5. Lineare Gleichungssysteme

Es seien $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (mit $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) und $b_i \in \mathbb{R}$ (mit $1 \le i \le m$). Wir suchen die Menge aller Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ des (inhomogenen) linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Fasst man die dabei auftretenden Größen

zur Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und

den Vektoren $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ zusammen, so kann man das

lineare Gleichungssystem als $A \cdot x = b$ schreiben. Ist $b = 0$ (d.h. $A \cdot x = 0$) so wird es als homogenes Gleichungssystem bezeichnet, ist $b \neq 0$ als inhomogenes Gleichungssystem.

<u>Bemerkung</u>: Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem kann unlösbar sein, eindeutig lösbar sein oder unendlich viele Lösungen besitzen:

$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{array}\right\}$ ist unlösbar, da die Gleichungen einander widersprechen (aus $x+y=1$ folgt ja $2x+2y=2$)

22.4.2024

$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ ist eindeutig lösbar und $x=y=1$ (Addition der Gleichungen liefert $2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$)

$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{array}\right\}$ besitzt unendlich viele Lösungen $\left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$ ist Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$, da $(1-t)+t=1$ und $2(1-t)+2t=2$, ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Lösung, so ist $x = 1-y$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ y \end{pmatrix}$)

Ein homogenes lineares Gleichungssystem ist stets lösbar, da $x_1 = \dots = x_n = 0$ eine Lösung ist. Es kann aber eindeutig lösbar sein oder unendlich viele Lösungen besitzen. z.B. ist

$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ eindeutig lösbar (mit $x=y=0$) und $\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{array}\right\}$ besitzt unendlich viele Lösung $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Lemma 53 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(i) Die Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x = \sigma$ bilden einen Teilraum des $\mathbb{R}^n$,

(ii) Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ beides Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x = b$, so ist $x_1 - x_2 \in \mathbb{R}^n$ Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x = \sigma$,

(iii) Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x = b$ und $v \in \mathbb{R}^n$ Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x = \sigma$, so ist $x_0 + v \in \mathbb{R}^n$ Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x = b$.

Beweis: (i) Wurde bereits bewiesen (Bsp. 3) auf Seite 29)

(ii) $A\cdot x_1 = A\cdot x_2 = b \Rightarrow A\cdot(x_1 - x_2) = A\cdot x_1 - A\cdot x_2 = b - b = \sigma$

(iii) $A\cdot x_0 = b$ und $A\cdot v = \sigma \Rightarrow A\cdot(x_0 + v) = A\cdot x_0 + A\cdot v = b + \sigma = b$

Satz 54 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x = b$ und $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ $(\subseteq \mathbb{R}^n)$ eine Basis des Raums aller Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x = \sigma$ (und $B = \emptyset$ falls $A\cdot x = \sigma$ nur die Lösung $x = \sigma$ besitzt), so ist $\{x_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x = b$.

Beweis: Aus $A x_0 = b$ und $A\cdot v_i = \sigma$ $(1 \le i \le k)$ folgt

$$A\cdot\left(x_0 + \sum_{i=1}^k t_i v_i\right) = A\cdot x_0 + \sum_{i=1}^k t_i\, A\cdot v_i = b + \sum_{i=1}^k t_i \cdot \sigma = b \quad \text{für } t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \text{ bel.},$$

d.h. $x_0 + \sum_{i=1}^k t_i v_i$ ist Lösung von $A\cdot x = b$ für $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ bel.

Ist $x_1 \in \mathbb{R}^n$ Lösung von $A\cdot x = b$, so ist $x_1 - x_0$ Lösung von $A\cdot x = \sigma$ nach Lemma 53 (ii). Daher gibt es $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$, sodass $x_1 - x_0 = \sum_{i=1}^k t_i v_i$ und $x_1 = x_0 + \sum_{i=1}^k t_i v_i$.

Gaußsches Eliminationsverfahren: Gegeben sei wieder ein lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad --- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad \text{mit } a_{ij} \in \mathbb{R}\ (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \text{ und } b_i \in \mathbb{R}\ (1 \le i \le m)$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist ein Algorithmus, der entscheidet, ob das Gleichungssystem lösbar ist und im Fall der Lösbarkeit eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems sowie eine Basis für den Raum der Lösungen des homogenen Gleichungssystems liefert.

1. Schritt Falls $a_{ij}=0 \;\forall (i,j)\in\{1,..,m\}\times\{1,..,n\}$: Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar wenn $b_1=\dots=b_m=0$. In diesem Fall ist jedes $x\in\mathbb{R}^n$ Lösung.

Falls $\exists (i,j)\in\{1,..,m\}\times\{1,..,n\}: a_{ij}\neq 0$ aber $a_{11}=0$: Vertausche Gleichungen und/oder Reihenfolge der $x_1,..,x_n$ bis links oben eine Eintragung $\neq 0$ steht.

| Wir verwenden im folgenden immer die gleichen Bezeichnungen, auch wenn sich die Werte der Koeffizienten und die Reihenfolge der x_i stets ändern kann. |

Ersetze die 2. bis m-te Gleichung durch:

$$a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n-\frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n)=b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n-\frac{a_{m1}}{a_{11}}(a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n)=b_m-\frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1$$

Danach erhält man ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\left.\begin{array}{rl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots\qquad\qquad & \vdots\\ a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\dots+a_{mn}x_n &= b_m \end{array}\right\}\quad \text{mit } a_{11}\neq 0$$

(p+1)-ter Schritt Nach p Schritten haben wir ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\left.\begin{array}{rl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{22}x_2+\dots\dots+a_{2n}x_n &= b_2\\ \ddots\qquad & \vdots\\ a_{pp}x_p+a_{p,p+1}x_{p+1}+\dots+a_{pn}x_n &= b_p\\ a_{p+1,p+1}x_{p+1}+\dots+a_{p+1,n}x_n &= b_{p+1}\\ \vdots\qquad & \vdots\\ a_{m,p+1}x_{p+1}+\dots+a_{mn}x_n &= b_m \end{array}\right\}$$

mit $a_{11}\neq 0, a_{22}\neq 0,..,a_{pp}\neq 0$ erhalten.

Falls $a_{ij}=0$ für $p+1\leq i\leq m, p+1\leq j\leq n$, so setze $r:=p$ und gehe zum $(r+1)$-ten (und letzten) Schritt.

Falls $\exists (i,j)\in\{p+1,..,m\}\times\{p+1,..,n\}: a_{ij}\neq 0$ aber $a_{p+1,p+1}=0$. Vertausche die $m-p$ letzten Gleichungen und/oder die Reihenfolge von $x_{p+1},..,x_n$ bis an der Stelle mit Indizes $p+1,p+1$ ein Koeffizient $\neq 0$ steht.

Ersetze die $(p+2)$-te bis m-te Gleichung durch:

$$a_{p+2,p+1}x_{p+1}+\dots+a_{p+2,n}x_n-\frac{a_{p+2,p+1}}{a_{p+1,p+1}}(a_{p+1,p+1}x_{p+1}+\dots+a_{p+1,n}x_n)=b_{p+2}-\frac{a_{p+2,p+1}}{a_{p+1,p+1}}b_{p+1}$$
$$\vdots$$
$$a_{m,p+1}x_{p+1}+\dots+a_{mn}x_n-\frac{a_{m,p+1}}{a_{p+1,p+1}}(a_{p+1,p+1}x_{p+1}+\dots+a_{p+1,n}x_n)=b_m-\frac{a_{m,p+1}}{a_{p+1,p+1}}b_{p+1}$$

23.4.2024

$(r+1)$-ter (und letzter) Schritt Nach r Schritten haben wir ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m \end{array}\right\}$$

mit $a_{11} \neq 0, \ldots, a_{rr} \neq 0$ erhalten. (Es ist dabei möglich, dass $r = m$ ist und die Gleichungen $0 = b_{r+1}, \ldots, 0 = b_m$ nicht auftreten.)

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar wenn $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$. In diesem Fall gehe folgendermaßen vor:

Für eine spezielle Lösung $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ des inhomogenen Systems setze $x_r = \frac{b_r}{a_{rr}}$ und $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$. Danach findet man der Reihe nach $x_{r-1}, \ldots, x_1$ durch einsetzen in der jeweils nächsthöheren Gleichung.

Für eine Basis $v_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, v_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{n-r,1} \\ \vdots \\ x_{n-r,n} \end{pmatrix}$ des Raums der Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

setze $x_{1,r+1} = 1$ und $x_{1,r+2} = \cdots = x_{1n} = 0$. Daraus ergibt sich $x_{1,r} = -\frac{a_{r,r+1}}{a_{rr}}$

Danach findet man der Reihe nach $x_{1,r-1}, \ldots, x_{11}$ durch einsetzen in die nächsthöhere Gleichung und erhält so v_1.

Für v_2 setze $x_{2,r+1} = 0$, $x_{2,r+2} = 1$ und $x_{2,r+3} = \cdots = x_{2n} = 0$ und verfahre analog.

Verfahre weiter so bis v_{n-r}, für das man $x_{n-r,r+1} = \cdots = x_{n-r,n-1} = 0$ und $x_{n-r,n} = 1$ setzt (und analog verfährt).

Die Menge aller Lösungen des ursprünglichen (inhomogenen) linearen Gleichungssystems ist schließlich $\{x_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_{n-r} v_{n-r} \mid t_1, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R}\}$.

Bsp.:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= -3 \\ 4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &2.\text{ Gleichung} - 3 \times 1.\text{ Gleichung} \\ &3.\text{ Gleichung} - 4 \times 1.\text{ Gleichung} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 10x_3 - 20x_4 &= -30 \\ 10x_3 - 20x_4 &= -30 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vertausche die Reihenfolge von } x_2 \text{ und } x_3$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 4x_3 + 3x_2 + 3x_4 &= 9 \\ 10x_3 \qquad - 20x_4 &= -30 \\ 10x_3 \qquad - 20x_4 &= -30 \end{aligned}\right\} \quad 4.\text{ Gleichung} - 3.\text{ Gleichung}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 4x_3 + 3x_2 + 3x_4 &= 9 \\ 10x_3 \qquad - 20x_4 &= -30 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems: Setze $x_3 = -3$, $x_2 = x_4 = 0$

$\Rightarrow x_1 + 12 = 9 \Rightarrow x_1 = -3 \Rightarrow x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Basis für den Raum der Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 4x_3 + 3x_2 + 3x_4 &= 0 \\ 10x_3 \qquad - 20x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Es ist $r = 2$ und wir finden v_1 und v_2:

Für v_1 setze $x_2 = 1$, $x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für v_2 setze $x_2 = 0$, $x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow x_1 - 8 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Menge aller Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bemerkungen: 1) Ist $m = n$ und die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar, so ist das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ eindeutig lösbar und $x = A^{-1} \cdot b$.

2) Die im Gaußschen Eliminationsverfahren auftretende Größe r wird als der Rang der (Koeffizienten) Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ bezeichnet und man schreibt kurz $\operatorname{rang} A = r$. Der Rang einer Matrix kann wie im Gaußschen Eliminationsverfahren beschrieben bestimmt werden, d.h. man vertauscht Zeilen oder Spalten

und addiert Vielfache einer Zeile zu einer anderen. Der Rang einer Matrix A ist zugleich:

- Die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilen von A,
- Die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A,
- Die Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Teilraums von $\mathbb{R}^n$,
- Die Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Teilraums von $\mathbb{R}^m$,
- Die Dimension des Bilds $\mathrm{Bild}\,\varphi$ der linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(x) = A\cdot x$

Bspe.: 1)

$$\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Im oben Bsp. ist der Rang der Koeffizientenmatrix 2, d.h.

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \end{pmatrix} = 2$$

Satz 55 (Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten) Es sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$. Dann ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{matrix}\right\}$ (mit $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$) gegeben durch

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist A invertierbar und daher $\det A \neq 0$ nach Satz 27. Nach Bemerkung 1 (Seite 42) ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ seine eindeutige Lösung, so folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} & a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{Satz 37 (i)}}{=} x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + x_2\underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\overset{\text{Satz 38}}{=} 0} = x_1 \cdot \det A$$

und völlig analog $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = x_2 \cdot \det A$.

Satz 56 (Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten) Es sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in GL_3(\mathbb{R})$. Dann ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{matrix}\right\} \quad (\text{mit } b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R})$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Beweis: Analog zu Satz 55.

Bsp.: 1) Für das Gleichungssystem $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ ist $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ und daher

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (-2) = 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-2) = 1.$$

2) Für das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array}\right\} \quad \text{ist} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -9+2+16+4-6-12 = -5$$

und daher

$$x = -\frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot (-3+2+4-2) = -\frac{1}{5},$$

$$y = -\frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot (1+8-3-6) = 0$$

und

$$z = -\frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot (-3+4+1-4) = \frac{2}{5}.$$

24. 4. 2024