6. Reelle Vektorräume mit innerem Produkt

<u>Def.</u>: Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt inneres Produkt auf V (oder Skalarprodukt auf V), wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $\langle u+v, w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle \quad \forall u,v,w \in V,$
2) $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v,w \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall v,w \in V,$

} linear (im ersten Argument)

3) $\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle \quad \forall v,w \in V,$ } symmetrisch
4) $\langle v,v \rangle > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ } positiv definit

<u>Lemma 57</u> Ist V ein reeller Vektorraum und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, so gelten

(i) $\langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \quad \forall u,v,w \in V,$
(ii) $\langle v, \alpha w \rangle = \alpha \langle v,w \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall v,w \in V,$

} linear (im zweiten Argument)

(iii) $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

<u>Beweis</u>: (i) $\langle u, v+w \rangle \overset{3)}{=} \langle v+w, u \rangle \overset{1)}{=} \langle v,u \rangle + \langle w,u \rangle \overset{3)}{=} \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \quad \forall u,v,w \in V$

(ii) $\langle v, \alpha w \rangle \overset{3)}{=} \langle \alpha w, v \rangle \overset{2)}{=} \alpha \langle w,v \rangle \overset{3)}{=} \alpha \langle v,w \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall v,w \in V$

(iii) $\langle 0, v \rangle = \langle 0 \cdot 0, v \rangle \overset{2)}{=} 0 \cdot \langle 0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V, \quad \langle v, 0 \rangle \overset{3)}{=} \langle 0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

<u>Satz 58</u> Für $V = \mathbb{R}^n$ sei (für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$) die Abbildung $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\langle x,y \rangle = x^T \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n .$$

Dann ist $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.

<u>Beweis</u>: $\langle x+y, z \rangle = (x+y)^T \cdot z = (x^T + y^T) \cdot z = x^T \cdot z + y^T \cdot z = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

$\langle \alpha x, y \rangle = (\alpha x)^T \cdot y = (\alpha \cdot x^T) \cdot y = \alpha \cdot (x^T \cdot y) = \alpha \langle x,y \rangle$

$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y,x \rangle$

Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so $\exists j \in \{1,\dots,n\} : x_j \neq 0$ und $\langle x,x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq x_j^2 > 0$

<u>Definition</u>: Das in Satz 58 beschriebene Skalarprodukt wird als das Standardskalarprodukt (auf $\mathbb{R}^n$) bezeichnet.

<u>Beispiele</u>: 1) Für $V = \mathbb{R}^2$ ist $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

2) Für $V = \mathbb{R}^3$ ist $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

3) Für $V = \mathbb{R}^2$ ist $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$

Es ist $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1\ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Setzt man $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

so ist $\langle x, y \rangle = x^T \cdot A \cdot y$ und daher

$$\langle x+y, z \rangle = (x+y)^T \cdot A \cdot z = (x^T + y^T) \cdot A \cdot z = x^T \cdot A \cdot z + y^T \cdot A \cdot z = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = (\alpha x)^T A \cdot y = (\alpha x^T) \cdot A \cdot y = \alpha (x^T \cdot A \cdot y) = \alpha \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot A \cdot y = (x^T \cdot A \cdot y)^T = y^T \cdot A^T \cdot x = y^T \cdot A \cdot x = \langle y, x \rangle,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (2x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \implies (2x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 = 0 \implies 2x_1 - x_2 = x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$$

4) Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und V der Raum der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$ ein Skalarprodukt auf V.

Definition: Ein reeller Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ wird euklidischer Vektorraum genannt.

Satz 59 (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so gilt $|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle \quad \forall v, w \in V$.
Dabei gilt Gleichheit genau dann wenn $v = w$ oder v und w l.a. sind.

Beweis: Ist $w = 0$, so ist $\langle v, w \rangle = \langle w, w \rangle = 0$ (nach Lemma 57 (iii)) und daher $|\langle v, w \rangle|^2 = 0 = \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$.

Sei darum nun $w \neq 0$ und daher $\langle w, w \rangle > 0$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig folgt

$$0 \leq \langle v - \alpha w, v - \alpha w \rangle = \langle v, v \rangle - \alpha \langle v, w \rangle - \alpha \langle w, v \rangle + \alpha^2 \langle w, w \rangle$$
$$= \langle v, v \rangle - 2\alpha \langle v, w \rangle + \alpha^2 \langle w, w \rangle$$

Setzt man $\alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$, so erhält man daraus

$$0 \leq \langle v, v \rangle - 2 \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} = \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle}$$

$$\implies 0 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \implies |\langle v, w \rangle|^2 = \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$$

Ist $|\langle v, w \rangle|^2 = \langle v, w \rangle^2 = \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$, so folgt aus der obigen Argumentation, dass entweder $w = 0$ oder $w \neq 0$ und $v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = 0$ (und daher $v = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$) gelten muss. In beiden Fällen ist $v = w$ oder v und w sind l.a.

Ist umgekehrt $v=w$, so ist $|\langle v,w\rangle|^2 = \langle v,w\rangle^2 = \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle$.

Ist $v \neq w$ und v und w sind l.a., so $\exists \alpha \in \mathbb{R}: w = \alpha v$ oder $\exists \alpha \in \mathbb{R}: v = \alpha w$ (nach Kor. 13). Im ersten Fall ist

$$\langle v,w\rangle^2 = \langle v,\alpha v\rangle^2 = \alpha^2 \langle v,v\rangle^2 = \langle v,v\rangle \cdot (\alpha^2\langle v,v\rangle) = \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle.$$

Den zweiten Fall zeigt man analog.

<u>Beispiele</u>: 1) Für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ erhält man

$$(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \quad \forall x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$$

2) Insbesondere gelten $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) \quad \forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ und $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \quad \forall x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 \in \mathbb{R}$

3) Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so ist

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right).$$

<u>Definition</u> Es sei V ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ eine Abbildung, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ und $\|v\| = 0 \iff v = o$,

2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$,

3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v,w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Dann wird $\|v\|$ als Norm von $v \in V$ und V als normierter Vektorraum bezeichnet.

29.4.2024

<u>Satz 60</u> Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle} \quad \forall v \in V$ eine Norm auf V definiert.

<u>Beweis</u>: Für $v = o$ ist $\|v\| = \sqrt{\langle o,o\rangle} \overset{\text{Lemma 57 (iii)}}{=} \sqrt{0} = 0$.

Für $v \neq o$ ist $\langle v,v\rangle > 0$ und daher $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} > 0$.

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v,\alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v,v\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle v,v\rangle} = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$$

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w,v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$
$$= \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

Aus Satz 59 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) folgt

$\langle v,w\rangle \leq |\langle v,w\rangle| \leq \sqrt{\langle v,v\rangle}\cdot\sqrt{\langle w,w\rangle} = \|v\| \cdot \|w\|$ und daher

$$\|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Durch Wurzelziehen erhält man $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Beispiele: 1) Für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ erhält man auf diese Weise die Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

2) Insbesondere ist $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bzw. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

3) Ist V der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ $(\subseteq \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$, so erhält man die Norm $\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\, dx}$.

Bemerkungen: 1) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ und die Norm $\|.\|$ auf V wie in Satz 60 definiert, so sagt man, $\|.\|$ werde durch $\langle .,. \rangle$ induziert.

2) Ein reeller Vektorraum V besitzt normalerweise mehr als eine Norm. Deshalb schreibt man für die Normen aus den drei Beispielen oben oft $\|.\|_2$. Wir verwenden diese Notation nicht, da wir immer mit dieser Norm arbeiten werden.

3) Nicht jede Norm auf einem reellen Vektorraum wird von einem Skalarprodukt induziert. Z.B. ist $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$ (für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$) eine Norm, die nicht durch ein Skalarprodukt induziert wird.

4) Die Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ entspricht seiner Länge (wobei implizit der Satz des Pythagoras auftaucht).

Korollar 61 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 2. Version) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm, so gilt $|\langle v, w \rangle| \le \|v\| \cdot \|w\|$ $\forall v, w \in V$ und Gleichheit gilt genau dann wenn $v = w$ oder v und w l.a. sind.

Beweis Folgt sofort aus Satz 59 durch Wurzelziehen.

Korollar 62 Ist V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|.\|$, so gilt
$\big|\|v\| - \|w\|\big| \le \|v - w\|$ $\forall v, w \in V$.

Beweis: Aus $\|v\| = \|(v-w) + w\| \le \|v - w\| + \|w\|$ folgt $\|v\| - \|w\| \le \|v - w\|$ und aus Symmetriegründen $\|w\| - \|v\| \le \|w - v\| = \|(-1)(v-w)\| = |-1| \cdot \|v - w\| = \|v - w\|$.
Insgesamt ist $\big|\|v\| - \|w\|\big| = \max\{\|v\| - \|w\|, \|w\| - \|v\|\} \le \|v - w\|$.

Satz 63 (Cosinussatz für euklidische Vektorräume) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm, so ist $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$ $\forall v, w \in V$.

Beweis: $\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$

$= \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle$

Bemerkungen: 1) Die Bezeichnung Cosinussatz hat folgenden Grund: Ist $\langle .,.\rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$, $v,w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und φ der Winkel zwischen v und w, so ist $\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\varphi$ (wie wir bald sehen werden).

2) Ist umgekehrt V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,.\rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm, so gilt (nach Kor 61) für $v,w \in V\setminus\{0\}$

$$|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\| \iff -\|v\|\cdot\|w\| \le \langle v,w\rangle \le \|v\|\,\|w\|$$

$$\iff -1 \le \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \le 1$$

Daher gibt es genau einen Winkel $\varphi \in [0,\pi]$ (d.h. zwischen $0°$ und $180°$), sodass $\cos\varphi = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$. Diesen Winkel kann man als Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren.

3) Unter den Voraussetzungen von Satz 63 gilt $\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$ für $v,w \in V$, d.h. man kann das Skalarprodukt durch die Norm ausdrücken. (Im Fall des $\mathbb{R}^2$ bedeutet das, dass man auch $\cos\varphi$ durch die Norm ausdrücken kann.)

Definition Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,.\rangle$. Zwei Vektoren $v,w \in V$ heißen orthogonal wenn $\langle v,w\rangle = 0$.

Beispiele: 1) Für $x,y \in \mathbb{R}$ bel sind $\binom{x}{y}, \binom{-y}{x} \in \mathbb{R}^2$ orthogonal, da
$\left\langle \binom{x}{y}, \binom{-y}{x}\right\rangle = x(-y) + yx = 0$

2) $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind orthogonal, da $\left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 1\cdot 4 - 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) = 0$

3) $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{R}^n$ sind paarweise orthogonal, d.h. $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ für $1 \le i,j \le n$, $i \ne j$

4) Ist $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ mit Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, so sind $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1\ \forall x \in [0,1]$ und $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - \frac{1}{2}$ orthogonal, da

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 1\cdot\left(x-\tfrac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{x=0}^{1} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) - (0-0) = 0.$$

Bemerkung: Sind $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$, so ist

$\langle x,y\rangle = 0 \iff \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi = 0 \iff \cos\varphi = 0 \iff \varphi = \frac{\pi}{2}$ (d.h. $90°$).

D.h. die Orthogonalität von x, y entspricht unserer Vorstellung.

Korollar 64 (Satz des PYTHAGORAS für euklidische Vektorräume) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sowie $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm und $v, w \in V$ orthogonal. Dann ist $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Beweis: Da nach Voraussetzung $\langle v,w\rangle = 0$ folgt aus Satz 63

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Bemerkung: Für $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt erhält man den klassischen Satz des Pythagoras.

Satz 65 Ist V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $v_1, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ sind paarweise orthogonal (d.h. $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für $1 \leq i,j \leq n, i \neq j$), so sind $v_1, \ldots, v_n$ l.u.

Beweis: Aus $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ (mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$) folgt (für $1 \leq j \leq n$)

$$0 \overset{\text{Lemma 57 (iii)}}{=} \langle 0, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \alpha_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j\rangle$$

Da $\langle v_j, v_j\rangle > 0$ ist $\alpha_j = 0$.

Korollar 66 Sind $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ orthogonal (bezüglich des Standardskalarprodukts), so ist $\{v, w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Beweis: Die Vektoren v, w sind l.u. nach Satz 65 und $\{v, w\}$ daher eine Basis nach Satz 16 (ii).

Definition: Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Ein Vektor $v \in V$ heißt normiert (oder Einheitsvektor) wenn $\|v\| = 1$.

Lemma 67 Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so ist $\frac{1}{\|v\|} v$ normiert.

Beweis: $\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$

30.4.2024

Satz 68 Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, deren Elemente paarweise orthogonal sind (d.h. $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für $1 \leq i,j \leq n, i \neq j$). Dann ist

$$w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle w, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i \quad \forall w \in V.$$

Beweis: Ist $w \in V$, so gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Daher ist

$$\langle w, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle.$$

Da v_j Element einer Basis ist, ist $v_j \neq 0$ und daher $\langle v_j, v_j \rangle > 0$. Also ist

$$\alpha_j = \frac{\langle w, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}.$$

Bemerkungen: 1) Man kann den Ausdruck $\frac{\langle w, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j$ folgendermaßen umschreiben:

$$\frac{\langle w, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j = \frac{\langle w, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j = \left\langle w, \frac{1}{\|v_j\|} v_j \right\rangle \cdot \frac{1}{\|v_j\|} v_j,$$

d.h. man kann $\frac{1}{\langle v_j, v_j \rangle}$ als Normierungsfaktor auffassen.

2) Der Ausdruck $\frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$ ist schon im Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aufgetaucht. Er entspricht (zumindest im $\mathbb{R}^2$) der orthogonalen Projektion von v auf die Gerade durch den Ursprung mit Richtungsvektor w. Der ebenfalls auftauchende Ausdruck $v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$ ist orthogonal zu w, denn

$$\left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}, w \right\rangle = \langle v, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \cdot \langle w, w \rangle = 0.$$

Satz 69 Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|.\|$. Dann gelten

(i) $\forall v, w \in V: \|v - w\| \geq 0$ und $\|v - w\| = 0 \iff v = w$,

(ii) $\forall v, w \in V: \|v - w\| = \|w - v\|$,

(iii) $\forall u, v, w \in V: \|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis: (i) $\|v - w\| \geq 0 \;\forall v, w \in V$ folgt aus der Definition der Norm und

$\|v - w\| = 0 \iff v - w = 0 \iff v = w$

(ii) $\|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \cdot \|w - v\| = \|w - v\|$

(iii) $\|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$.