2. Reelle Vektorräume

Def.: Es sei $K\ (\neq \emptyset)$ eine Menge und $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf K (d.h. zwei Abbildungen $+ : K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto a+b$ und $\cdot : K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto a \cdot b$), die die folgenden Eigenschaften besitzen:

(1) $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe,

(2.1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a,b,c \in K$ (Assoziativität der Multiplikation)

(2.2) $\exists\, 1 \in K^* \ \forall a \in K : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (Existenz des Einselement)

(2.3) $\forall a \in K^* \ \exists \frac{1}{a} \in K : a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ (Existenz von multiplikativen Inversen)

(2.4) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in K$ (Kommutativität der Multiplikation)

(3.1) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a,b,c \in K$
(3.2) $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in K$
(Distributivgesetze)

Dann wird $(K,+,\cdot)$ ein Körper genannt.

Bspe.: 1) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ und $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind Körper.

2) $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ wird durch die folgenden beiden Verknüpfungen ein Körper:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

11.3.2024

Def.: Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Auf K sei eine Relation $<$ definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(4.1) Für $a,b \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen
$a<b$, $a=b$ oder $b<a$, (Trichotomie)

(4.2) Aus $a<b$ und $b<c$ folgt $a<c$, (Transitivität)

(4.3) Wenn $a<b$ und $c \in K$ dann $a+c < b+c$,

(4.4) Wenn $a<b$ und $0<c$ dann $a \cdot c < b \cdot c$.

Dann wird K ein angeordneter Körper genannt.

Bspe: 1) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper.

2) Es gibt keine Ordnungsrelation $<$, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht. (In einem angeordneten Körper K gilt $x^2 > 0 \ \forall x \in K^*$. Ist $x>0$, so $x^2 = x \cdot x > 0 \cdot x = 0$. Ist $x<0$, so ist $0 = x + (-x) < 0 + (-x) = -x$ und daher $x^2 = (-x)^2 > 0$. Wäre $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper mit Ordnungsrelation $<$, so wäre $-1 = i^2 > 0$, ein Widerspruch.)

3) Ebenso ist es unmöglich, $\mathbb{F}_2$ zu einem angeordneten Körper zu machen.

Bemerkung: Wir werden in dieser Vorlesung das Rechnen in den angeordneten Körpern $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ voraussetzen, d.h. wir „rechnen, wie man es gewohnt ist." Der Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist, dass $\mathbb{Q}$ „viele Löcher hat", z.B. bei $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ werden „diese Löcher gestopft". Man sich $\mathbb{R}$ daher als lückenlosen, ununterbrochenen Zahlenstrahl vorstellen. Man sagt „$\mathbb{R}$ ist vollständig."

Def.: Es sei $V (\neq \emptyset)$ eine Menge und $V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$ und $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$ zwei Abbildungen, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

(1) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe,

(2.1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \forall v \in V: (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$,

(2.2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ \forall v, w \in V: \alpha (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$,

(2.3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \forall v \in \mathbb{R}: (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta \cdot v$,

(2.4) $\forall v \in V: 1 \cdot v = v$ (wobei $1 \in \mathbb{R}$ die reelle Zahl bezeichnet).

Dann heißt V reeller Vektorraum (oder auch „Vektorraum über $\mathbb{R}$" oder „$\mathbb{R}$-Vektorraum"). Die Elemente von V werden Vektoren, die Elemente von $\mathbb{R}$ werden (in diesem Kontext) Skalare genannt (und $\mathbb{R}$ wird als Skalarkörper bezeichnet).

Bemerkungen: 1) Die Symbole $+$ und $\cdot$ haben in den Axiomen (2.1) - (2.4) zwei verschiedene Bedeutungen: Einerseits Addition und Multiplikation reeller Zahlen, andererseits Addition zweier Vektoren und Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor.

2) Das neutrale Element der abelschen Gruppe $(V,+)$ wird als Nullvektor bezeichnet. Der Nullvektor wird oft mit 0 bezeichnet. Wir schreiben dafür σ, um ihn von der reellen Zahl $0 \in \mathbb{R}$ zu unterscheiden.

3) Für $v, w \in V$ verwenden wir die Notation $v - w := v + (-w)$.

4) Wir werden uns in dieser Vorlesung auf reelle Vektorräume beschränken (und hier hauptsächlich auf $\mathbb{R}^n$ und Räume von Matrizen mit reellen Eintragungen). Allgemeiner betrachtet man Vektorräume über beliebigen Körpern K und viele unserer Sätze bzw. Beweise gelten allgemein.

Lemma 7: Es sei V ein reeller Vektorraum. Dann gelten:

(i) $0 \cdot v = \sigma \quad \forall v \in V$,

(ii) $\alpha \cdot \sigma = \sigma \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) Aus $\alpha \cdot v = \sigma$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}, v \in V$) folgt, dass $\alpha = 0$ oder $v = \sigma$,

(iv) $(-1) \cdot v = -v \quad \forall v \in V$.

Beweis: (i) Aus $0\cdot v = (0+0)\cdot v = 0\cdot v + 0\cdot v$ folgt durch Addition von $-(0\cdot v)$, dass $\sigma = 0\cdot v - 0\cdot v = 0\cdot v + 0\cdot v - 0\cdot v = 0\cdot v$.

(ii) Aus $\alpha\cdot\sigma = \alpha\cdot(\sigma+\sigma) = \alpha\cdot\sigma + \alpha\cdot\sigma$ folgt durch Addition von $-(\alpha\cdot\sigma)$, dass $\sigma = \alpha\cdot\sigma - \alpha\cdot\sigma = \alpha\cdot\sigma + \alpha\cdot\sigma - \alpha\cdot\sigma = \alpha\cdot\sigma$.

(iii) Es sei $\alpha\cdot v = \sigma$. Ist $\alpha = 0$, so sind wir fertig. Ist $\alpha \neq 0$, so ist $v = 1\cdot v = (\alpha^{-1}\cdot\alpha)\cdot v = \alpha^{-1}(\alpha\cdot v) = \alpha^{-1}\cdot\sigma = \sigma$.

(iv) Aus $v + (-1)v = 1\cdot v + (-1)v = (1+(-1))\cdot v = 0\cdot v = \sigma$ folgt wegen der Eindeutigkeit von $-v$, dass $(-1)\cdot v = -v$.

Satz 8 Bei $\mathbb{R}^2$, versehen mit komponentenweisen Addition $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$ und Multiplikation $\alpha\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$ mit einem Skalar $\alpha\in\mathbb{R}$, handelt es sich um einen reellen Vektorraum.

Beweis: In Satz 2 wurde bewiesen, dass $(\mathbb{R}^2,+)$ eine abelsche Gruppe ist.

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\alpha\beta)x\\(\alpha\beta)y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha(\beta x)\\\alpha(\beta y)\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\beta x\\\beta y\end{pmatrix} = \alpha\left(\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha(x_1+x_2)\\\alpha(y_1+y_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_1+\alpha x_2\\\alpha y_1+\alpha y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha x_2\\\alpha y_2\end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \forall \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\alpha+\beta)x\\(\alpha+\beta)y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x+\beta x\\\alpha y+\beta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x\\\beta y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$$1\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot x\\1\cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

Bspe.: 1) Für jedes $n\in\mathbb{N}^+$ ist $\mathbb{R}^n$, ebenfalls versehen mit den komponentenweisen Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_1+y_1\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \alpha\cdot\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_1\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix},$$

ein reeller Vektorraum.

2) Es sei $\mathbb{P}$ die Menge aller (reellen) Polynomfunktionen, d.h.

$$\mathbb{P} = \{p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \text{ für gewisse } a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}\},$$

versehen mit der üblichen Addition zweier Polynomfunktionen bzw der üblichen Multiplikation einer reellen Zahl mit einer Polynomfunktion. Dann ist $\mathbb{P}$ ein reeller Vektorraum.

3) Für $d\in\mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}_d = \{p\in\mathbb{P}\mid \operatorname{grad} p\le d\}$. Dabei ist der Grad $\operatorname{grad} p$ eines

Polynoms $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ definiert als $\operatorname{grad} p = n$. Zusätzlich definiert man für das Nullpolynom p_0 (d.h. $p_0(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) $\operatorname{grad} p_0 = -\infty$. Dann ist P_d, versehen mit denselben Verknüpfungen wie im vorangegangenen Bsp., ein reeller Vektorraum.

4) In der Analysis treten eine große Zahl von Vektorräumen auf. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so bilden die Mengen der integrierbaren (bzw. stetigen bzw. differenzierbaren) Funktionen $f: I \to \mathbb{R}$ reelle Vektorräume (mit den Verknüpfungen $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \ \forall x \in I$).

5) $\mathbb{C}$ ist ein reeller Vektorraum (mit der üblichen Addition komplexer Zahlen und der üblichen Multiplikation einer reellen mit einer komplexen Zahl).

6) Allgemeiner gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ ist $\mathbb{C}^n$ ein reeller Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{pmatrix}$$

wobei $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

13.3.2024

<u>Def.</u>: Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Menge $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$ heißt Teilraum von V, wenn W bezüglich der Verknüpfungen von V selbst ein reeller Vektorraum ist.

<u>Satz 9</u> Es sei V ein reeller Vektorraum und $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) W ist ein Teilraum von V,

(ii) $\forall v, w \in W: v + w \in W$ und $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v \in W: \alpha v \in W$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Folgt aus der Abgeschlossenheit von W gegenüber den beiden Verknüpfungen.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Aus Lemma 7 (iv) folgt $-v = (-1) \cdot v \in W \ \forall v \in W$. Daraus und aus der Voraussetzung $v + w \in W \ \forall v, w \in W$ erhält man mit Hilfe von Satz 4, dass W eine Untergruppe von $(V, +)$ ist. Die Eigenschaften (2.1) - (2.4) gelten, da sie sogar auf ganz V gelten.

<u>Satz 10</u> Es sei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge aller Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

d.h. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k \right\}$. Dann ist W ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Sind $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in W$, so $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = 0$ für $1\le i\le k$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j+y_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad \text{für } 1\le i\le k, \text{ dh } \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}\in W$$

und $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\alpha x_j) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ für $1\le i\le k$, dh $\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{pmatrix}\in W$ (für $\alpha\in\mathbb{R}$).

Bspe.: 1) Sind $a,b\in\mathbb{R}$, so ist $\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax+by=0\right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

Beachte: Ist $a=b=0$, so handelt es sich dabei um den ganzen $\mathbb{R}^2$. Ist $a\neq 0$ oder $b\neq 0$, so handelt es sich um eine Gerade durch den Nullpunkt (wobei wir den Begriff Gerade noch nicht definiert haben!).

2) Sind $a,b,c\in\mathbb{R}$, so ist $\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax+by+cz=0\right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

Auch hier gilt analog: Ist $a=b=c=0$, ist das der ganze $\mathbb{R}^3$. Ist (mindestens) eine der drei Bedingungen $a\neq 0$, $b\neq 0$ und $c\neq 0$ erfüllt, so ist das eine Ebene, die den Nullpunkt enthält (wobei auch der Begriff Ebene noch nicht definiert wurde).

3) Ist $d\in\mathbb{N}$, so ist P_d ein Teilraum von P.

4) Sind $d,e\in\mathbb{N}$, $d\le e$, so ist P_d ein Teilraum von P_e.

5) Ist $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, so der Raum der differenzierbaren Funktionen $f: I\to\mathbb{R}$ ein Teilraum des Raums der stetigen Funktionen $f: I\to\mathbb{R}$.

6) Ist $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, so ist der Raum der stetigen Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ein Teilraum des Raums der integrierbaren Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

7) Ist $n\in\mathbb{N}^+$, so ist $\mathbb{R}^n$ ein Teilraum des reellen Vektorraums $\mathbb{C}^n$.

8) Jeder reelle Vektorraum V besitzt die Teilräume $\{e\}$ und V.

Def.: Es sei V ein reeller Vektorraum.
Sind $v_1,\ldots,v_n\in V$, so heißt jeder Vektor $v\in V$, den man als

$$v = \alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{für gewisse } \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$$

schreiben kann, eine Linearkombination der Vektoren $v_1,\ldots,v_n$.

Ist $M\subseteq V$, $M\neq\emptyset$, so heißt ein Vektor $v\in V$ Linearkombination von Vektoren aus M, wenn es $v_1,\ldots,v_n\in M$ gibt, deren Linearkombination v ist.

Bspe.: 1) Die Vektoren $\begin{pmatrix}9\\ 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix}$ sind beide Linearkombinationen der Vektoren $\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, da $\begin{pmatrix}9\\ 1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

2) Der Vektor $\begin{pmatrix}-2\\ -5\\ 7\end{pmatrix}$ ist Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, da

$$\begin{pmatrix}-2\\ -5\\ 7\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

3) Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist Linearkombination der beiden Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

4) Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist Linearkombination der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2x-3y}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

5) Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist Linearkombination der Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ da } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

6) Jedes Polynom $p \in P_2$ ist Linearkombination der Polynome $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, da $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 p_2(x) + a_1 p_1(x) + a_0 p_0(x) = (a_2 p_2 + a_1 p_1 + a_0 p_0)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

7) Ist $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar} \}$, so ist jede Funktion der Gestalt $f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ (für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) Linearkombination der beiden Funktionen sinus und cosinus.

<u>Def.</u>: Es sei V ein reeller Vektorraum und $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Dann heißt

$$[M] = \{ v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Elementen aus } M \}$$
$$= \{ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, v_1, \ldots, v_n \in M \}$$

der von M erzeugte Teilraum von V (oder „der von M aufgespannte Teilraum von V" oder „die lineare Hülle von M"). Zusätzlich sei $[\emptyset] = \{0\}$.

<u>Satz 11</u> Es sei V ein reeller Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann ist $[M]$ ein Teilraum von V.

<u>Beweis</u>: Ist $M \neq \emptyset$ und $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m \in [M]$ (mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ und $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in M$), so ist auch $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m \in [M]$ und $\alpha(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = (\alpha\alpha_1) v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n) v_n \in [M]$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Beh. folgt aus Satz 9. Schließlich ist auch $[\emptyset] = \{0\}$ ein Teilraum.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Ist M eine endliche Menge, etwa $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $(\subseteq V)$, so schreibt man $[v_1, \ldots, v_n]$ statt $[\{v_1, \ldots, v_n\}]$.

2) $[M]$ ist der kleinste Teilraum von V, der M enthält.

<u>Def.</u>: Ist V ein reeller Vektorraum, $M \subseteq V$ und $[M] = V$, so wird M ein Erzeugendensystem für V genannt.

<u>Beispiele</u>: 1) Ist $V = \mathbb{R}^2$ und $v = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, so ist $[v] = \left\{ t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ (nach Def.)

2) Ist allgemeiner $V = \mathbb{R}^2$ und $v \in \mathbb{R}^2$, so ist $[v] = \{ tv \mid t \in \mathbb{R} \}$ (nach Def.)

Beachte: Für $v = o$ ist $[v] = \{o\}$. Ist $v \neq o$, so handelt es sich um eine Gerade durch den Nullpunkt.

3) Ist $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, so ist $[e_1, e_2] = \mathbb{R}^2$ (nach Bsp 3, Seite 15)

4) Ist $V = \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, so ist $[v, w] = \mathbb{R}^2$ (nach Bsp. 4, Seite 15)

5) Ist $V = \mathbb{R}^n$ und

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

so ist $[e_1, \ldots, e_n] = \mathbb{R}^n$ (nach Bsp 5) Seite 15)

6) Ist $V = P_2$, $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$, so ist $[p_0, p_1, p_2] = P_2$ (nach Bsp 6, Seite 15)

<u>Def.</u>: Es sei V ein reeller Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen linear abhängig (kurz l.a.), wenn es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle $= 0$ sind, derart dass $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = o$. Gibt es solche $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nicht, so heißen $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig (kurz l.u.).

Eine Menge $M \subseteq V$ heißt l.u. wenn jede endliche Teilmenge von M l.u ist bzw. M ist l.a. wenn es eine endliche Teilmenge von M gibt, die l.a. ist.

<u>Bemerkungen</u>: 1) $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind genau dann l.u. wenn aus $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = o$ (mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$) folgt, dass $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Um zu zeigen, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ l.u. sind, überprüft man normalerweise diese Bedingung.

2) Jede Menge von Vektoren, die den Nullvektor o enthält, ist l.a., da $1 \cdot o = o$.

<u>Bspe.</u>: 1) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sind l.u., denn $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

2) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Vektoren $v = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sind l.u, denn $\alpha\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

3) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Vektoren $v = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ sind l.a, denn $3 \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

4) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Vektoren $v = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ sind l.a., da $0 \cdot \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

5) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Die Vektoren $v = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ sind l.u., denn $\alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + 4\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

6) Sei $V = \mathbb{R}^n$. Die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ sind l.u., denn $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \sigma$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

7) Sei $V = P_2$. Die Polynome $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ sind l.u., denn: Es sei $\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Setzt man $x = -1, x = 0, x = 1$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

8) Sei V der Raum aller differenzierbaren Funktionen. Die Funktionen $\sin, \cos$ sind l.u. Sei $\alpha \sin x + \beta \cos x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Setzt man $x = 0$, so erhält man $\beta = 0$. Setzt man $x = \frac{\pi}{2}$, so erhält man $\alpha = 0$.

Satz 12 Es sei V ein reeller Vektorraum und $M \subseteq V, M \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist l.a.,

(ii) Es gibt ein $v \in M$, das sich als Linearkombination von (anderen) Elementen von M schreiben lässt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist M l.a., so gibt es $v_1, \dots, v_n \in M$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (nicht alle $= 0$), sodass $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sigma$. Ist $\alpha_j \neq 0$ (mit $1 \le j \le n$), so

$$\alpha_j v_j = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{j-1} v_{j-1} - \alpha_{j+1} v_{j+1} - \dots - \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} v_n$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ (mit $v, v_1, \dots, v_n \in M$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$), so $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + (-1) \cdot v = \sigma$

Korollar 13 Es sei V ein reeller Vektorraum und $v, w \in V$ (mit $v \neq w$). Dann sind äquivalent:

(i) v, w sind l.a.,

(ii) $\exists t \in \mathbb{R}: w = tv$ oder $\exists t \in \mathbb{R}: v = tw$

Beweis: Folgt sofort aus Satz 12

Bemerkung: Es ist möglich, dass nur eine der beiden Bedingungen von (ii) erfüllt ist. z.B. ist $\binom{0}{0} = 0 \cdot \binom{3}{-2}$, aber es gibt kein $t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\binom{3}{-2} = t \cdot \binom{0}{0}$.

Korollar 14 Es seien $\binom{a}{c}, \binom{b}{d} \in \mathbb{R}^2$ verschieden. Dann sind äquivalent:

(i) $\binom{a}{c}, \binom{b}{d}$ sind l.a.,

(ii) $ad - bc = 0$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Wegen Kor 13 $\exists t \in \mathbb{R}: \binom{b}{d} = t \cdot \binom{a}{c}$ oder $\exists t \in \mathbb{R}: \binom{a}{c} = t \cdot \binom{b}{d}$ und daher $ad - bc = a \cdot (tc) - (ta)c = 0$ oder $ad - bc = (tb)d - b(td) = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, so sind $\binom{a}{c}, \binom{b}{d}$ l.a., da $b\binom{a}{c} - a\binom{b}{d} = \binom{0}{0}$.
Ist $a = b = 0$, so ist $c \neq 0$ oder $d \neq 0$ und $\binom{a}{c}, \binom{b}{d}$ sind l.a., da $d\binom{a}{c} - c\binom{b}{d} = \binom{0}{0}$.

Definition: Es sei $V (\neq \{\sigma\})$ ein reeller Vektorraum. Eine Menge B heißt Basis von V, wenn B l.u. und ein Erzeugendensystem von V ist. Zusätzlich sei die leere Menge $\emptyset$ Basis des Vektorraums $\{\sigma\}$.

Satz 15 Es sei $V(\neq \{\sigma\})$ ein reeller Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(i) B ist Basis von V (d.h. B ist l.u. und $[B] = V$),

(ii) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V (d.h. $[B] = V$ und ist $C \subsetneq B$, so ist $[C] \subsetneq V$),

(iii) B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V (d.h. B ist l.u. und ist $B \subsetneq C \subseteq V$, so ist C l.a.),

(iv) Jeder Vektor aus V lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombination von Vektoren aus B darstellen.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) B ist Erzeugendensystem von V laut Voraussetzung. Wäre B kein minimales Erzeugendensystem, würde es $C \subsetneq B$ mit $[C] = V$ geben. Dann würde ein Vektor $v \in B \setminus C$ existieren. Da $[C] = V$ wäre $v \in [C]$ und $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ für gewisse $v_1, \dots, v_n \in C$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Da $v, v_1, \dots, v_n \in B$, wäre B l.a. nach Satz 12, Wid.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wir zeigen zuerst, dass B l.u. ist. Wäre B l.a. würde es nach Satz 12 $v, v_1, \dots, v_n \in B$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ geben, sodass $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Dann wäre $B \setminus \{v\}$ aber ebenfalls ein Erzeugendensystem und B wäre kein minimales Erzeugendensystem, Wid.

Zu zeigen bleibt, dass B eine maximale l.u. Teilmenge von V ist. Ist $B \subsetneq C \subseteq V$, so $\exists v \in C \setminus B$. Da $[B] = V$, ist $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ für gewisse $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Da $v, v_1, \dots, v_n \in C$ ist C l.a. nach Satz 12.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Wir zeigen zuerst, dass jedes $v \in V$ Linearkombination von Elementen von B ist (d.h. $[B] = V$). Wäre $[B] \subsetneq V$, so würde es ein $v \in V \setminus [B]$ geben. Dann wäre $B \cup \{v\}$ l.u. (Sind $v_1, \dots, v_n \in B$, so folgt aus $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sigma$, dass $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, da B l.u. ist. Es sei $\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sigma$ (mit $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$). Wäre $\alpha \neq 0$, so wäre $v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n$, ein Wid. Also ist $\alpha = 0$ und daher auch $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.) D.h. B wäre keine maximale l.u. Teilmenge von V, Wid.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit der Darstellung. Angenommen,

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

für $v \in V$, $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. (Sollte ein v_i nur in einer der beiden Darstellungen auftreten, ergänzt man $0 \cdot v_i$ in der anderen.) Dann $(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = \sigma$ und daher $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$ (da B l.u. ist).

Also ist $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ und die Darstellung ist eindeutig.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Da sich jeder Vektor aus V als Linearkombination von Vektoren aus B darstellen lässt, ist $[B] = V$. Wäre B l.a., so würde es nach Satz 12 $v \in B$, $v_1, \dots, v_n \in B \setminus \{v\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ geben. Dann würde v zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination von Vektoren aus B besitzen, nämlich $v = 1 \cdot v$ und $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ein Wid.

Beispiele: 1) $\{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$ (siehe Bsp 3, Seite 15 und Bsp 1 unten, Seite 16)

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$ (siehe Bsp 4, Seite 15 und Bsp 2 unten, Seite 16)

3) Ist $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ist $\{v\}$ Basis des Teilraums $[v] (\subseteq \mathbb{R}^2)$. ($\{v\}$ ist l.u., denn $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 0$, $\{v\}$ ist Erzeugendensystem von $[v]$ nach Def.)

4) Ist allgemeiner $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\sigma\}$, so ist $\{v\}$ Basis des Teilraums $[v] (\subseteq \mathbb{R}^2)$ ($\{v\}$ ist l.u., da $\alpha v = \sigma \Rightarrow \alpha = 0$ wegen Lemma 7 (iii) und $\{v\}$ ist wieder Erzeugendensystem nach Def.)

5) Ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, so ist $\{v, w\}$ Basis des Teilraums $[v, w] (\subseteq \mathbb{R}^3)$ ($\{v, w\}$ ist l.u. nach Bsp 5 unten, Seite 16 und Erzeugendensystem nach Def.)

6) Allgemeiner gilt: Sind $v, w \in \mathbb{R}^3$ l.u., so ist $\{v, w\}$ Basis des Teilraums $[v, w] (\subseteq \mathbb{R}^3)$

7) $\{e_1, \dots, e_n\}$ (mit Bezeichnungen wie Bsp 5, Seite 15) ist Basis des $\mathbb{R}^n$ (siehe Bsp 5, Seite 15 und Bsp 6, Seite 17)

8) $\{p_0, p_1, p_2\}$ ist Basis von P_2 (siehe Bsp 6, Seite 15 und Bsp 7, Seite 17)

9) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $p_n(x) = x^n$. Dann ist $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Basis von P.

10) $\{\sin, \cos\}$ ist Basis des Teilraums $[\sin, \cos]$ des Raums aller differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Bsp 8, Seite 17)

Satz 16 (i) Ein einzelner Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ bildet kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$,

(ii) Sind $v, w \in \mathbb{R}^2$ l.u., so ist $\{v, w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$,

(iii) Enthält die Menge $C (\subseteq \mathbb{R}^2)$ (mindestens) drei paarweise verschiedene Vektoren, so ist C l.a.

Beweis: (i) Ist $v = 0$, so $[v] = \{0\} \subsetneq \mathbb{R}^2$. Es sei $v = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.
Angenommen $[v] = \mathbb{R}^2$. Dann würde es $\alpha \in \mathbb{R}^2$ geben, sodass $\binom{y}{-x} = \alpha \binom{x}{y} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \alpha x \\ -x = \alpha y \end{array}\right\}$
$\Rightarrow y = \alpha x = \alpha(-\alpha y) = -\alpha^2 y \Rightarrow (1+\alpha^2) y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$, Wid.

(ii) Sind $v = \binom{a}{c}$, $w = \binom{b}{d}$ l.u. und $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ bel., so ist $ad - bc \neq 0$ nach Kor. 14 und

$$\binom{x}{y} = \frac{dx - by}{ad - bc}\binom{a}{c} + \frac{ay - cx}{ad - bc}\binom{b}{d},$$ d.h. $[v, w]$ ist auch Erzeugendensystem.

(iii) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ und $|C| \geq 3$. Dann gibt es paarweise verschiedene $v, w, u \in C$.
Sind v, w bereits l.a., so ist auch C l.a. Sind v, w aber l.u., so zeigt (ii) dass u Linearkombination von v und w ist. D.h. u, v, w sind l.a. nach Satz 12 und daher ist auch C l.a.

Bemerkungen: 1) Man kann zeigen: Jeder (reelle) Vektorraum besitzt eine Basis. Wir haben das nur in ein paar (für uns wichtigen) Spezialfällen gezeigt, z.B. den $\mathbb{R}^n$.

2) Wie unsere Bspe. zeigen, gibt es üblicherweise nicht eine eindeutig bestimmte Basis eines (reellen) Vektorraums. Aus Satz 16 (ii) folgt z.B. sofort, dass $\mathbb{R}^2$ unendlich viele paarweise verschiedene Basen besitzt. Sind z.B. $s, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, so ist $\{\binom{s}{0}, \binom{0}{t}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ $\left(\binom{x}{y} = \frac{x}{s}\binom{s}{0} + \frac{y}{t}\binom{0}{t}\ \forall \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \alpha\binom{s}{0} + \beta\binom{0}{t} = \binom{0}{0} \Rightarrow \alpha s = \beta t = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0\right)$

3) Die Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ wird als Standardbasis bezeichnet.

4) Man kann zeigen: Sind B_1 und B_2 zwei Basen des (reellen) Vektorraums V, so haben B_1 und B_2 gleich viele Elemente, d.h. $|B_1| = |B_2|$. Wir haben das (in Satz 16) nur für $V = \mathbb{R}^2$ gezeigt.

5) Wegen Bemerkung 4) ist es sinnvoll zu definieren: Ist V ein (reeller) Vektorraum und B eine Basis von V, so wird die Dimension von V als die Anzahl der Elemente von B definiert, kurz $\dim V = |B|$. Nach dieser Definition ist z.B. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. (Das wurde in Satz 16 bewiesen.) Allgemeiner kann man $\dim \mathbb{R}^n = n$ zeigen (was unserer Vorstellung entspricht).

6) Es gibt (sehr viele) (reelle) Vektorräume, deren Basen unendlich sind. Wir haben uns auf ein Bsp. beschränkt, nämlich P (Bsp. 9, Seite 19).