8. Orthogonale Abbildungen und Isometrien der Ebene

<u>Def.</u>: Eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt orthogonal wenn $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

<u>Bemerkung</u>: Wird nichts anderes angegeben, so bezeichnet ab jetzt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm.

<u>Satz 78</u> Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist orthogonal,

(ii) $\|\varphi(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\|\varphi(x)\| = \sqrt{\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wegen Satz 63 ist

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x-y)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

<u>Bemerkung</u>: Eine orthogonale Abbildung erhält also auch Längen und Winkel (da $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|\varphi(x-y)\| = \|x-y\|$ bzw. $\dfrac{\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle}{\|\varphi(x)\| \cdot \|\varphi(y)\|} = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$).

<u>Def.</u>: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal wenn A invertierbar ist und $A^{-1} = A^T$.

<u>Satz 79</u> Es sei $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist orthogonal}\}$. Dann ist $O(n)$ eine Untergruppe von $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

<u>Beweis</u>: $O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ nach Definition und $O(n) \neq \emptyset$ da $I_n \in O(n)$.
Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, so ist $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$ und $B \cdot B^T = B^T \cdot B = I_n$
Daher $(AB) \cdot (AB)^T = A(BB^T)A^T = AA^T = I_n$ und analog $(AB)^T(AB) = I_n$.
Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, so ist $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n \Rightarrow A^T \cdot (A^T)^T = (A^T)^T \cdot A = I_n$
Die Beh. folgt aus Satz 4.

<u>Definition</u> Die Gruppe $O(n)$ wird als orthogonale Gruppe bezeichnet.

<u>Korollar 80</u> Es sei $n \in \{2,3\}$. Ist $A \in O(n)$, so ist $\det A \in \{1, -1\}$.

<u>Beweis</u>: $1 = \det I_n = \det(A \cdot A^T) = (\det A) \cdot (\det A^T) = (\det A)^2 \Rightarrow |\det A| = 1$

<u>Satz 81</u> Es $n \in \{2,3\}$, $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass $\varphi(x) = A \cdot x \; \forall x \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist orthogonal,

(ii) A ist orthogonal

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ ist

$x^T I_n y = x^T y = \langle x,y\rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^T(Ay) = x^T(A^TA)y$

und daher $A^TA = I_n$. (Setzt man $x = e_i, y = e_j$ mit $1 \leq i,j \leq n$, so erhält man die Eintragung der jeweiligen Matrix in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.) Daher ist $(\det A)^2 = (\det A^T)(\det A) = \det(A^TA) = \det I_n = 1$ und A ist nach Satz 27 bzw. Satz 52 invertierbar und $A^{-1} = I_n A^{-1} = (A^TA)A^{-1} = A^T(AA^{-1}) = A^T I_n = A^T$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Für $x,y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^T(Ay) = x^T(A^TA)y = x^T I_n y = x^T y = \langle x,y\rangle$$

Satz 82 Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in O(2)$ und $\det A = 1$,

(ii) $\exists \alpha \in [0, 2\pi) : A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, so folgt aus Satz 27 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} = A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}$ und daher $a = d$ und $b = -c$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a\end{pmatrix}$. Wegen $1 = \det A = \begin{vmatrix} a & -c \\ c & a\end{vmatrix} = a^2 + c^2$ liegt $\begin{pmatrix} a \\ c\end{pmatrix}$ am Einheitskreis und es gibt ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit der Eigenschaft $a = \cos\alpha$ und $c = \sin\alpha$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wegen

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

und analog $A^T \cdot A = I_2$ ist A invertierbar und $A^{-1} = A^T$. Weiters ist

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Korollar 83 Es sei $SO(2) := \{A \in O(2) \mid \det A = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Dann ist $SO(2)$ eine abelsche Untergruppe von $(O(2), \cdot)$

Beweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Satz 75}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix},$$ d.h. $SO(2)$ ist Untergruppe nach Satz 4.

Aus $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ folgt, dass $SO(2)$ abelsch ist.

Bemerkung: Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um den Nullpunkt um den Winkel α (gegen den Uhrzeigersinn). Es ist ja

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \overset{\text{Satz 71(i)}}{=} \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$$

und daher

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \varphi(x_1e_1+x_2e_2) = x_1\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

8.5.2024

Satz 84 Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in O(2)$ und $\det A = -1$,

(ii) $\exists\, \alpha \in [0, 2\pi): A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, so folgt aus Satz 27

$$\begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix} = A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$ und daher $b = c$ und $d = -a$, d.h. $A = \begin{pmatrix}a & c\\ c & -a\end{pmatrix}$

Aus $-1 = \det A = \begin{vmatrix}a & c\\ c & -a\end{vmatrix} = -a^2 - c^2 = -(a^2+c^2)$ folgt $a^2 + c^2 = 1$, d.h. $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ liegt am Einheitskreis und es gibt ein α mit der Eigenschaft $a = \cos\alpha$ und $c = \sin\alpha$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wegen

$$A\cdot A^T = A^T\cdot A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha & 0\\ 0 & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

ist A invertierbar und $A^{-1} = A^T$. Weiters ist

$$\det A = \begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = -1.$$

Bemerkungen: 1) Die Menge $\{A \in O(2) \mid \det A = -1\}$ bildet keine Gruppe. Z.B. ist $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \in O(2)$ und $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -1$ aber $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2 = I_2$, d.h. diese Menge ist bezüglich der Matrizenmultiplikation nicht abgeschlossen.

2) Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ beschreibt eine Spiegelung an einer Gerade durch den Nullpunkt mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x_1-Achse (d.h. diese Gerade hat Steigung $\tan\frac{\alpha}{2}$, zumindest für $\alpha \neq \pi$). Es ist ja

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2})\\ \sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2})\end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix} \overset{\text{Satz 71(i)}}{=} \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})\\ \sin(\alpha-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\alpha}{2}-(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}))\\ \sin(\frac{\alpha}{2}-(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}))\end{pmatrix}$$ und daher

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \varphi(x_1e_1+x_2e_2) = x_1\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

3) In der (offensichtlich richtigen) Gleichung $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

beschreibt $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ eine Spiegelung an der x-Achse, da $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$. D.h. jede Spiegelung an einer Gerade durch den Nullpunkt kann geschrieben werden als Verknüpfung einer Spiegelung an der x-Achse und einer Rotation.

<u>Erinnerung:</u> Ist $M (\neq \emptyset)$ eine Menge und $f: M \to M$ eine Abbildung, so heißt $x \in M$ Fixpunkt von f, wenn $f(x) = x$.

<u>Satz 85</u> (i) Ist $R_\alpha := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \in SO(2)$ mit $0 < \alpha < 2\pi$, so ist genau $\sigma \in \mathbb{R}^2$ Fixpunkt der Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto R_\alpha \cdot x$,

(ii) Ist $S_\alpha := \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \in O(2)\setminus SO(2)$ mit $0 \leq \alpha < 2\pi$, so ist die Menge der Fixpunkte der Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto S_\alpha \cdot x$ genau die Gerade $\left\{ t\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

<u>Beweis:</u> (i) $x \in \mathbb{R}^2$ ist Fixpunkt $\Leftrightarrow R_\alpha \cdot x = x = I_2 x \Leftrightarrow (R_\alpha - I_2)x = R_\alpha x - I_2 x = \sigma$,

d.h. $\begin{pmatrix}\cos\alpha - 1 & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Die Matrix $R_\alpha - I_2$ ist invertierbar (nach Satz 27), da

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha - 1 & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1\end{vmatrix} = (\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 = 2(\cos\alpha - 1) \neq 0.$$

Daher ist $x = (R_\alpha - I_2)^{-1}\sigma = \sigma$. Umgekehrt ist σ offenbar Fixpunkt.

(ii) $x \in \mathbb{R}^2$ ist Fixpunkt $\Leftrightarrow S_\alpha \cdot x = x = I_2 \cdot x \Leftrightarrow (S_\alpha - I_2)\cdot x = S_\alpha - I_2 x = \sigma$, d.h.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha - 1 & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 0$ erhält man $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0$. D.h. die Menge der Fixpunkte ist die x_1-Achse $\left\{t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Für $\alpha = \pi$ erhält man $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0$. D.h. die Menge der Fixpunkte ist die x_2-Achse $\left\{t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Für $0 < \alpha < 2\pi$ und $\alpha \neq \pi$ schreiben wir

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha - 1 & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & -\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\sin^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & -2\cos^2\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\sin\frac{\alpha}{2} & 0\\ 0 & \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

Für $0 < \alpha < 2\pi$ und $\alpha \neq \pi$ ist $0 < \frac{\alpha}{2} < \pi$ und $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}$. Daher ist $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$ und $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$.

Daher ist $\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\alpha}{2} \end{vmatrix} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ und $\begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Also ist

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \sin\frac{\alpha}{2}\cdot x_1 = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot x_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{ t\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>Definition</u>: Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Isometrie wenn $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

<u>Satz 86</u> Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist eine Isometrie mit Fixpunkt $\sigma\ (\in \mathbb{R}^n)$,

(ii) φ ist orthogonal.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \sigma\| = \|\varphi(x) - \varphi(\sigma)\| = \|x - \sigma\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \overset{\text{Satz 63}}{=} \frac{1}{2}\left(\|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \overset{\text{Satz 63}}{=} \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Zu zeigen bleibt die Linearität: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\|^2 = \langle \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y), \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) \rangle$$

$$= \langle \varphi(x+y), \varphi(x+y) \rangle + \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle + \langle \varphi(y), \varphi(y) \rangle + 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$$
$$- 2\langle \varphi(x+y), \varphi(x) \rangle - 2\langle \varphi(x+y), \varphi(y) \rangle$$

$$= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle - 2\langle x+y, x \rangle - 2\langle x+y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle$$
$$- 2\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle - 2\langle x, y \rangle - 2\langle y, y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\| = 0 \Rightarrow \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = \sigma \Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

13.5.2024

und für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\|\varphi(\alpha x) - \alpha\varphi(x)\|^2 = \langle \varphi(\alpha x) - \alpha\varphi(x), \varphi(\alpha x) - \alpha\varphi(x) \rangle$$

$$= \langle \varphi(\alpha x), \varphi(\alpha x) \rangle - 2\alpha\langle \varphi(\alpha x), \varphi(x) \rangle + \alpha^2\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle$$

$$= \langle \alpha x, \alpha x \rangle - 2\alpha\langle \alpha x, x \rangle + \alpha^2\langle x, x \rangle = \alpha^2\langle x, x \rangle - 2\alpha^2\langle x, x \rangle + \alpha^2\langle x, x \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|\varphi(\alpha x) - \alpha\varphi(x)\| = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha x) - \alpha\varphi(x) = \sigma \Rightarrow \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|\varphi(x - y)\| \overset{\text{Satz 78}}{=} \|x - y\|$ und $\sigma \in \mathbb{R}^n$ ist Fixpunkt von φ nach Lemma 29 (i).

Def.: Ist $v \in \mathbb{R}^n$, so bezeichnet man die Abbildung $T_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_v(x) = x+v$ als Translation (dh. Verschiebung). Weiters bezeichne $\mathcal{T}_n := \{T_v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ die Menge aller derartigen Translationen.

Satz 87 (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ ist $(\mathcal{T}_n, \circ)$ eine abelsche Gruppe,

(ii) Jede Translation $T_v \in \mathcal{T}_n$ ist eine Isometrie,

(iii) Ist $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so besitzt T_v keinen Fixpunkt, für $v = 0$ ist jedes $x \in \mathbb{R}^n$ Fixpunkt.

Beweis: (i) Wurde für $n=2$ in den Übungen behandelt (Aufgabe 6). Wegen

$(T_w \circ T_v)(x) = T_w(x+v) = (x+v)+w = x+(v+w) = T_{v+w}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ist

$T_w \circ T_v = T_{v+w} \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$, dh. es gilt Abgeschlossenheit

$(T_w \circ T_v) \circ T_u = T_{u+(v+w)} = T_{(u+v)+w} = T_w \circ (T_v \circ T_u) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$

Neutrales Element ist $T_0 = id_{\mathbb{R}^n}$ und $T_v^{-1} = T_{-v} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

Wegen $T_w \circ T_v = T_{v+w} = T_{w+v} = T_v \circ T_w$ ist die Gruppe $(\mathcal{T}_n, \circ)$ abelsch.

(ii) $\|T_v(x) - T_v(y)\| = \|(x+v)-(y+v)\| = \|x-y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(iii) Ist $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ Fixpunkt für T_v, so $x+v = T_v(x) = x \Rightarrow v = 0$, Wid.

Für $v = 0$ ist $T_0(x) = x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Lemma 88 Sind $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei Isometrien, so ist auch ihre Verknüpfung $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie.

Beweis: $\|(g\circ f)(x) - (g \circ f)(y)\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| = \|f(x) - f(y)\| = \|x-y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Satz 89 Es sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist eine Isometrie,

(ii) Es gibt eine orthogonale Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine Translation $T_v \in \mathcal{T}_n$, sodass $f = T_v \circ \varphi$, dh. $f(x) = \varphi(x) + v \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Die Abbildung $T_{-f(0)} \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) - f(0)$ ist eine Isometrie nach Satz 87 (ii) und Lemma 88 und besitzt 0 als Fixpunkt. Nach Satz 86 gibt es $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal, sodass $T_{-f(0)} \circ f = \varphi \Rightarrow f = T_{f(0)} \circ \varphi$, dh. $f(x) = \varphi(x) + f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nach Satz 86 und Satz 87 (ii) sind φ und T_v Isometrien. Wegen Lemma 88 ist auch $f = T_v \circ \varphi$ eine Isometrie.

Lemma 90 Es sei $n \in \{1, 2, 3\}$ und $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal. Dann ist φ bijektiv und die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls orthogonal.

Beweis: $n=1$ Die einzigen beiden orthogonalen Abbildungen $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind $\varphi = \pm id_{\mathbb{R}}$ und daher invertierbar. In beiden Fällen ist $\varphi^{-1} = \varphi$ und daher φ^{-1} ebenfalls orthogonal.

(Da φ linear ist, gibt es nach Satz 30 ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $\varphi(x) = ax \; \forall x \in \mathbb{R}$.
Da φ orthogonal ist, ist $a^2 xy = (ax)(ay) = xy \; \forall x, y \in \mathbb{R}$. Für $x = y = 1$ folgt $a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{1, -1\}$).

Für $n \in \{2,3\}$ gibt es nach Satz 81 eine Matrix $A \in O(n)$, sodass $\varphi(x) = Ax \; \forall x \in \mathbb{R}^n$. Offenbar ist $\varphi^{-1}(x) = A^T x = A^{-1} x$ ebenfalls orthogonal.

<u>Korollar 91</u> Es sei $n \in \{1,2,3\}$ und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist eine Isometrie,

(ii) Es gibt eine eindeutig bestimmte orthogonale Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine eindeutig bestimmte Translation $T_v \in \mathcal{T}_n$, sodass $f = T_v \circ \varphi$, d.h. $f(x) = \varphi(x) + v \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

(iii) Es gibt eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in O(n)$ und einen eindeutigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x) = A \cdot x + v$

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Die Existenz von φ und T_v wurde bereits in Satz 89 bewiesen. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. Ist $f = T_v \circ \varphi = T_w \circ \psi$ mit $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal und $T_v, T_w \in \mathcal{T}_n$, so folgt $\varphi \circ \psi^{-1} = T_v^{-1} \circ T_w = T_{-v} \circ T_w = T_{w-v}$. Da $0 = (\varphi \circ \psi^{-1})(0) = T_{w-v}(0)$ besitzt T_{w-v} einen Fixpunkt und $w - v = 0$ nach Satz 87. Also ist $\varphi \circ \psi^{-1} = T_0 = id_{\mathbb{R}^n}$ und daher $\varphi = \psi$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wurde bereits in Satz 87 bewiesen.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Folgt für $n \in \{2,3\}$ aus Satz 81.

(Für $n = 1$ ist $O(1) = \{1, -1\}$. Siehe den Beweis von Lemma 90.)

<u>Korollar 92</u> Es sei $n \in \{1,2,3\}$ und $\mathcal{I}_n := \{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist Isometrie}\}$. Dann ist $\mathcal{I}_n$ eine (nichtabelsche) Untergruppe von $(S_{\mathbb{R}^n}, \circ)$ (der symmetrischen Gruppe von $\mathbb{R}^n$, siehe Satz 3 auf Seite 4). Insbesondere ist jede Isometrie bijektiv.

<u>Beweis</u>: Es sei $f \in \mathcal{I}_n$. Nach Satz 89 gibt es eine orthogonale Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine Translation $T_v \in \mathcal{T}_n$, sodass $f = T_v \circ \varphi$. Nach Lemma 90 ist φ bijektiv. Daher ist f bijektiv als Verknüpfung zweier bijektiver Funktionen. Damit ist $\mathcal{I}_n \subseteq S_{\mathbb{R}^n}$ gezeigt. In Lemma 88 wurde $f, g \in \mathcal{I}_n \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{I}_n$ gezeigt.

Es sei $f \in \mathcal{I}_n$. Für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt es eindeutig bestimmte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ und daher $f^{-1}(y_1) = x_1$ und $f^{-1}(y_2) = x_2$.
Also ist $\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| = \|x_1 - x_2\| = \|f(x_1) - f(x_2)\| = \|y_1 - y_2\|$, d.h. $f^{-1} \in \mathcal{I}_n$.

Nach Satz 4 ist $\mathcal{I}_n$ eine Untergruppe von $(S_{\mathbb{R}^n}, \circ)$. Es seien $f, g \in \mathcal{I}_n$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$(g\circ f)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \text{ und } (f\circ g)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \text{ d.h. } g\circ f \neq f\circ g$$

14.5.2024

Korollar 92 Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist eine Isometrie,

(ii) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in [0, 2\pi)$ und ein eindeutig bestimmtes $v \in \mathbb{R}^2$, sodass $f(x) = R_\alpha \cdot x + v$ oder $f(x) = S_\alpha \cdot x + v$, wobei (wie in Satz 85)

$$R_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \text{ und } S_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Beweis: Folgt aus Kor. 91, Satz 82 und Satz 84

Bemerkungen: 1) Aus Kor. 91 folgt, dass Isometrien Winkel unverändert lassen, da sowohl orthogonale Abbildungen als auch Translationen diese Eigenschaft besitzen.

2) Die Gruppe $(T_n, \circ)$ der Translationen ist offensichtlich eine Untergruppe der Gruppe $(J_n, \circ)$ aller Isometrien. Wegen $T_w \circ T_v = T_{v+w}$ hat sie dieselbe Struktur wie $(\mathbb{R}^n, +)$. Ebenso bildet $\{\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ ist orthogonal}\}$ eine Untergruppe von $(J_n, \circ)$. (Wir haben (in Satz 86) nur gezeigt, dass es sich um eine Teilmenge von J_n handelt.) Wegen einer Verallgemeinerung von Satz 81 hat sie dieselbe Struktur wie $(O(n), \cdot)$. Für $n \geq 2$ ist diese Gruppe nicht abelsch. Wegen einer Verallgemeinerung von Kor. 91 kann man die Gruppe J_n als aus $(\mathbb{R}^n, +)$ und $(O(n), \cdot)$ zusammengesetzt beschreiben.