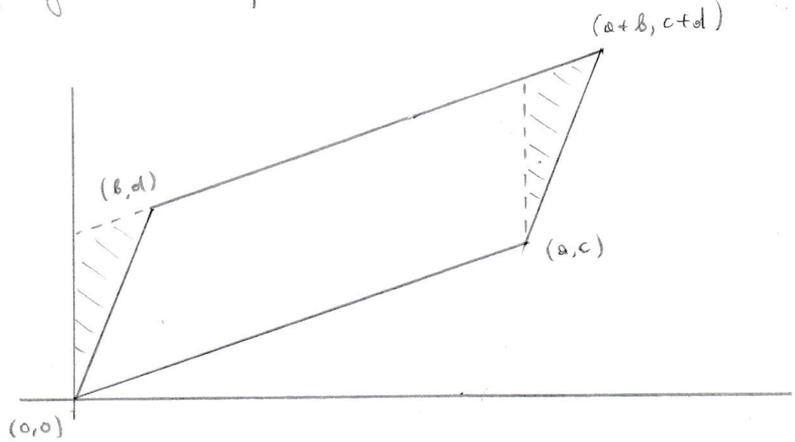
4. Determinanten

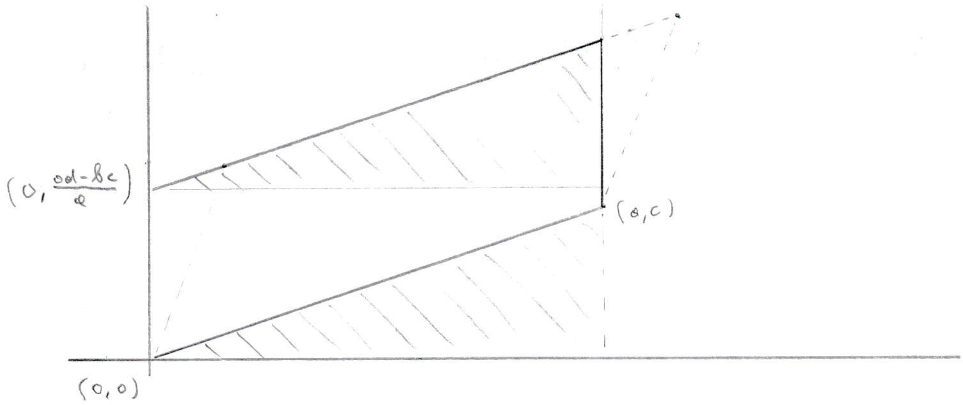
Def.: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert man ihre Determinante als $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$.

Bemerkungen: 1) Solche Determinanten sind bereits aufgetreten, z.B. in Kor 14 und Satz 27.

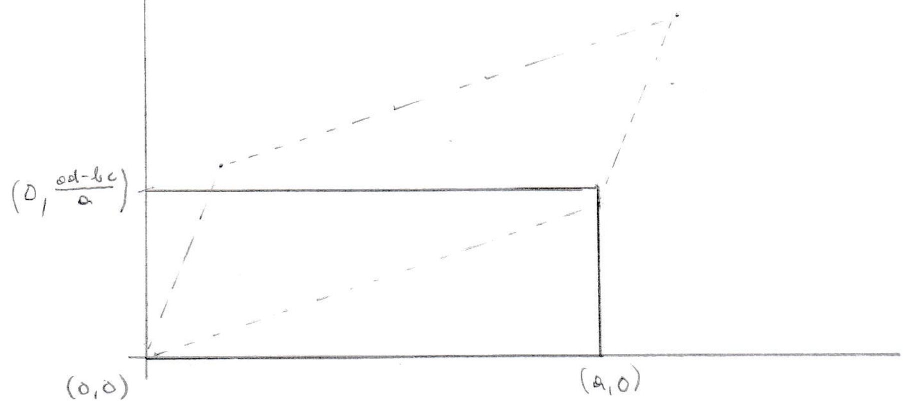
2) Man kann die Determinante einer 2×2-Matrix als (orientierten) Flächeninhalt des folgenden Parallelogramms interpretieren:



Um uns davon zu überzeugen, bewegen wir zunächst das schraffierte Dreieck von rechts nach links:



Die Gerade durch die Punkte (b,d) und $(a+b, c+d)$ hat die Gleichung $y = \frac{c}{a}x + \frac{ad-bc}{a}$. Daraus ergibt sich der neue Punkt auf der y-Achse. Im zweiten Schritt wird das obere schraffierte Dreieck nach unten bewegt.



Man erhält ein Rechteck, das denselben Flächeninhalt hat wie das ursprüngliche Parallelogramm. Es hat Seitenlängen a und $\frac{ad-bc}{a}$ und somit Flächeninhalt $a \cdot \frac{ad-bc}{a} = ad-bc$.

Diese Argumentation hat einige Schwächen. Z.B. müsste man sie adaptieren wenn $a=0$ ist oder die Form des Parallelograms so ist, dass man es nicht so leicht zerlegen und zu einem Rechteck zusammensetzen kann. Interessanter für uns ist, dass die Determinante nicht positiv zu sein braucht. Oben wurde das Parallelogramm so gezeichnet, dass das nicht auftritt, vertauscht man die Vektoren $\binom{a}{c}$ und $\binom{b}{d}$ aber, so ist

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$ d.h. man erhält genau genommen einen Flächeninhalt mit Vorzeichen.

<u>Lemma 35</u> $\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

<u>Beweis:</u> $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

<u>Satz 36</u> Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so ist $\det A^T = \det A$.

<u>Beweis:</u> Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist $\det A^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det A$

<u>Satz 37</u> (i) Die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ ist linear in beiden Spalten,

(ii) Die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ ist linear in beiden Zeilen

<u>Beweis:</u> (i) Wir zeigen die Linearität in der ersten Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b \\ c_1+c_2 & d \end{vmatrix} = (a_1+a_2)d - b(c_1+c_2) = (a_1 d - b c_1) + (a_2 d - b c_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$ und

$$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = (\alpha a)d - b(\alpha c) = \alpha(ad - bc) = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Die Linearität in der zweiten Spalte zeigt man analog.

(ii) Folgt aus (i) und Satz 36. So gilt Linearität in der ersten Zeile, da

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 36}}{=} \begin{vmatrix} a_1+a_2 & c \\ b_1+b_2 & d \end{vmatrix} \overset{(i)}{=} \begin{vmatrix} a_1 & c \\ b_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & c \\ b_2 & d \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 36}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{vmatrix}$$

und $\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 36}}{=} \begin{vmatrix} \alpha a & c \\ \alpha b & d \end{vmatrix} \overset{(i)}{=} \alpha \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 36}}{=} \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Der Beweis für die zweite Zeile verläuft analog.

<u>Satz 38</u> Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\det A = 0$,

(ii) Die beiden Spalten von A sind gleich oder l.a.,

(iii) Die beiden Zeilen von A sind gleich oder l.a.,

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Falls die beiden Spalten gleich sind, sind wir fertig. Sind sie nicht gleich, so folgt ihre lineare Abhängigkeit aus der Implikation Kor. 14 (ii) $\Rightarrow$ (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Falls $\binom{a}{c} = \binom{b}{d}$, so $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$. Falls $\binom{a}{c} \neq \binom{b}{d}$, folgt die Beh. aus der Implikation Kor. 14 (i) $\Rightarrow$ (ii).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\det A = 0 \overset{\text{Satz 36}}{\Longleftrightarrow} \det A^T = 0 \Longleftrightarrow$ die beiden Spalten von A^T sind gleich oder l.a. $\Longleftrightarrow$ die beiden Zeilen von A sind gleich oder l.a.

15.4.2024

Satz 39 (i) Vertauscht man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die beiden Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante,
(ii) Vertauscht man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die beiden Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Beweis: (i) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad-bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(ii) Folgt aus (i) und Satz 36

Satz 40 (i) Addiert man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ das Vielfache einer Spalte zur anderen, so ändert sich die Determinante nicht.
(ii) Addiert man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ das Vielfache einer Zeile zur anderen, so ändert sich die Determinante nicht.

Beweis: (i) Wir behandeln zuerst den Fall, dass ein Vielfaches der zweiten Spalte zur ersten Spalte addiert wird: $\begin{vmatrix} a+\alpha b & b \\ c+\alpha d & d \end{vmatrix} = (a+\alpha b)d - b(c+\alpha d) = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Daraus und aus Satz 39 (i) folgt der Fall, dass ein Vielfaches der ersten Spalte zur zweiten Spalte addiert wird: $\begin{vmatrix} a & b+\alpha a \\ c & d+\alpha c \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 39 (i)}}{=} -\begin{vmatrix} b+\alpha a & a \\ d+\alpha c & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 39 (i)}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(ii) Folgt aus (i) und Satz 36

Satz 41 Sind $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so ist $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$.

Beweis: Diese Rechnung wurde bereits im Beweis von Satz 27 durchgeführt.
Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, so ist $A\cdot B = \begin{pmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{pmatrix}$ und daher

$$\begin{aligned} \det(A\cdot B) &= (ax+bu)(cy+dv) - (ay+bv)(cx+du) \\ &= \cancel{acxy} + bcyu + adxv + \cancel{bduv} - \cancel{acxy} - bcxv - adyu - \cancel{bduv} \\ &= bcyu + adxv - bcxv - adyu = (ad-bc)(xv-yu) = (\det A)\cdot(\det B) \end{aligned}$$

Korollar 42 Ist $A \in GL_2(\mathbb{R})$, so ist $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Beweis: $1 = \det I_2 = \det(A\cdot A^{-1}) = (\det A)\cdot(\det A^{-1})$

Bemerkung: Wir haben bereits in Satz 27 bewiesen: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar wenn $\det A \neq 0$.

Def.: Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert man ihre Determinante als

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Bemerkungen: 1) Ähnlich wie bei 2×2-Determinanten kann man sich überlegen, dass $\det A$ dem Volumen eines Parallelepipeds entspricht, das von den drei Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird - mit einem Vorzeichen, das von der Reihenfolge der Vektoren abhängt.

2) Die Berechnung kann man mit Hilfe der Regel von SARRUS vornehmen: Analog zu Berechnung von 2×2-Matrizen gemäß $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ besagt sie

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Bsp.:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{array} = 2\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 4\cdot 0\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 0\cdot 2$$
$$= 12 - 1 + 12 - 4 = 19$$

Def.: Für $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $k,l \in \{1,\dots,n\}$ bezeichne A_{kl} die Matrix, die man aus A durch Streichen der k-ten Zeile und l-ten Spalte erhält.

Satz 43 Es sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann gelten:

(i) $\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + (-1)^{i+3} a_{i3} \det A_{i3}$

für jedes $i \in \{1,2,3\}$ (Entwicklung nach der i-ten Zeile)

(ii) $\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + (-1)^{3+j} a_{3j} \det A_{3j}$

für jedes $j \in \{1,2,3\}$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte).

Beweis: Wir überprüfen nur die Entwicklung nach der ersten Zeile:

$(-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{12} \det A_{12} + (-1)^4 a_{13} \det A_{13}$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \det A$$

Die restlichen Behauptungen kann man analog überprüfen.

Bsp.: Wir berechnen die obige 3×3-Determinante nochmals mittels Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - (-11) = 8 + 11 = 19$$

und Entwicklung nach der zweiten Zeile

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 5 = 24 - 5 = 19$$

Bemerkungen: 1) Die Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ bestimmt man mit Hilfe des „Schachbrettmusters"

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

2) Es spart Arbeit, nach einer Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen zu entwickeln.

3) Man kann Determinanten für $n \times n$-Matrizen beliebiger Größe definieren. Das Analogon der Regel von Sarrus ist dabei allerdings falsch. Die Entwicklung nach Zeilen und Spalten kann aber verallgemeinert werden.

Lemma 44 $\det I_3 = 1$

Beweis: Folgt sofort aus der Def.

Satz 45 Ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so ist $\det A^T = \det A$.

Beweis: Folgt einfach aus der Def.

Satz 46 (i) Die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ ist linear in jeder Spalte,

(ii) Die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ ist linear in jeder Zeile.

Beweis: (i) Wir zeigen die Linearität in der ersten Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{11}') \det A_{11} - (a_{21}+a_{21}') \det A_{21} + (a_{31}+a_{31}') \det A_{31}$$

$$= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} + a_{11}' \det A_{11} - a_{21}' \det A_{21} + a_{31}' \det A_{31}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (\alpha a_{11}) \det A_{11} - (\alpha a_{21}) \det A_{21} + (\alpha a_{31}) \det A_{31}$$

$$= \alpha \left(a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} \right) = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die Linearität in der zweiten und dritten Spalte kann man analog zeigen.

(ii) Folgt aus (i) und Satz 45.

<u>Satz 47</u> Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\det A = 0$,

(ii) Die Spalten von A sind l.a. oder (mindestens) zwei davon sind gleich,

(iii) Die Zeilen von A sind l.a. oder (mindestens) zwei davon sind gleich 16.4.2024

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Diese Implikation ist mit unseren (elementaren) Mitteln nur mühsam zu beweisen und wir skizzieren sie nur. Z.B. ist

$$\det A_{31} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} - \det A_{32} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + \det A_{33} \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Die ersten beiden Komponenten kann man unschwer nachrechnen. Die dritte Komponente folgt aus $0 = \det A = a_{31} \cdot \det A_{31} - a_{32} \cdot \det A_{32} + a_{33} \cdot \det A_{33}$.) Ist eine der drei Determinanten $\det A_{31}$, $\det A_{32}$ und $\det A_{33}$ nicht $= 0$, so ist die Beh. bewiesen.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sind die zweite und dritte Spalte von A gleich, so gilt $\det A_{11} = \det A_{21} = \det A_{31} = 0$ und daher $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} = 0$.

Sind zwei andere Spalten von A gleich, so zeigt man die Beh. analog.

Sind die drei Spalten paarweise verschieden und l.a., so kann man (wegen Satz 12) eine der drei Spalten als Linearkombination der beiden anderen schreiben.

Ist etwa $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ für gewisse $s, t \in \mathbb{R}$, so

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sa_{12}+ta_{13} & a_{12} & a_{13} \\ sa_{22}+ta_{23} & a_{22} & a_{23} \\ sa_{32}+ta_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 46 (i)}}{=} s \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Kann man die zweite oder dritte Spalte als Linearkombination der beiden anderen schreiben, so zeigt man die Beh. analog.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Folgt aus der Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und Satz 45.

<u>Satz 48</u> (i) Vertauscht man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante,

(ii) Vertauscht man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zwei Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

<u>Beweis</u>: (i) Wir überprüfen den Fall, bei dem die zweite und dritte Spalte vertauscht werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die anderen beiden Fälle überprüft man analog.

(ii) Folgt aus (i) und Satz 45.

<u>Korollar 49</u> (i) Vertauscht man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die drei Spalten zyklisch, so bleibt die Determinante gleich,

(ii) Vertauscht man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die drei Zeilen zyklisch, so bleibt die Determinante gleich.

<u>Beweis</u>: (i) Es ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Die andere zyklische Vertauschung überprüft man analog.

(ii) Folgt aus (i) und Satz 45

<u>Satz 50</u> (i) Addiert man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ das Vielfache einer Spalte zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht,

(ii) Addiert man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ das Vielfache einer Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.

<u>Beweis</u>: Analog zum Beweis von Satz 40.

<u>Bemerkung</u>: Man kann Satz 50 benutzen, um Determinanten zu berechnen, z.B.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2\cdot(-1) & 1+2\cdot 2 & 4+2\cdot 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{Entwicklung nach der 1. Spalte}) = -\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5-24) = 19$$

<u>Satz 51</u> Sind $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so ist $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$

<u>Beweis</u>: Analog zum Beweis von Satz 41.

<u>Satz 52</u> Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar,

(ii) $\det A \neq 0$.

Ist eine (und damit beide) dieser Bedingungen erfüllt, so ist $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) $1 = \det I_3 = \det(A\cdot A^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$ und daher $\det A \neq 0$ und $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Man kann einfach (aber etwas mühsam) überprüfen, dass

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix}$$

Beachte, dass die Eintragungen an der „gespiegelten" Stelle stehen, d.h. in der i-ten Zeile und j-ten Spalte steht $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$.