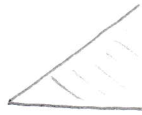
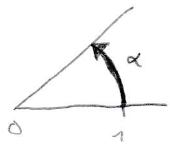
7. Winkel im $\mathbb{R}^2$

Ein Winkel (bei uns nur im $\mathbb{R}^2$) ist der Bereich, der von zwei Strahlen (d.h. Halbgeraden) begrenzt wird, die vom selben Punkt ausgehen. Die beiden Strahlen werden die Schenkel des Winkels genannt.

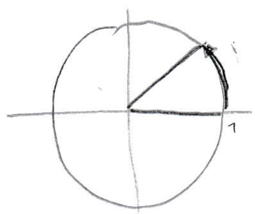


Um einen Winkel zu messen, zieht man einen Kreis mit Radius 1 um den Ausgangspunkt der beiden Strahlen. Die Länge des Kreisbogens, der innerhalb des Winkels liegt wird als Maß für die Größe des Winkels verwendet. (D.h. wählt man das Koordinaten-system so, dass dieser Ausgangspunkt der Nullpunkt ist, so ist der Kreis die Menge $\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|=1\} = \left\{\binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x_1^2+x_2^2}=1\right\} = \left\{\binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2+x_2^2=1\right\}$.)



Man spricht vom Bogenmaß für den Winkel. Die dazugehörige Einheit wird Radiant genannt und rad geschrieben. Da der Einheitskreis Bogenlänge 2π hat, ist (zunächst) $0\leq\alpha\leq 2\pi$.

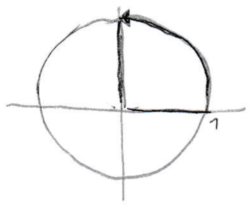
Alternativ wird der Kreis auch in 360 gleiche Teile (Grad) eingeteilt (und jeder Grad in 60 Bogenminuten und jede Bogenminute in 60 Bogensekunden, d.h. $1^\circ = 60' = 3600''$). Je nach der Größe des Winkels spricht man von einem



spitzen Winkel

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

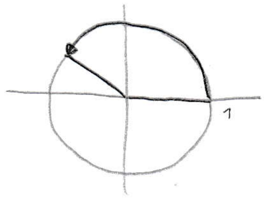
($0^\circ<\alpha<90^\circ$)



rechten Winkel

$\alpha=\frac{\pi}{2}$

($\alpha=90^\circ$)



stumpfen Winkel

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

($90^\circ<\alpha<180^\circ$)

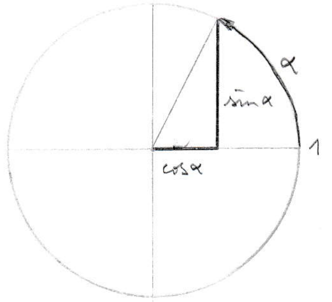
Außerdem spricht man von: Nullwinkel für $\alpha=0$ ($\alpha=0^\circ$)
gestreckten Winkel für $\alpha=\pi$ ($\alpha=180^\circ$)
überstumpfer Winkel für $\pi<\alpha<2\pi$ ($180^\circ<\alpha<360^\circ$)
voller Winkel für $\alpha=2\pi$ ($\alpha=360^\circ$)

Es ist möglich (und sinnvoll) auch Winkel $\alpha>2\pi$ oder negative Winkel ($\alpha<0$) zu betrachten. (D.h. man „umrundet den Kreis mehr als einmal" bzw. „geht in die Gegenrichtung".) Die Winkel wiederholen sich dabei aber mit Periode 2π (bzw 360°). D.h. die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+4\pi=\frac{9\pi}{2}, \ldots$ und $\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-4\pi=-\frac{7\pi}{2}, \ldots$

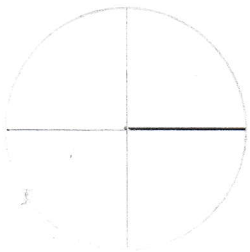
(bzw $90^\circ, 450^\circ, 810^\circ, \ldots$ und $-270^\circ, -630^\circ, \ldots$) stimmen alle überein.

Bemerkung: Wir werden im folgenden die Winkelfunktionen einführen und ihre Eigenschaften beschreiben. Diese werden in der Analysis genauer studiert. Wir werden uns an einigen Stellen auf die Anschauung verlassen und nicht ganz sauber argumentieren.

Man definiert sinus (kurz: sin) und cosinus (kurz: cos) eines Winkels α durch:

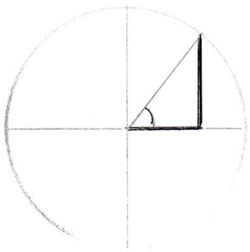


Man erkennt unmittelbar:



$\alpha = 0$ $(\alpha = 0°)$

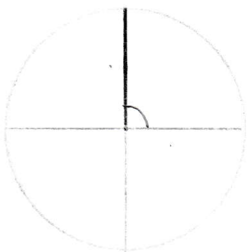
$\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

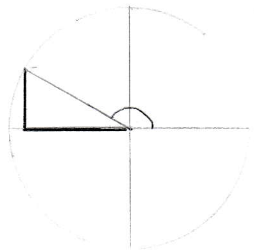
$(0° < \alpha < 90°)$

$\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$



$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(\alpha = 90°)$

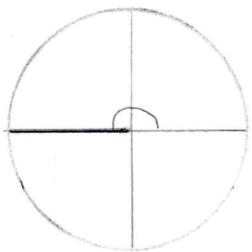
$\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$



$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

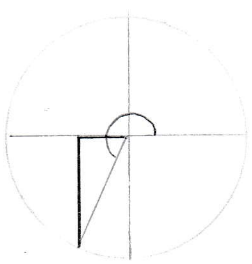
$(90° < \alpha < 180°)$

$\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$



$\alpha = \pi$ $(\alpha = 180°)$

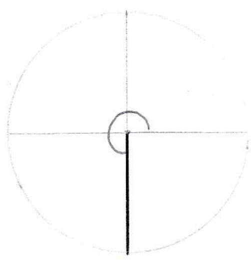
$\cos\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$



$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

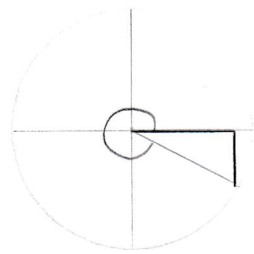
$(180° < \alpha < 270°)$

$\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$



$\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $(\alpha = 270°)$

$\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = -1$

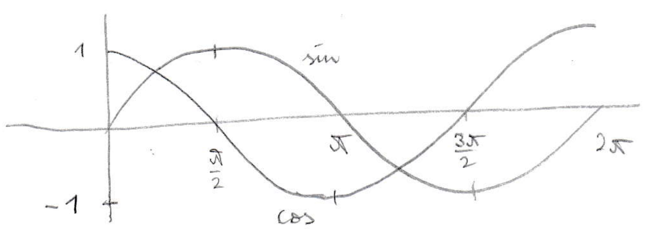


$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$(270° < \alpha < 360°)$

$\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$

Man erhält auf diese Art zwei Funktionen $\sin: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ und $\cos: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, deren Graphen folgende Gestalt haben:



Für $\alpha < 0$ und $\alpha > 2\pi$ definiert man sinus und cosinus durch periodische Fortsetzung, genauer: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $2k\pi \leq \alpha \leq 2(k+1)\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, so sei $\sin\alpha := \sin(\alpha - 2k\pi)$ und $\cos\alpha := \cos(\alpha - 2k\pi)$.

<u>Satz 70</u> (i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: -1 \leq \sin\alpha \leq 1$ und $\forall \alpha \in \mathbb{R}: -1 \leq \cos\alpha \leq 1$,

(ii) $\sin: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend auf den Intervallen $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ und streng monoton fallend auf dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,

(iii) $\cos: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend auf dem Intervall $[\pi, 2\pi]$ und streng monoton fallend auf dem Intervall $[0, \pi]$,

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

<u>Bemerkung</u>: In (iv) haben wir die Konvention $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$ bzw. $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$ verwendet.

<u>Beweis</u>: (i) Folgt sofort aus der Definition.

(ii) und (iii) Ergeben sich anschaulich aus der Definition. (Für Details siehe Analysis.)

(iv) Folgt aus der Definition und dem Satz des Pythagoras (Kor. 64).

<u>Satz 71</u> Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

(i) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$ und $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$

(bzw. $\sin(\alpha + 90°) = \cos\alpha$ und $\cos(\alpha + 90°) = -\sin\alpha$),

(ii) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ und $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

(bzw. $\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$ und $\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$),

(iii) $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

(bzw. $\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$).

<u>Beweis</u>: (i) Der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ und daher

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

Da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ am Einheitskreis liegt, folgt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \right\}$. Aufgrund der Vorzeichen der Winkelfunktionen muss

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$ gelten.

(ii) $\sin(\alpha + \pi) = \sin((\alpha + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$ und

$\cos(\alpha + \pi) = \cos((\alpha + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$

(iii) Folgt direkt aus der Definition, d.h. der periodischen Fortsetzung der beiden Funktionen (und auch durch doppelte Anwendung von (ii)).

Satz 72 (i) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (d.h. sin ist eine ungerade Funktion),

(ii) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (d.h. cos ist eine gerade Funktion).

Beweis: Hat der Endpunkt des Bogens mit Länge α die Koordinaten $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, so hat der Bogen der Länge $-\alpha$ als Endpunkt $\begin{pmatrix}\cos(-\alpha)\\ \sin(-\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}$.

Korollar 73 Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

(bzw $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$ und $\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$),

(ii) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ und $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

(bzw $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$ und $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$),

(iii) $\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$

(bzw $\sin(360°-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(360°-\alpha) = \cos\alpha$).

Beweis: (i) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Satz 71(i)}}{=} \cos(-\alpha) \overset{\text{Satz 72(ii)}}{=} \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Satz 71(i)}}{=} -\sin(-\alpha) \overset{\text{Satz 72(i)}}{=} -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

(ii) $\sin(\pi-\alpha) = \sin(-\alpha+\pi) \overset{\text{Satz 71(ii)}}{=} -\sin(-\alpha) \overset{\text{Satz 71(i)}}{=} \sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = \cos(-\alpha+\pi) \overset{\text{Satz 71(ii)}}{=} -\cos(-\alpha) \overset{\text{Satz 72(ii)}}{=} -\cos\alpha$

(iii) $\sin(2\pi-\alpha) \overset{\text{Satz 71(iii)}}{=} \sin(-\alpha) \overset{\text{Satz 72(i)}}{=} -\sin\alpha$

$\cos(2\pi-\alpha) \overset{\text{Satz 71(iii)}}{=} \cos(-\alpha) \overset{\text{Satz 72(ii)}}{=} \cos\alpha$

Korollar 74 $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (bzw $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Beweis: Wegen Kor 73 (i) ist $\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$. Sei $x := \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$.
Dann ist $1 \overset{\text{Satz 70(iv)}}{=} \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$. Da $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, ist $x > 0$ und daher $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Satz 75 (Summensätze) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten:

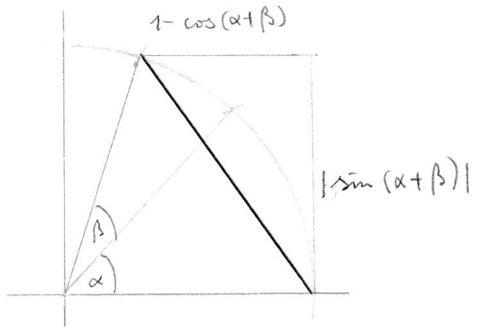
(i) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

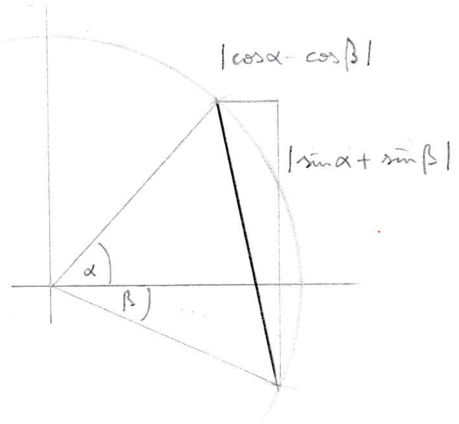
(ii) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

(iii) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,

(iv) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Beweis: (iii) Wir tragen zusätzlich zum Winkel α zweimal den Winkel β ein, einmal in die negative Richtung und einmal zusätzlich zum Winkel α:





Die Längen der beiden hervorgehobenen Strecken stimmen überein (und damit auch ihre Quadrate). Nach dem Satz des Pythagoras gilt daher:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + \sin^2(\alpha+\beta) = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$$

$$\Longrightarrow 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

$$\overset{\text{Satz 70(iv)}}{\Longrightarrow} \quad 2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(i) $\sin(\alpha+\beta) \overset{\text{Satz 71 (i)}}{=} -\cos(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}) \overset{(i)}{=} -\cos\alpha\cos(\beta+\frac{\pi}{2}) + \sin\alpha\sin(\beta+\frac{\pi}{2})$

$\overset{\text{Satz 71 (i)}}{=} -\cos\alpha\cdot(-\sin\beta) + \sin\alpha\cdot\cos\beta$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(ii) $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) \overset{(i)}{=} \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$

$\overset{\text{Satz 72}}{=} \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

(iv) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) \overset{(iii)}{=} \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$

$\overset{\text{Satz 72}}{=} \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

<u>Korollar 76</u> Für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ gelten:

(i) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

(ii) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

<u>Beweis</u>: (i) Folgt aus Satz 75 (i) für $\alpha=\beta$.

(ii) Folgt aus Satz 75 (iii) für $\alpha=\beta$.

<u>Korollar 77</u> Für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ gelten:

(i) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

(ii) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

(iii) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

(iv) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Beweis: (i) und (ii) Aus

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \overset{\text{Satz 75 (i)}}{=} \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \overset{\text{Satz 75 (ii)}}{=} \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

folgen

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{und} \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(iii) und (iv) Übung

Bemerkungen: 1) Befindet sich ein Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf einem Kreis mit Radius $r>0$ um den Nullpunkt, so ist

$$\|x\| = r \Rightarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2} = r \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = r^2 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{r}\right)^2 = 1$$

Ist $\begin{pmatrix} x_1/r \\ x_2/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, so $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x_1/r \\ x_2/r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$, d.h. $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$

2) Wir beschreiben den Zusammenhang des inneren Produkts $\langle x, y\rangle$ für $x, y \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ mit dem Winkel zwischen den beiden Vektoren x, y. Im Spezialfall, dass x die Gestalt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $x_1 > 0$ und $y = \|y\|\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ mit $\|y\|>0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$ ist, erhält man

$$\left\langle \begin{pmatrix} \|x\| \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \|y\|\cos\varphi \\ \|y\|\sin\varphi \end{pmatrix} \right\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\varphi.$$

Ist allgemeiner $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x\|\cos\alpha \\ \|x\|\sin\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|y\|\cos\beta \\ \|y\|\sin\beta \end{pmatrix}$ mit $\|x\|>0$, $\|y\|>0$ und $0 \le \alpha, \beta < 2\pi$, so

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \|x\|\cos\alpha \\ \|x\|\sin\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \|y\|\cos\beta \\ \|y\|\sin\beta \end{pmatrix} \right\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\overset{\text{Satz 75 (iv)}}{=} \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos(\alpha-\beta)$$