1$ folgt die Behauptung aus (i) und Satz 20 (ii).

Satz 153 (Gaußsches Fehlerintegral) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Beweis: Für $n \geq 0$ sei $I_n := \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$

Das uneigentliche Integral $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ existiert nach Korollar 140

(weil $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ $\forall x \geq 1$ und $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{x=1}^{+\infty} = \frac{1}{e}$),

$I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{2}$ und für $n \geq 2$ gilt

$$\underbrace{\int_0^{\xi} x^{n-2} e^{-x^2}\,dx}_{\substack{\to I_{n-2}\\ (\xi \to +\infty)}} = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} e^{-x^2}\right]_{x=0}^{\xi} - \int_0^{\xi} \frac{x^{n-1}}{n-1}(-2x)e^{-x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{\xi^{n-1}}{n-1} e^{-\xi^2}}_{\substack{\to 0\\ (\xi \to +\infty)}} + \frac{2}{n-1}\underbrace{\int_0^{\xi} x^n e^{-x^2}\,dx}_{\substack{\to I_n\\ (\xi \to +\infty)}}$$

Da wenn I_{n-2} existiert, existiert auch I_n und $2I_n = (n-1)I_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Durch Induktion erhält man $2^k I_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) I_0$ $\forall k \geq 1$

(Für $k=1$ ist $2I_2 = 1 \cdot I_0$ und

$$2^{k+1} I_{2k+2} = 2^k \cdot 2 I_{2k+2} = 2^k \cdot (2k+1) I_{2k} = (2k+1) \cdot 2^k I_{2k}$$

$$\overset{IV}{=} (2k+1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) I_0 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1) I_0 \text{)}$$

und $2I_{2k+1} = k!$ $\forall k \geq 0$ (Für $k=0$ ist $2I_1 = 1 = 0!$ und

$2I_{2k+3} = (2k+2) I_{2k+1} = (k+1) \cdot 2I_{2k+1} \overset{IV}{=} (k+1) \cdot k! = (k+1)!$)

Für $\xi \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ ist,

$$I_{n+1} + 2\xi I_n + \xi^2 I_{n-1} = \int_0^{+\infty} (x^{n+1} + 2\xi x^n + \xi^2 x^{n-1}) e^{-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{n-1}(x^2 + 2x\xi + \xi^2) e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}(x+\xi)^2 e^{-x^2}\,dx > 0.$$

Daher besitzt die Gleichung $I_{n-1}t^2 + 2I_n t + I_{n+1} = 0$ keine reelle Lösung t.

Darum gilt $4I_n^2 - 4I_{n-1}I_{n+1} < 0$ und daher

$I_n^2 < I_{n-1}I_{n+1} = I_{n-1} \cdot \frac{n}{2} I_{n-1}$ und folglich $2I_n^2 < n I_{n-1}^2$ für $n \geq 1$.

Daraus erhält man

$$\frac{(k!)^2}{4k+2} = \frac{4I_{2k+1}^2}{4k+2} = \frac{2}{2k+1} I_{2k+1}^2 < I_{2k}^2 < I_{2k-1} \cdot I_{2k+1}$$

$$= \frac{(k-1)!\,k!}{4} = \frac{(k!)^2}{4k+2} \cdot \frac{4k+2}{4k} = \frac{(k!)^2}{4k+2}\left(1+\frac{1}{2k}\right) \quad \text{für } k \geq 1.$$

Also gilt: $\forall k \geq 1 \ \exists \varepsilon_k \in \left(0, \frac{1}{2k}\right) : I_{2k}^2 = \frac{(k!)^2}{4k+2}(1+\varepsilon_k)$.

Setzt man für I_{2k} ein, so erhält man

$$\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2}{2^{2k}} I_0^2 = \frac{(k!)^2}{4k+2}(1+\varepsilon_k)$$

und daraus

$$I_0^2 = \frac{(2^k k!)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{4k+2}(1+\varepsilon_k)$$

$$= \underbrace{\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{2k}}_{\to \frac{\pi}{2} \text{ (Satz 150)}} \cdot \underbrace{\frac{2k}{4k+2}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{(1+\varepsilon_k)}_{\to 1} \xrightarrow[(k \to \infty)]{} \frac{\pi}{4}$$

Also ist $I_0^2 = \frac{\pi}{4}$ und daher $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

<u>Korollar 154</u> (i) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) dx = 1$. (Dichtefunktion der Standardnormalverteilung)

<u>Beweis:</u> (i) Das folgt daraus, dass $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2}$ gerade ist.
(Oder man zeigt mittels Substitution $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.)

(ii) Substituiere $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,dt$). Man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$