3. Matrizen und lineare Abbildungen

Def.: Es seien $m,n \in \mathbb{N}^+$. Unter einer $m\times n$-Matrix A (mit reellen Eintragungen) versteht man ein „rechteckiges Schema von (reellen) Zahlen" $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (mit $1\le i\le m$, $1\le j\le n$) der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Die Menge aller $m\times n$-Matrizen mit reellen Eintragungen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Bemerkung: Formal sauberer, aber weniger anschaulich kann man eine $m\times n$-Matrix als eine Abbildung $\{1,..,m\}\times\{1,..,n\} \to \mathbb{R}$, $(i,j)\mapsto a_{ij}$ definieren.

Definition: Sind $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so definiert man ihre Summe als

$A + B := (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Ist $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\alpha\in\mathbb{R}$, so definiert man $\alpha A := (\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, d.h.

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Bsp.: $\begin{pmatrix}3&0&-1\\4&1&5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&-1&3\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&-1&2\\5&2&5\end{pmatrix}$, $3\cdot\begin{pmatrix}3&0&-1\\4&1&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&0&-3\\12&3&15\end{pmatrix}$

Satz 17 Für alle $m,n\in\mathbb{N}^+$ ist $\mathbb{R}^{m\times n}$, versehen mit den oben eingeführten Verknüpfungen ein reeller Vektorraum.
Nullvektor dieses Vektorraums ist die Nullmatrix $O = (0)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$, bei der alle Eintragungen $0\in\mathbb{R}$ sind.
Additives Inverses zu $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ ist $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix}-a_{11}&\cdots&-a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\-a_{m1}&\cdots&-a_{mn}\end{pmatrix}$.

Beweis: Übung

Satz 18 Für $m,n\in\mathbb{N}^+$ ist $\{E_{ij} \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^{m\times n}$.
Dabei sei $E_{ij}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ folgendermaßen definiert: Ist $E_{ij} = (\varepsilon_{kl})_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}}$, so ist
$\varepsilon_{kl} = \begin{cases}1 & \text{falls } (k,l)=(i,j),\\ 0 & \text{falls } (k,l)\ne(i,j),\end{cases}$ d.h. E_{ij} hat in der i-ten Zeile, j-ten Spalte als Eintragung $1\in\mathbb{R}$ und sonst lauter Nullen.

Beweis: Übung

Bsp.: Für $m=n=2$ ist $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

8.4.2024

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Def.: Man ordnet der Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

die folgende transponierte Matrix zu:

$$A^T = (a_{ij})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Bemerkung: Transponieren ist eine Abbildung $\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$.

Bsp.: Ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, so ist $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Lemma 19 Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Beweis: Übung

Def.: Zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le l}} \in \mathbb{R}^{n\times l}$ ordnet man ihr

Produkt $A\cdot B = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le l}} \in \mathbb{R}^{m\times l}$, wobei $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$, zu.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \ \cdots \ a_{in}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen: 1) Die Matrizenmultiplikation ist eine Abbildung $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times l} \to \mathbb{R}^{m\times l}$.

2) Hat man wenig Übung, hilft es, die Matrizen bei der Multiplikation so anzuschreiben:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1k}} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nk}} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

<u>Bspe</u> 1) Sind $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, so sind

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot(-1) + 5\cdot 2 & 2\cdot 4 + 1\cdot 2 + 5\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 & 1\cdot 4 + 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

aber, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \\ 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

2) Sind $A = (1\ 2\ 3) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, so sind

$$A \cdot B = (1\ 2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 5 = 16 \in \mathbb{R}^{1\times 1}\ (=\mathbb{R})$$

aber $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

<u>Satz 20</u> Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ und $C \in \mathbb{R}^{r\times s}$. Dann ist $(A\cdot B)\cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

<u>Beweis</u>: Sind $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le r}}$ und $C = (c_{kl})_{\substack{1\le k\le r \\ 1\le l\le s}}$, so sind

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le r}} \quad \text{und} \quad B \cdot C = \left(\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le l\le s}} \quad \text{und daher}$$

$$(A\cdot B)\cdot C = \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} \right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le l\le s}} = \left(\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le l\le s}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le l\le s}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl} \right) \right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le l\le s}} = A \cdot (B \cdot C).$$

Satz 21 (i) Sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B, C \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, so ist $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$,

(ii) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, so ist $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

Beweis: (i) Sind $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le \ell}}$ und $C = (c_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le \ell}}$, so ist

$$A\cdot(B+C) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le \ell}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le \ell}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le \ell}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le \ell}} = A\cdot B + A\cdot C$$

(ii) Analog (Übung)

Notation: Für $n \in \mathbb{N}^+$ wird die Matrix $I_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ als Einheitsmatrix bezeichnet.

Satz 22 Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so gelten $A\cdot I_n = A$ und $I_m\cdot A = A$.

Beweis: Ist $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, so ist

$$A\cdot I_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = A.$$

Beweis der zweiten Aussage analog (Übung).

Korollar 23 Für $n \in \mathbb{N}^+$ ist $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement, d.h.

(1) $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe,

(2.1) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (Assoziativität der Multiplikation)

(2.2) $I_n\cdot A = A\cdot I_n = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (Existenz des Einselements)

$$\left.\begin{array}{ll} (3.1)\ A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C & \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}\\ (3.2)\ (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C & \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}\end{array}\right\}\ \text{(Distributivgesetze)}$$

Für $n \ge 2$ ist die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ.

Beweis: (1) ist Satz 17 enthalten, (2.1) folgt aus Satz 20, (2.2) folgt aus Satz 22, (3.1) und (3.2) folgen aus Satz 21. Für $n \ge 2$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Für $n=1$ ist $(\mathbb{R}^{1\times 1}, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper.

Lemma 24 Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $(\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B) = \alpha(A\cdot B)$

Beweis: Übung

Satz 25 Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, so ist $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Beweis: Sind $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le l}}$, so ist $A\cdot B = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le l}}$,

$A^T = (a_{ij})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$ und $B^T = (b_{jk})_{\substack{1\le k\le l\\ 1\le j\le n}}$ und daher

$$(A\cdot B)^T = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{1\le k\le l\\ 1\le i\le m}} = \left(\sum_{j=1}^n b_{jk}a_{ij}\right)_{\substack{1\le k\le l\\ 1\le i\le m}} = B^T\cdot A^T.$$

Def.: Eine Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt invertierbar (oder nichtsingulär) wenn sie ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt, d.h. wenn $\exists A^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}: A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist invertierbar und $A^{-1} = \begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}$ denn

$$\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2.$$

Bemerkung: Für $n\ge 2$ besitzt nicht jede Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}$ ein multiplikatives Inverses. Ist z.B.

$$S = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 0 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$ und $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig, so ist

$$S\cdot A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \ne I_n.$$

9.4.2024

Satz 26 Es sei $GL_n(\mathbb{R}) := \{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$. Dann ist $(GL_n(\mathbb{R}),\cdot)$ eine Gruppe, die als General Linear Group bezeichnet wird. Für $n\ge 2$ ist diese Gruppe nicht abelsch.

Beweis: $GL_n(\mathbb{R})\ne\emptyset$ da $I_n\in GL_n(\mathbb{R})$ (wegen $I_n^2 = I_n$, d.h. $I_n^{-1} = I_n$).
Sind $A,B\in GL_n(\mathbb{R})$, so ist auch $A\cdot B\in GL_n(\mathbb{R})$, da $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.
Assoziativität gilt wegen Satz 20, neutrales Element ist I_n (nach Satz 22) und inverse Elemente existieren nach Def. Für $n\ge 2$ betrachte

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & & 0\\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots\; 1\end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix}1 & 0 & & 0\\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots\; 1\end{pmatrix}.$$ Dann $A,B\in GL_n(\mathbb{R})$, denn

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ aber}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung</u>: Für $n=1$ ist $(GL_1(\mathbb{R}), \cdot) = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

<u>Satz 27</u> Äquivalent sind:

(i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist invertierbar (d.h. $A \in GL_2(\mathbb{R})$),

(ii) $ad - bc \neq 0$.

Ist eine dieser beiden Bedingungen (und damit beide) erfüllt, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, gibt es $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 1 = 1\cdot 1 - 0 \cdot 0 &= (ax+bu)(cy+dv) - (ay+bv)(cx+du) \\ &= \cancel{acxy} + bcyu + adxv + \cancel{bduv} - \cancel{acxy} - bcxv - adyu - \cancel{bduv} \\ &= bcyu + adxv - bcxv - adyu = (ad-bc)(xv-yu) \end{aligned}$$

und daher $ad - bc \neq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Folgt aus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Korollar 28</u> Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

<u>Beweis</u>: Aus $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I_n$ folgt $(A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I_n^T = I_n$ und daher (wegen Satz 25) $(A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = I_n$. Also ist A^T invertierbar und (wegen der Eindeutigkeit des Inversen) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

<u>Definition</u>: Es seien V und W zwei reelle Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt ($\mathbb{R}$-) linear (oder Vektorraumhomomorphismus) wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1) $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) \quad \forall v, w \in V$,

2) $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$.

Lemma 29 Es seien V und W zwei reelle Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gelten:

(i) $\varphi(0) = 0$ (genauer $\varphi(0_V) = 0_W$),

(ii) $\varphi(-v) = -\varphi(v) \quad \forall v \in V$.

Beweis: (i) $\varphi(0) \overset{\text{Lemma 7}}{=} \varphi(0 \cdot 0) = 0 \cdot \varphi(0) \overset{\text{Lemma 7}}{=} 0$

(ii) $\varphi(-v) \overset{\text{Lemma 7}}{=} \varphi((-1)v) = (-1)\varphi(v) \overset{\text{Lemma 7}}{=} -\varphi(v)$

Satz 30 Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Äquivalent sind:

(i) φ ist linear,

(ii) Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sodass $\varphi(v) = A \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Für $1 \le j \le n$ sei $\varphi(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ist $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot v$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\varphi(v+w) = A\cdot(v+w) \overset{\text{Satz 21}}{=} A\cdot v + A\cdot w = \varphi(v) + \varphi(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ und

$\varphi(\alpha v) = A\cdot(\alpha v) \overset{\text{Lemma 24}}{=} \alpha\cdot(A\cdot v) = \alpha\varphi(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v \in \mathbb{R}^n$

Bspe.: 1) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ -x \quad + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist linear

2) Ist V ein reeller Vektorraum, so ist $id_V: V \to V$, $id_V(v) = v \quad \forall v \in V$ linear

3) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall, $V = \{f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$ und W der Raum aller Funktionen $I \to \mathbb{R}$, so ist die Ableitung $\delta: V \to W$, $\delta(f) = f'$ eine lineare Abbildung.

4) Ebenso ist die Abbildung $\delta: P_n \to P_{n-1}$, $\delta(p) = p'$ für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ linear

(d.h. $\delta\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$).

5) Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein (abgeschlossenes) Intervall und $V = \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}$, so ist das Integral $\varphi: V \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ eine lineare Abbildung.

6) Sind V und W reelle Vektorräume, so ist $\varphi: V \to W$, $\varphi(v) = 0 \quad \forall v \in V$ linear

Lemma 31 (i) Es seien U, V und W drei reelle Vektorräume und $\varphi: U \to V$ und $\psi: V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist auch $\psi \circ \varphi: U \to W$ eine lineare Abbildung

(ii) Sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ und die linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\psi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ gegeben durch $\varphi(v) = A\cdot v$ und $\psi(w) = B\cdot w$, so ist $\psi\circ\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ gegeben durch $(\psi\circ\varphi)(v) = (B\cdot A)\cdot v$.

Beweis: (i) Für $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$(\psi \circ \varphi)(v+w) = \psi(\varphi(v+w)) = \psi(\varphi(v)+\varphi(w)) = \psi(\varphi(v)) + \psi(\varphi(w)) = (\psi\circ\varphi)(v) + (\psi\circ\varphi)(w)$

und $(\psi\circ\varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha\varphi(v)) = \alpha\psi(\varphi(v)) = \alpha(\psi\circ\varphi)(v)$

(ii) $(\psi\circ\varphi)(v) = \psi(\varphi(v)) = B\cdot(A\cdot v) = (B\cdot A)\cdot v$.

Def.: Es seien V und W zwei reelle Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\ker\varphi = \{v\in V \mid \varphi(v) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\}) \text{ den Kern von } \varphi$$

und

$$\operatorname{Bild}\varphi = \{\varphi(v) \mid v\in V\} = \varphi(V) \text{ das Bild von } \varphi.$$

Satz 32 Es seien V und W zwei reelle Vektorräume und $\varphi: V\to W$ eine lineare Abbildung. Dann gelten:

(i) $\ker\varphi$ ist ein Teilraum von V,

(ii) $\operatorname{Bild}\varphi$ ist ein Teilraum von W.

Beweis: (i) Sind $v, w \in \ker\varphi$, so $\varphi(v) = \varphi(w) = 0$ und $\varphi(v+w) = \varphi(v)+\varphi(w) = 0$ und $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha\cdot 0 = 0 \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$.

(ii) Sind $v, w\in V$, so ist $\varphi(v)+\varphi(w) = \varphi(v+w) \in \varphi(V)$ und $\alpha\varphi(v) = \varphi(\alpha v) \in \varphi(V) \;\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Satz 33 Es seien V und W zwei reelle Vektorräume und $\varphi: V\to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist injektiv,

(ii) $\ker\varphi = \{0\}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Wegen Lemma 29 (i) ist $\{0\}\subseteq\ker\varphi$. Wäre $\{0\}\subsetneq\ker\varphi$, so würde es einen Vektor $v\in V\setminus\{0\}$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = 0$ geben und φ wäre nicht injektiv.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wenn $\varphi(v) = \varphi(w)$ dann $\varphi(v-w) = \varphi(v)-\varphi(w) = 0$, woraus $v - w = 0$ und daher $v = w$ folgt.

10.4.2024

Bsp.: 1) Sind $a, b\in\mathbb{R}$ und $\varphi: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\varphi\binom{x}{y} = ax+by$, so ist $\ker\varphi = \left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax+by = 0\right\}$ (d.h. $\ker\varphi = \mathbb{R}^2$ falls $a=b=0$ und $\ker\varphi$ ist eine Gerade durch den Nullpunkt falls $a\neq 0 \vee b\neq 0$) und $\operatorname{Bild}\varphi = \{0\}$ falls $a=b=0$ bzw. $\operatorname{Bild}\varphi = \mathbb{R}$ falls $a\neq 0\vee b\neq 0$. (Falls $a\neq 0$, so $\varphi\binom{x/a}{0} = x \;\forall x\in\mathbb{R}$, falls $b\neq 0$, so $\varphi\binom{0}{y/b} = y \;\forall y\in\mathbb{R}$.)

2) Ist $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\varphi\binom{x}{y} = A\cdot\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\binom{x}{y}$, so ist $\ker\varphi = \left\{\binom{0}{0}\right\}$ (denn $\varphi\binom{x}{y} = \binom{0}{0} \Rightarrow A\binom{x}{y} = \binom{0}{0} \Rightarrow \binom{x}{y} = A^{-1}\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$) und $\operatorname{Bild}\varphi = \mathbb{R}^2$. (Für $\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2$ ist $\varphi\left(A^{-1}\binom{x}{y}\right) = A\cdot A^{-1}\cdot\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$.)

3) Es sei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Fasst man die Koeffizienten des (homogenen) linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \text{ zur Matrix } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ zusammen,}$$

so kann man das Gleichungssystem als $A \cdot x = o$ schreiben (wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$) und die Menge seiner Lösungen ist der Kern der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(x) = A \cdot x$.

4) Bezeichnet $\delta : P_n \to P_{n-1}$, $\delta(p) = p'$ (mit $n \in \mathbb{N}^+$) wieder die Ableitung, so ist $\ker \delta = P_0$ und $\text{Bild}\, \delta = P_{n-1}$ (denn $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}\right)$).

Satz 34: (i) Sind V und W zwei reelle Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung, so ist auch ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : W \to V$ eine bijektive lineare Abbildung.

(ii) Ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(v) = A \cdot v$ (mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) bijektiv, so ist $A \in GL_n(\mathbb{R})$ und $\varphi^{-1}(v) = A^{-1} \cdot v$.

Beweis: (i) $\varphi^{-1} : W \to V$ ist klarerweise ebenfalls bijektiv, zu zeigen bleibt die Linearität: Sind $w_1, w_2 \in W$, so gibt es eindeutig bestimmte $v_1, v_2 \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$ (und daher $\varphi^{-1}(w_1) = v_1$ und $\varphi^{-1}(w_2) = v_2$). Es folgt

$$\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2).$$

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $w \in W$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $v \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = w$ (und daher $\varphi^{-1}(w) = v$). Es folgt

$$\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha \varphi^{-1}(w).$$

(ii) Nach Satz 30 gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $\varphi^{-1}(v) = B \cdot v \ \forall v \in \mathbb{R}^n$. Daher ist $(B \cdot A) \cdot v = B(Av) = \varphi^{-1}(\varphi(v)) = v = I_n \cdot v$. Da das für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, muss $B \cdot A = I_n$ gelten. (Setzt man $v = e_i$, so erhält man, dass die i-te Spalte von $B \cdot A$ mit $I_n \cdot e_i = e_i$ übereinstimmen muss.) Völlig analog zeigt man $A \cdot B = I_n$.