1.10 Ein wenig über quadratische Formen

<u>Bemerkung</u>: Dieser Abschnitt gehört eigentlich zur Linearen Algebra (was seine Nummer erklärt). Er erscheint an dieser Stelle, weil wir ihn im nachfolgenden Abschnitt über lokale Extreme benötigen.

<u>Definition</u> Eine Abbildung $q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_i x_j$ mit $c_{ij} \in \mathbb{R}$ (für $1 \le i,j \le k$) wird quadratische Form genannt.

<u>Lemma 114</u> Ist $q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form, so gibt es eine (eindeutig bestimmte) symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k} \in M_k(\mathbb{R})$, derart dass

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = \langle \underline{x}, A \cdot \underline{x} \rangle = (x_1, \dots, x_k) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} a_{ij} x_i x_j .$$

Umgekehrt wird durch jede symmetrische Matrix $A \in M_k(\mathbb{R})$ auf diese Art eine quadratische Form definiert.

<u>Beweis</u>:

$$q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le k} c_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \le j < i \le k} c_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le k} c_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \le i < j \le k} c_{ji} x_j x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le k} (c_{ij} + c_{ji}) x_i x_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} \tfrac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) x_i x_j$$

Setzt man $a_{ii} = c_{ii}$ (für $1 \le i \le k$) und $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji})$ (für $1 \le i,j \le k$ und $i \neq j$), so erhält man die gesuchte Darstellung (die offenbar eindeutig ist).

<u>Beispiel</u>: Ist $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 6xz + 2yz$, so ist

$$q(x,y,z) = (x,y,z) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Definition</u> Es sei $A \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch. Die quadratische Form $q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$ bzw. A heißen

- positiv definit, wenn $q(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$,
- positiv semidefinit, wenn $q(\underline{x}) \ge 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $\exists \underline{y} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\} : q(\underline{y}) = 0$,
- negativ definit, wenn $q(\underline{x}) < 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$,
- negativ semidefinit, wenn $q(\underline{x}) \le 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $\exists \underline{y} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\} : q(\underline{y}) = 0$,
- indefinit, wenn $\exists \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^k$, derart dass $q(\underline{x}) < 0 < q(\underline{y})$.

<u>Beispiele</u>: 1) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 + y^2$ ist positiv definit

2) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ ist positiv semidefinit, da $q(x,y) = (x+y)^2 \geq 0 \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $q(1,-1) = 0$.

3) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = -x^2 - y^2$ ist negativ definit, da $-q(x,y) = x^2 + y^2$ positiv definit ist.

4) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2$ ist negativ semidefinit, da $-q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ positiv semidefinit ist

5) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 - y^2$ ist indefinit, da $q(0,1) = -1 < 0 < 1 = q(1,0)$.

6) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = xy$ ist indefinit, da $q(1,-1) = -1 < 0 < 1 = q(1,1)$.

7) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ ist indefinit, da

$$q(0,1) = -1 < 0 < 1 = q(1,0).$$

<u>Lemma 115</u> Es sei $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$ mit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann gilt: Ist q (bzw. A) positiv definit, so ist $a_{ii} > 0$ für $1 \leq i \leq k$.

<u>Beweis</u>: Für $1 \leq i \leq k$ ist $a_{ii} = \underline{e}_i^T \cdot A \cdot \underline{e}_i = q(\underline{e}_i) > 0$.

<u>Lemma 116</u> Es sei $A \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch und $S \in GL_k(\mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist positiv definit,

(ii) $S^T \cdot A \cdot S$ ist positiv definit.

<u>Beweis</u>: Die Matrix $S^T \cdot A \cdot S \in M_k(\mathbb{R})$ ist ebenfalls symmetrisch, da

$$(S^T \cdot A \cdot S)^T = S^T \cdot A^T \cdot (S^T)^T = S^T \cdot A \cdot S$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $\underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$, so ist auch $S \cdot \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$ und daher

$$\underline{x}^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot \underline{x} = (\underline{x}^T \cdot S^T) \cdot A \cdot (S \cdot \underline{x}) = (S \cdot \underline{x})^T \cdot A \cdot (S \cdot \underline{x}) > 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $\underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$, so ist auch $S^{-1} \cdot \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$ und daher

$$\begin{aligned}
\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} &= \underline{x}^T \cdot ((S^T)^{-1} \cdot S^T) \cdot A \cdot (S \cdot S^{-1}) \underline{x} \\
&\overset{\text{Kor. 18}}{=} \underline{x}^T \cdot ((S^{-1})^T \cdot S^T) \cdot A \cdot (S \cdot S^{-1}) \underline{x} \\
&= (\underline{x}^T \cdot (S^{-1})^T) \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot (S^{-1} \underline{x}) \\
&= (S^{-1} \cdot \underline{x})^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot (S^{-1} \cdot \underline{x}) > 0.
\end{aligned}$$

Satz 117 Es sei $A \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:

(i) A ist positiv definit,

(ii) $\exists S \in GL_k(\mathbb{R}): A = S^T \cdot S$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Induktion nach k.

Für $k=1$ ist A eine „1×1-Matrix", d.h. eine Zahl $a_{11} \in \mathbb{R}$. Wegen Lemma 115 ist $a_{11} > 0$ und man kann als „1×1-Matrix" S die Zahl $\sqrt{a_{11}}$ wählen. (D.h. man schreibt die quadratische Form $q(x_1) = a_{11}x_1^2$ als $q(x_1) = (\sqrt{a_{11}}\, x_1)^2$.)

Um das Folgende besser verständlich zu machen, führen wir den Induktionsschritt auf $k=2$ genauer vor. Dabei verwenden wir quadratisches Ergänzen:

$$q(x_1,x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= a_{11}x_1^2 + \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}}x_1 + \sqrt{a_{22}}\,x_2\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}x_1^2$$

$$= \left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}\right)x_1^2 + \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}}x_1 + \sqrt{a_{22}}\,x_2\right)^2$$

Dabei haben wir verwendet, dass (wegen Lemma 115) $a_{22} > 0$ ist. Wir können uns nun vorstellen, dass wir von (x_1, x_2) auf die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}}x_1 + \sqrt{a_{22}}\,x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

wechseln, in denen q als $\left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}\right)y_1^2 + y_2^2$ geschrieben werden kann. Aus der obigen Darstellung von q kann man nun ablesen, dass

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} \\ 0 & \sqrt{a_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} \\ 0 & \sqrt{a_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}}\end{pmatrix}$$

(was man auch leicht direkt nachrechnen kann). Wegen Lemma 116 ist auch

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det A}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

positiv definit und daher (wegen Lemma 115) $\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} > 0$. Man kann daher wie im Fall $k=1$ (der „Induktionsvoraussetzung") vorgehen und

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{22}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{22}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Setzt man das oben ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} \\ 0 & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix}$$

Setzt man also

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\det A / a_{22}} & 0 \\ a_{12}/\sqrt{a_{22}} & \sqrt{a_{22}} \end{pmatrix},$$

so ist $A = S^T \cdot S$ und $\det S = \underbrace{\sqrt{\frac{\det A}{a_{22}}}}_{>0} \cdot \underbrace{\sqrt{a_{22}}}_{>0} > 0$, also $S \in GL_2(\mathbb{R})$.

Für den allgemeinen Induktionsschritt gehen wir analog vor. Wegen Lemma 115 ist $a_{kk} > 0$ und man kann folgendermaßen quadratisch ergänzen:

$$q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k-1} a_{ij} x_i x_j + a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} x_i x_k$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k-1} a_{ij} x_i x_j + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{kk}}} x_i + \sqrt{a_{kk}}\, x_k \right)^2$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}^2}{a_{kk}} x_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le k-1} \frac{a_{ik} a_{jk}}{a_{kk}} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(a_{ii} - \frac{a_{ik}^2}{a_{kk}} \right) x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k-1} \left(a_{ij} - \frac{a_{ik} a_{jk}}{a_{kk}} \right) x_i x_j$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{kk}}} x_i + \sqrt{a_{kk}}\, x_k \right)^2$$

Analog zu oben führt das auf die Darstellung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \frac{a_{1k}}{\sqrt{a_{kk}}} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \frac{a_{k-1,k}}{\sqrt{a_{kk}}} \\ & & & \sqrt{a_{kk}} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & \\ \frac{a_{1k}}{\sqrt{a_{kk}}} & \cdots & \frac{a_{k-1,k}}{\sqrt{a_{kk}}} & \sqrt{a_{kk}} \end{pmatrix}$$

mit der symmetrischen Matrix

$$\widetilde{A} = \left(a_{ij} - \frac{a_{ik} a_{jk}}{a_{kk}} \right)_{1 \le i,j \le k-1} \in M_{k-1}(\mathbb{R})$$

(die man auch direkt nachrechnen kann). Wegen Lemma 116 ist die Matrix $\left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right)$ positiv definit. Ist nun $(x_1, \dots, x_{k-1})^T \in \mathbb{R}^{k-1} \setminus \{\underline{0}\}$, so ist

$$(x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot \widetilde{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} > 0,$$

d.h. $\widetilde{A}$ ist ebenfalls positiv definit. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun eine Matrix $\widetilde{S} \in GL_{k-1}(\mathbb{R})$, derart dass $\widetilde{A} = \widetilde{S}^T \cdot \widetilde{S}$. Dann ist auch

$$\left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{S}^T & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{S} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{S} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right)^T \cdot \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{S} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right).$$

Setzt man das oben ein, so erhält man $A = S^T \cdot S$ mit

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{S} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & \\ \frac{a_{1k}}{\sqrt{a_{kk}}} & \cdots & \frac{a_{k-1,k}}{\sqrt{a_{kk}}} & \sqrt{a_{kk}} \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{R}).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Ist $\underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$, so ist $S \cdot \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$ und daher

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = x^T \cdot S^T \cdot S \cdot \underline{x} = (S \cdot \underline{x})^T \cdot (S \cdot \underline{x}) = \langle S\underline{x}, S\underline{x} \rangle > 0.$$

<u>Korollar 118</u> Es sei $A \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch. Ist A positiv definit, so ist $\det A > 0$.

<u>Beweis</u>: Nach Satz 117 ist $A = S^T \cdot S$ für ein $S \in GL_k(\mathbb{R})$ und daher
$\det A = (\det S^T) \cdot (\det S) = (\det S)^2 > 0$.

10.7.2022

Definition: Es sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le k} \in M_k(\mathbb{R})$ und $1 \le l \le k$. Man bezeichnet

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix}$$ als den l-ten Hauptminor von A.

(D.h. $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_k = \det A$.)

Satz 119 Es sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le k} \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch mit Hauptminoren $\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1} \neq 0$. Dann gibt es $S \in GL_k(\mathbb{R})$, derart dass $A = S^T \cdot D \cdot S$, wobei

$$D = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & & & 0 \\ & \Delta_2/\Delta_1 & & & \\ & & \Delta_3/\Delta_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \Delta_k/\Delta_{k-1} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R}).$$

Beweis: Induktion nach k. Für $k=1$ ist die Behauptung trivial erfüllt (denn D ist die „1×1-Matrix" a_{11} und für S kann man die „1×1-Matrix" 1 wählen).

Es sei nun $k > 1$ und

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{a} \\ \hline \underline{a}^T & \alpha \end{array}\right)$$ mit $B = (a_{ij})_{1\le i,j\le k-1} \in M_{k-1}(\mathbb{R})$ symmetrisch,

$\underline{a}^T = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{k-1,k})$ und $\alpha = a_{kk}$. Da $\det B = \Delta_{k-1} \neq 0$, ist B invertierbar, B^{-1} ist ebenfalls symmetrisch (da $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1} = B^{-1}$) und daher $(B^{-1}\underline{a})^T = \underline{a}^T \cdot B^{-1}$ und

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & \underline{0} \\ \hline \underline{a}^T \cdot B^{-1} & 1 \end{array}\right)}_{=S_1^T} \cdot \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & \alpha - \underline{a}^T \cdot B^{-1} \cdot \underline{a} \end{array}\right) \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & B^{-1}\underline{a} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right)}_{=:S_1}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{0} \\ \hline \underline{a}^T & \alpha - \underline{a}^T \cdot B^{-1} \cdot \underline{a} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & B^{-1}\underline{a} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{a} \\ \hline \underline{a}^T & \alpha \end{array}\right) = A.$$

Aus $\Delta_k = \det A = \underbrace{(\det S_1^T)}_{=1} \cdot (\alpha - \underline{a}^T \cdot B^{-1} \cdot \underline{a}) \cdot \underbrace{(\det B)}_{=\Delta_{k-1}} \cdot \underbrace{(\det S_1)}_{=1} = (\alpha - \underline{a}^T \cdot B^{-1} \cdot \underline{a}) \cdot \Delta_{k-1}$

folgt $\alpha - \underline{a}^T \cdot B^{-1} \cdot \underline{a} = \Delta_k/\Delta_{k-1}$. Da $\det S_1 = 1$, ist $S_1 \in GL_k(\mathbb{R})$ und

$$A = S_1^T \cdot \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & \Delta_k/\Delta_{k-1} \end{array}\right) \cdot S_1.$$

Laut Induktionsvoraussetzung gibt es ein $\tilde{S}_2 \in GL_{k-1}(\mathbb{R})$, derart dass $B = \tilde{S}_2^T \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{S}_2$, wobei

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & & 0 \\ & \Delta_2/\Delta_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_{k-1}/\Delta_{k-2} \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{S}_2^T & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right)}_{= S_2^T} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{D} & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & \Delta_k/\Delta_{k-1} \end{array}\right)}_{=: D} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{S}_2 & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right)}_{=: S_2} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{S}_2^T \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{S}_2 & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & \Delta_k/\Delta_{k-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & \Delta_k/\Delta_{k-1} \end{array}\right)$$

folgt durch Einsetzen $A = S_1^T \cdot (S_2^T \cdot D \cdot S_2) \cdot S_1 = (S_2 \cdot S_1)^T \cdot D \cdot (S_2 \cdot S_1)$. Setzt man $S := S_2 \cdot S_1$, so folgt die Behauptung.

<u>Korollar 120</u> Es sei $A \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:

(i) Die Matrix A (bzw. die quadratische Form $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \cdot \underline{x}$) ist positiv definit,

(ii) Alle Hauptminoren von A sind positiv (d.h. $\Delta_i > 0$ für $1 \leq i \leq k$).

<u>Beweis</u>: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Für $1 \leq i \leq k$ sei die quadratische Form $q_i: \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ definiert als

$$q_i(x_1, \dots, x_i) = (x_1, \dots, x_i) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da A positiv definit ist, ist q_i positiv definit für $1 \leq i \leq k$. Aus Korollar 118 folgt

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq k.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Aus $\Delta_1, \dots, \Delta_k > 0$ folgt sofort $\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \dots, \Delta_k/\Delta_{k-1} > 0$. Daher ist die Matrix

$$D := \begin{pmatrix} \Delta_1 & & & 0 \\ & \Delta_2/\Delta_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_k/\Delta_{k-1} \end{pmatrix}$$

positiv definit (denn $\underline{x}^T \cdot D \cdot \underline{x} = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} x_k^2$).

Nach Satz 119 $\exists S \in GL_k(\mathbb{R})$, derart dass $A = S^T \cdot D \cdot S$. Nach Lemma 116 ist auch A positiv definit.

Korollar 121 Es sei $A \in M_k(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:

(i) Die Matrix A (bzw. die quadratische Form $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \cdot \underline{x}$) ist negativ definit,

(ii) Die Hauptminoren von A erfüllen die Relation $\operatorname{sgn} \Delta_i = (-1)^i$ für $1 \le i \le k$

(d.h. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, \dots$).

Beweis: Die Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist (denn $\underline{x}^T \cdot (-A) \cdot \underline{x} = -(\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x})$). Wegen Korollar 120 ist das dazu äquivalent, dass

$$0 < \begin{vmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{1i} & \cdots & -a_{ii} \end{vmatrix} \overset{\text{Übungsbsp. 520)}}{=} (-1)^i \Delta_i \quad \text{für } 1 \le i \le k,$$

was wiederum zu $\operatorname{sgn} \Delta_i = (-1)^i$ (für $1 \le i \le k$) äquivalent ist.

Bemerkung: Es ist nicht richtig, dass A genau dann positiv semidefinit ist, wenn $\Delta_1, \dots, \Delta_k \ge 0$ gilt. z.B. ist die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

offensichtlich indefinit (denn $q(0,0,1) = -1 < 0 < 1 = q(1,0,0)$), obwohl $\Delta_1 = 1 > 0$ und $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ gilt.

Beispiel: Es sei $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \text{und} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 5 - 4 = 1 > 0,$$

ist q nach Korollar 120 eine positiv definite quadratische Form